

Pasternak基礎上の温度勾配をもつ 変断面片持ちばりの動的安定性

高橋 和雄*・白木 徳夫**
其田 智洋***

Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient on Pasternak Foundation

by

Kazuo TAKAHASHI*, Norio SHIRAKI**
and Tomohiro SONODA***

The dynamic instability behavior of a tapered cantilever beam on a Pasternak foundation under the action of a pulsating axial force and a steady, one-dimensional temperature gradient is studied.

The effects of taper, elastic foundation and thermal gradient on the natural frequencies, static buckling load and regions of instability which contain simple parametric resonances and combination resonances are discussed. The present results are compared with those of the previous solution.

1. まえがき

構造物の動的安定の研究は、これまで数多く行われ、解法および現象も明白になってきている。最近では、変断面、熱、弾性支承などを考慮した複雑な構造部材や複合材料からなる部材などへの応用が試みられる。このような研究の例としてKar¹⁾は、Pasternak基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ちばりの動的安定性を解析している。しかし、解法としてBolotin²⁾の方法を用いて行っているために、不安定領域は、単純共振のみしか得られていない。また、解析にあつてミスや解の精度にも問題がある。そこで、本研究は著者らが提案しているより厳密解に近い方法³⁾を用いて、同じ問題を解析して、既往の解析¹⁾のエラーを修正するとともに、すべての不安定領域を明らかにするものである。

2. 基礎式および解法

先端で周期的変動軸方向荷重 $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$

を受ける長さ方向に線形的に変化する長方形断面をもつPasternak基礎上の片持ちばりの一般図をFig. 1に示す¹⁾。また、このはりには、長さ方向に一樣な温度勾配(定常温度分布)をもつ。はりのたわみについて、Bernoulli-Eulerばりの仮定が成立するものとすれば、はりの運動方程式および境界条件は次のように与えられる。

運動方程式：

$$L(w) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + P(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - K_s \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + K_e y + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

境界条件式：

$$x = 0 : y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0,$$

$$x = L : E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

平成3年4月30日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**佐藤工業 (Sato Engineering Co., Ltd.)

***大学院修士課程土木工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

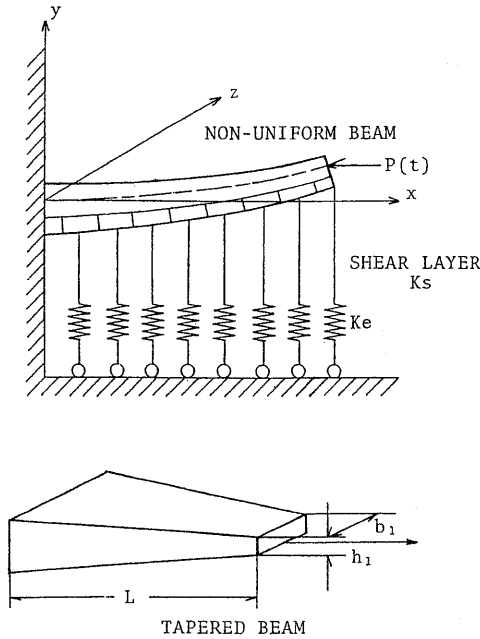


Fig. 1 Geometry and configuration of the system.

$$\frac{\partial}{\partial x} [E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + P(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

ここに、 y ：はりのたわみ、 $E(x)$ ：ヤング率、 $I(x)$ ：断面2次モーメント、 $A(x)$ ：断面積、 ρ ：密度、 K_e ：弾性基礎のバネ定数、 K_s ：せん断層のせん断定数、 L ：はりの長さ、 b_1 、 h_1 ：自由端の断面積の幅および高さ。

上式をはりの長さ L 、自由端の断面(b_1 、 h_1)とヤング率 E_1 および横波の伝播速度 c を用いて無次元化すると、次式が得られる。

$$L(\eta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [S(\xi)T(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}] + [P(\tau) - \alpha_s] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \alpha_e \eta + m(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3)$$

$$\eta(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \xi} = 0,$$

$$[S(\xi)T(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}] \Big|_{\xi=1} = 0, \quad (4)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [S(\xi)T(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}] + P(\tau) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right\} \Big|_{\xi=1} = 0$$

ここに、 $\xi = \frac{x}{L}$ 、 $\eta = \frac{y}{L}$ 、 $\tau = ct$ 、 $\bar{\omega} = \omega/c$

$$c^2 = \frac{E_1 I_1}{\rho A_1 L^4}, \quad p(\tau) = \frac{P(t)L^2}{E_1 I_1}, \quad \alpha = \frac{P_0}{P^*},$$

$$\beta = \frac{P_t}{P^*}, \quad p^* = \frac{P^* L^2}{E_1 I_1}, \quad \alpha_e = \frac{K_e L^4}{E_1 I_1},$$

$$\alpha_s = \frac{K_s L^2}{E_1 I_1},$$

$$A(\xi) = A_1 m(\xi), \quad E(\xi) = E_1 T(\xi),$$

$$I(\xi) = I_1 S(\xi), \quad P(\tau) = (\alpha + \beta \cos \bar{\omega} \tau) P^*$$

P^* ：オイラーの座屈荷重

式(3)の一般解を次のように仮定する。

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^n f_r(\tau) \eta_r(\xi) \quad (5)$$

ここに、 $f_r(\tau)$ ：未知の時間関数、 $\eta_r(\xi)$ ：境界条件を満足する座標関数。

式(5)の座標関数として、本論文では $\beta = 0$ のときの固有振動形を用いる⁴⁾。

$$\eta_r(\xi) = \sum_{j=1}^r a_j^r \{1 - \cos(2j-1)\pi\xi/2\} \quad (6)$$

ここに、 a_j^r ：自由振動解析から得られる r 次振動のモード定数

式(5)は式(3)の厳密解でないから、Galerkin法による近似解を求める。すなわち、

$$\int_0^1 L(\eta) \eta_s d\xi = 0 \quad (7)$$

ここに、 $s = 1, 2, \dots$ 。

式(7)の積分を実行し、行列表示すれば、

$$[M] \{ \ddot{f}(\tau) \} + ([K] - \alpha p^* [H] - \beta p^* [H] \cos \bar{\omega} \tau) \{ f(\tau) \} = \{0\} \quad (8)$$

ここに、 $M_{ij} = \int_0^1 m(\xi) \eta_i(\xi) \eta_j(\xi) d\xi$ 、

$$[K] = [G] + \alpha_s [H] + \alpha_e [R]$$

$$G_{ij} = \int_0^1 S(\xi) T(\xi) \eta_i'' \eta_j'' d\xi,$$

$$H_{ij} = \int_0^1 \eta_i' \eta_j' d\xi,$$

$$R_{ij} = \eta_i(1) \eta_j(1),$$

$[M]$ の逆行列を式(8)の前から掛けると、

$$[I] \{ \ddot{f}(\tau) \} + ([A] - \alpha p^* [B] - \beta p^* [B] \cos \bar{\omega} \tau) \{ f(\tau) \} = \{0\} \quad (9)$$

ここに、 $[I]$ ：単位行列、 $[A] = [M]^{-1} [K]$ 、

$$[B] = [M]^{-1} [H]$$

3. 動的安定解析

式(9)は連立のMathieuの方程式であり、その一般解は次のように仮定することができる。

$$\{ f(\tau) \} = e^{i\tau} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin k \bar{\omega} \tau + b_n \cos k \bar{\omega} \tau) \right\}$$

(10)

ここに、 λ : 未定定数, $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$: 未知のベクトル。

式 (10) を式 (9) に代入して、調和バランス法を適用すれば、未知のベクトルを求めるための同次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} ([I]\lambda^2 + [A] - \alpha p^*[B])\mathbf{b}_0 - \beta p^*[B]\mathbf{b}_1 &= \{0\} \\ 2\{(\lambda^2 - k^2 \bar{\omega}^2)[I] + [A] - \alpha p^*[B]\}\mathbf{a}_k \\ - 4\lambda k \bar{\omega} \mathbf{b}_k - \beta p^*[B](\mathbf{a}_{k+1} + \mathbf{a}_{k-1}) &= \{0\} \quad (11) \\ 4\lambda k \bar{\omega} [I]\mathbf{a}_k + 2\{(\lambda^2 - k^2 \bar{\omega}^2)[I] + [A] \\ - \alpha p^*[B]\}\mathbf{b}_k - \beta p^*[B](\mathbf{b}_{k+1} + \mathbf{b}_{k-1}) &= \{0\} \end{aligned}$$

上式の級数を有限項 ($n = N$) で打ち切れれば、次のように行列表示される。

$$[D]\{X\} = \{0\} \quad (12)$$

ここに、 $[D]$: 係数行列 $\{(2N+1) \times (2N+1)\}$,

$$\{X\} = \{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_N \quad \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_N\}^T$$

係数行列 $[D]$ は、 λ^0 (定数), λ^1, λ^2 のべき項で展開できる。すなわち、

$$[D] = [M_0] - \lambda[M_1] - \lambda^2[M_2] \quad (13)$$

ここに、 $[M_0], [M_1], [M_2]$: λ の 0 次, 1 次, 2 次の係数行列。

いま、 $\{Y\} = \lambda\{x\}$ なる新しいベクトルを導入すれば、式 (12) は 2 倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここに、 $[0], [I]$: $[M_0], [M_1], [M_2]$ と同じ大きさの零行列, 単位行列。

式 (14) は一般に非対称行列であり、複素固有値問題に帰着される。

4. 計算パラメーター

片持ちばりの断面は幅 b , 高さ h の長方形断面で、長さ方向に直線的に変化するものとする。

$$\begin{aligned} b &= b_1[1 + \alpha^*(1 - \xi)] \\ h &= h_1[1 + \beta^*(1 - \xi)] \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 α^*, β^* : 変断面パラメーター

このとき、質量と断面 2 次モーメントの分布関数は次のように表される¹⁾。

$$\begin{aligned} m(\xi) &= [1 + \alpha^*(1 - \xi)][1 + \beta^*(1 - \xi)], \\ S(\xi) &= [1 + \alpha^*(1 - \xi)][1 + \beta^*(1 - \xi)]^3 \end{aligned} \quad (16)$$

温度は自由端を基準として、線形的に変化するものとする。すなわち、 $\psi = \psi_1(1 - \xi)$ 。このとき、ヤング率の変化は次のように表される¹⁾。

$$\begin{aligned} E(\xi) &= E_1 T(\xi) \\ T(\xi) &= [1 - \delta(1 - \xi)], \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 δ : 温度パラメーター

また、Pasternak基礎のパラメーターは、

バネパラメーター: $\alpha_e^* = \alpha_e/\pi^4$

せん断剛性パラメーター: $\alpha_s^* = \alpha_s/\pi^2$

なお、 $\alpha_s^* = 0$ は Winkler 基礎に相当する。

係数励振振動の励振パラメーターは、次のとおりです。

α : 初期荷重

β : 変動荷重の振幅

$\bar{\omega}$: 励振振動数

荷重および振動数を無次元化する変断面ばりの 1 次の座屈荷重 p_1^* および固有振動数 ω_1 は式 (9) を変形することによって求められる。

5. 固有振動特性

Fig. 2 は静的軸力が作用しない ($\alpha = 0$) 熱勾配をもつ Pasternak 基礎上の変断面片持ちばりの 1 次から 3 次までの固有振動数について、解の収束性を検討した結果である。温度勾配がない場合 ($\delta = 0$) とある場合 ($\delta = 0.8$) に分けて表示している。熱勾配がある場合がない場合よりも、収束が悪くなるが、10 項程度をとれば十分である。本論文の数値計算には、項数 $N = 10$ を採用する。

Fig. 3 は 1 次から 3 次までの固有振動数 ω_1 と温度勾配 δ との関係は無次元バネ定数 α_e^* とせん断層の剛性定数 α_s^* をパラメーターに表示したものである。温度勾配 δ が大きくなれば、固有振動数は減少し、その傾向は高次振動になるほど顕著になる。Pasternak 基礎上のパラメーター α_e^*, α_s^* は、振動数を高めるが、 α_e^*, α_s^* の効き方は、振動モードによって異なる。1 次振動については、Pasternak 基礎の存在によって、熱勾配の増大による固有振動数の低下を防ぐことができるが、高次になるにつれて、Pasternak 基礎の効果が小さくなる。振動数は δ の増大とともに減少する。なお、Pasternak 基礎のパラメーターは、振動形にあまり影響を与えない。

6. 座屈特性

座屈特性を明らかにするにあたって、解の収束状況を明らかにする。Fig. 4 は熱勾配をもつ Pasternak 基礎

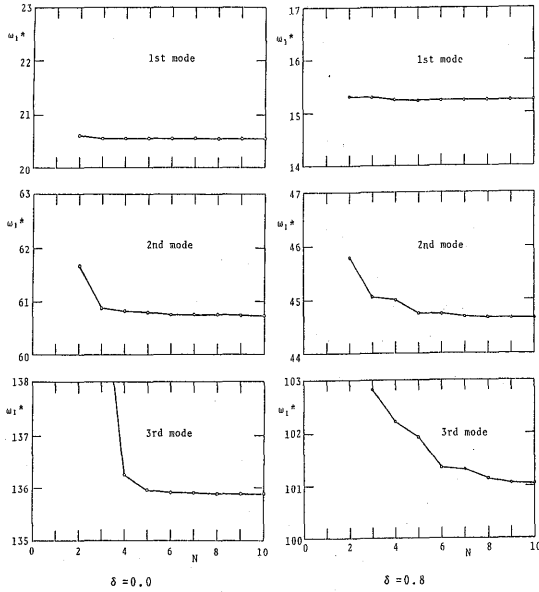


Fig. 2 Convergence of natural frequencies: $\alpha^* = 2.0$ and $\beta^* = 2.0$.

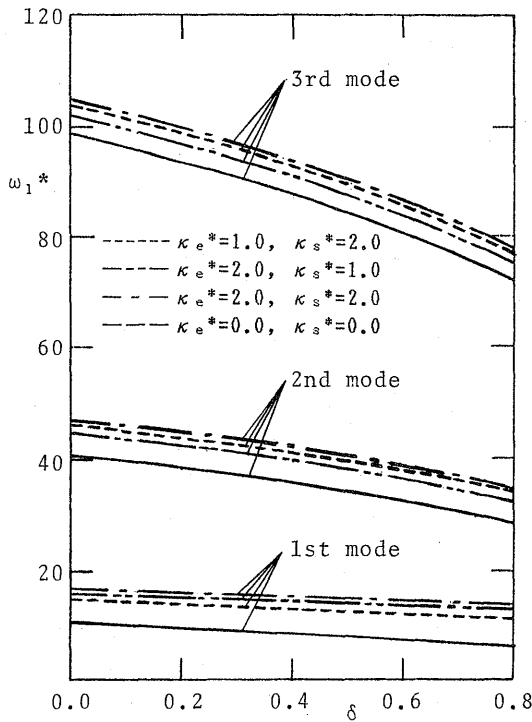


Fig. 3 Relation between natural frequency ω_1 and thermal gradient parameter δ for various stiffness parameters κ_e^* and κ_s^* : $\alpha^* = 2.0$ and $\beta^* = 1.0$.

上の変断面片持ちばりの座屈固有値 ω_1^* と項数 N の関係である。座屈解析の場合の収束は、Fig. 2に示した振動解析の収束よりも遅くなる。1次の座屈荷重は2項程度で十分であるが3次の座屈荷重の推定には10項以上必要である。しかし、座屈荷重は1次のみが必要であるので、本論文では、固有振動解析と同じ10項近似を用いた解析を行う。

Fig. 5は座屈荷重 k^* と温度勾配 δ との関係をプロットした結果である。温度勾配 δ が大きくなると、座屈荷重が低下し、この割合は高次ほど大きくなる。また、Pasternak基礎は座屈荷重を増加させる効果をもつが、特に低次の座屈荷重に対して、温度勾配 δ の影響を減少させる効果をもつ。これらより、Pasternak基礎の剛性によって、はりの温度勾配による剛性の低下を補うことができる。

7. 動的不安定領域

(1) 動的不安定領域

式(6)において、係数行列式 $[B]$ は次のように表される。

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix} \quad (17)$$

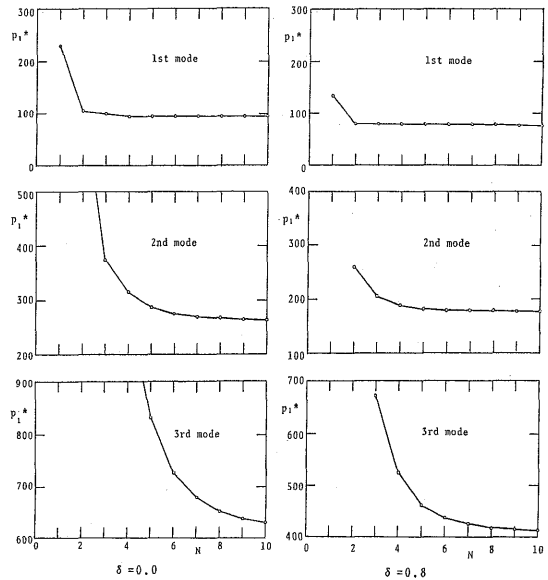


Fig. 4 Convergence of buckling loads: $\alpha^* = 2.0$ and $\beta^* = 2.0$.

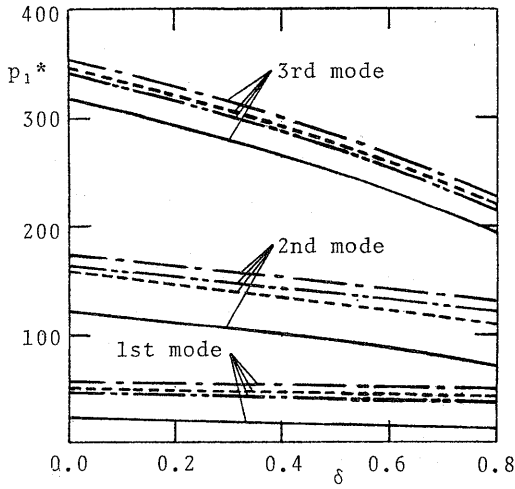


Fig. 5 Relation between buckling load p_1^* and thermal gradient parameter δ for various stiffness parameters x_e^* and x_s^* : $\alpha^* = 2.0$ and $\beta^* = 1.0$.

ここで, $b_{ij} \neq 0, b_{ii} \neq 0, b_{jj} \neq 0,$
 b_{ij} と b_{ji} は同符号

つまり, 本題の不安定領域には, 主対角線要素から現われる単純共振と, 非対角線要素から現われる結合共振が同時に含まれる. また, 非対角線要素の b_{ij} と b_{ji} が同符号であるから, 和型の結合共振のみが存在する. すなわち,

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 2\omega_i/k && \text{付近に生ずる単純共振} \\ \bar{\omega} &= (\omega_i + \omega_j)/k && \text{付近に生ずる結合共振 (18)} \end{aligned}$$

ここに, $k = 1, 2, \dots$

$k = 1$: 主不安定領域

$k \geq 2$: 副不安定領域

(2) 動的不安定領域

Fig. 6は3次振動まで考慮にした温度勾配がない場合のPasternak基礎上の変断面片持ちばり ($\alpha^* = 2.0, \beta^* = 1.0, \delta = 0.2, x_e^* = 2.0, x_s^* = 2.0, \alpha = 0.5$)の不安定領域である. 図中の縦軸は変動軸力の振幅を, Pasternak基礎がない変断面片持ちばりの座屈荷重で無次元化した変動軸力の振幅 β で, 横軸は変断面片持ちばりの1次振動の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である. 図中の右上がりの斜線部が単純共振 $2\omega_i/k$ の不安定領域である. また, 右下がりの斜線部が結合共振 $(\omega_i + \omega_j)/k$ の不安定領域を意味する. $k = 1$ の主不安定領域の他に, $k = 2$ の副不安定領域が存在する.

単純共振および結合共振の副不安定領域は主不安定領域に比べて狭い. しかし, 結合共振の主不安定領域の幅は, 単純共振の主不安定領域の値と同程度である. したがって, 結合共振を無視して, 本構造部材の不安定領域を議論することは不可能である. つまり, 文献1)の単純共振のみ求める方法では不十分である.

Pasternak基礎の剛性 x_e^*, x_s^* が不安定領域に及ぼす影響を明らかにするために, $\beta = 1.0$ における不安定領域の変動をFig. 7~9に示す. これらの図に示すように温度勾配の増大ともなつて固有振動数が減少するために, 不安定領域の生ずる中心振動数が低い振動数側に移動し, 不安定領域はわずかに広がる. $x_e^* = 2.0, x_s^* = 0.0$ のWinkler基礎および $x_e^* = 2.0, x_s^* = 2.0$ のPasternak基礎がある場合には, ない場合よりも

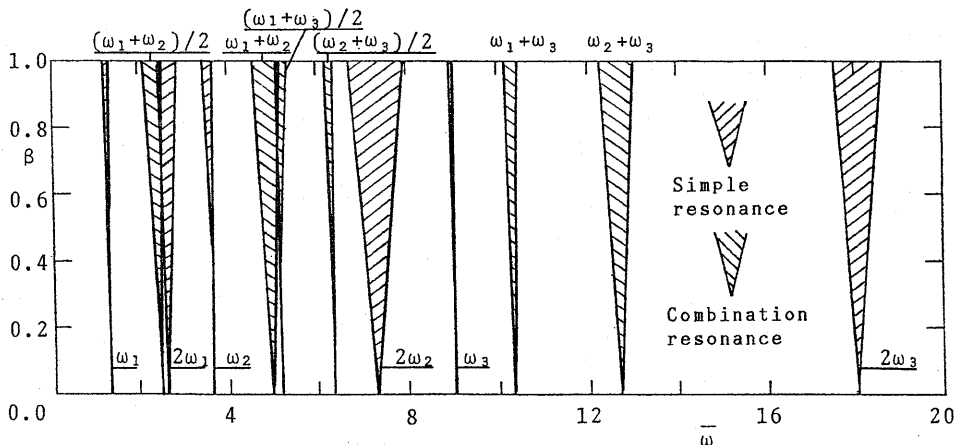


Fig. 6 Unstable regions for the beam: $\alpha^* = 2.0, \beta^* = 1.0, \delta = 0.2, x_e^* = 2.0$ and $x_s^* = 2.0$.

不安定領域の幅が狭くなる。特に1次振動の不安定領域 $2\omega_1$ に著しく効いてくる。Pasternak基礎は、構造全体の剛性を増大させるために不安定領域の幅が狭くなるものと考えられる。

8. 既往の研究との比較

本論文の結果と、文献1)の結果を比較するために、Fig. 10(a), (b)に固有振動解析の2つの解法による結果を示す。図に示すように、本論文の結果では、 x_e^* , x_s^* が増大すれば、振動数が増加している。しかし、文献1)の結果によればせん断層の剛性 x_s^* が増大するにつれて、振動数が減少している。せん断層も変形に抵抗

するので、剛性を増大させる効果をもたずである。文献1)では、 $[K] = [G] - x_s[H] + x_e[R]$ となっており、本論文とは $x_s[H]$ の項の符号が異なる。定式化の過程でミスが生じたためと考えられる。また、文献1)では、級数の項数 $N = 5$ で計算を行っている。しかし、Fig. 2で示したように、熱勾配がある場合の3次振動およびFig. 3の3次座屈荷重は5項では収束していないので、文献1)の $N = 5$ では項数が不足している。また、不安定領域の計算にあたって、文献1)では、単純共振のみを求めている。しかし、本題の不安定領域は結合共振も単純共振と同程度に重要であるために、文献1)の解析では不十分であることがわかる。

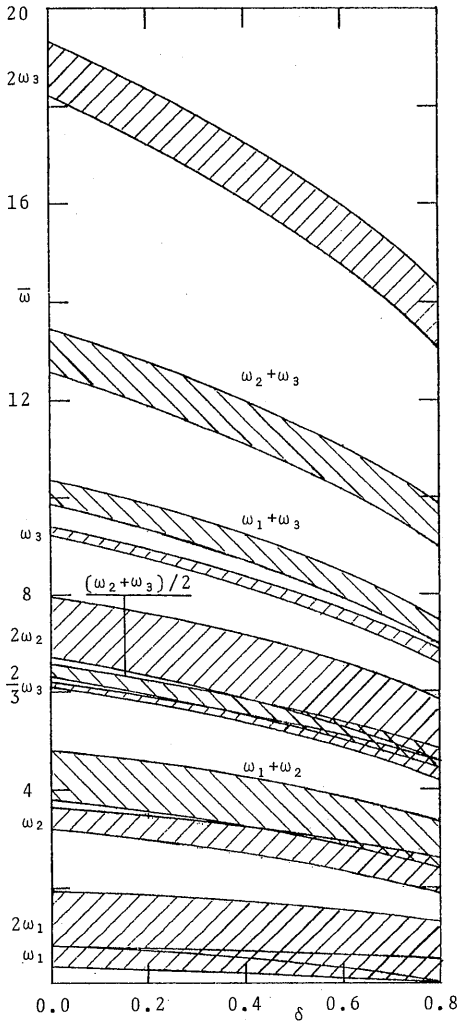


Fig. 7 Variation of unstable regions with thermal gradient δ : $\alpha^* = 2.0$, $\beta^* = 1.0$, $\alpha = 0.5$, and $x_e^* = 0.0$ and $x_s^* = 0.0$.

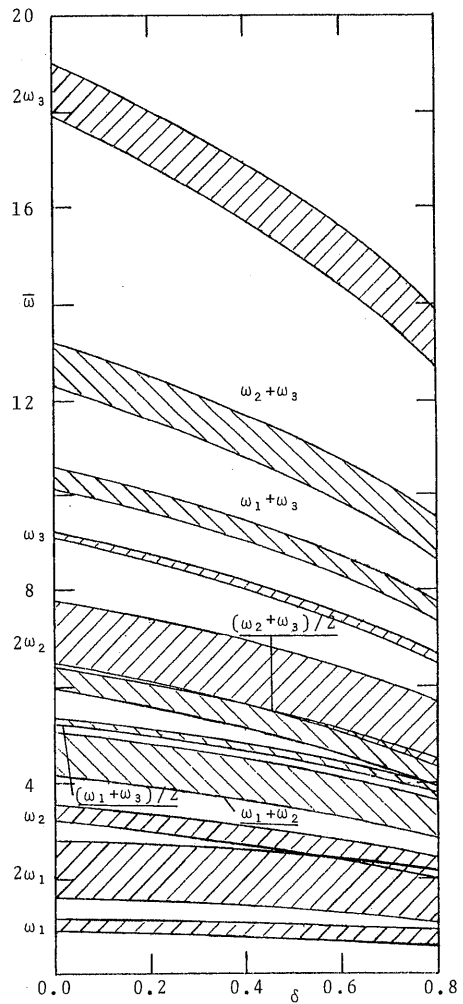


Fig. 8 Variation of unstable regions with thermal gradient δ : $\alpha^* = 2.0$, $\beta^* = 1.0$, $\alpha = 0.5$, and $x_e^* = 2.0$ and $x_s^* = 0.0$.

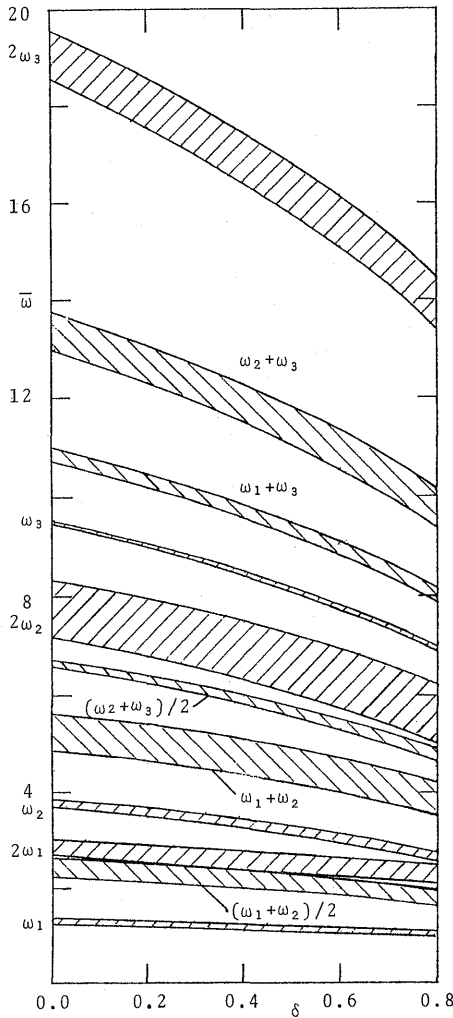


Fig. 9 Variation of unstable regions with thermal gradient δ : $\alpha^* = 2.0$, $\beta^* = 1.0$, $\alpha = 0.5$, and $\kappa_e^* = 2.0$ and $\kappa_s^* = 2.0$.

9. まとめ

本論文は、Pasternak基礎上の一様な温度勾配をもつ変断面片持ちばりが、変動軸方向力を受ける場合の動的安定性ならびに固有振動および座屈特性を明らかにした。本研究によって得られた結果をまとめると、

- (1) Pasternak基礎のバネおよびせん断層の剛性は、構造部材の固有振動数および座屈荷重を増大させる。また、温度勾配の増大による構造部材の剛性の低下を小さくする効果をもつ。
- (2) Pasternak基礎がある場合の変断面片持ちばりに

おいては、単純共振および結合共振の主不安定領域が支配的である。不安定領域は温度勾配の増大によってわずかに広がる。一方、Pasternak基礎のバネおよびせん断層は低次振動の不安定領域を狭くし、温度の影響を小さくする効果をもつ。

- (3) 既往の研究においては、解析上のミスや、項数の不足および不安定領域を求める解析が適切でないことが判明した。

最後に、本研究の数値計算には、長崎大学総合情報処理センターの電子計算機FACOM M-760/30を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) Kar, R. C. and Sujata, T.: Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient Resting on a Pasternak Foundation, Computers and Structures, Vol. 29, No. 4, pp. 591-599, 1988.
- 2) ボローチン: 弾性系の動的安定, コロナ社, 1972.
- 3) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257-262, 1982.
- 4) 高橋・其田・小西: 熱勾配をもつ先端弾性支持変断面片持ちばりの動的安定性, 長崎大学工学部研究報告, 第21巻, 第36号, pp. 35-41, 1991.

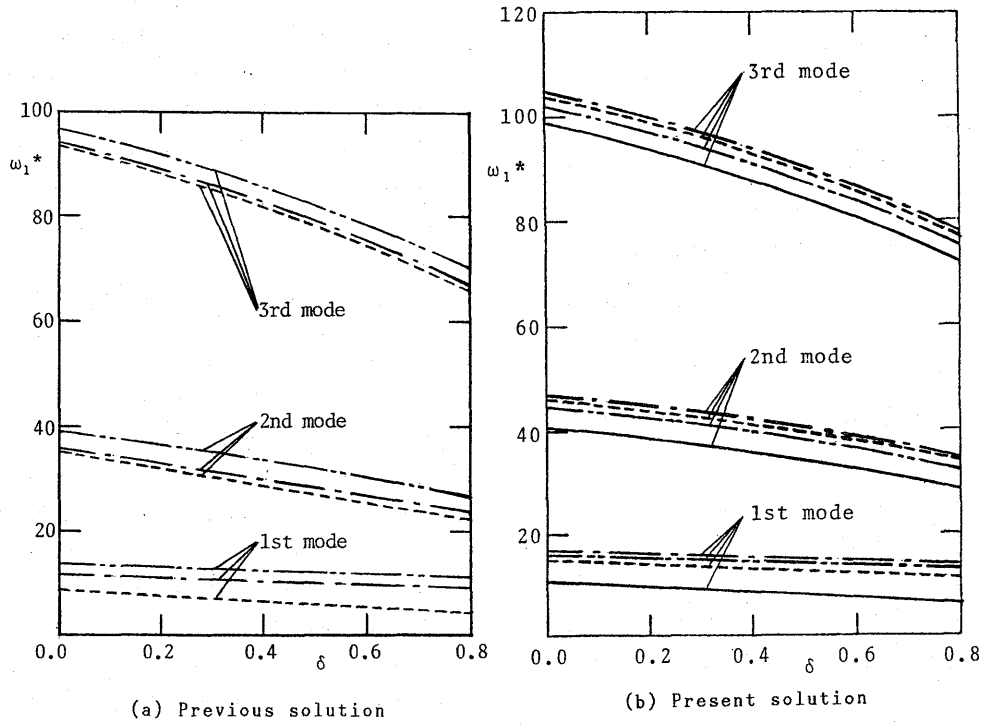


Fig. 10 Comparison of the present solution with the previous solution: $a^* = 2.0$ and $\beta^* = 1.0$