水平円管内層流強制対流熱伝達に及ぼす浮力の影響

茂地　徹*・川江信治*
金丸邦康**・山田　昭*

Effect of Buoyancy on Laminar Forced Convection Heat Transfer in a Horizontal Tube

by

Toru SHIGECHI*, Nobuji KAWAE*, Kuniyasu KANEMARU**
and Takashi YAMADA*

An analysis of the effect of buoyancy on a laminar forced convection heat transfer in a horizontal tube is presented. The heating condition is a uniform heat flux at the tube wall along the tube and around the circumference. The fluid flow is assumed to be hydrodynamically and thermally fully developed and the resulting partial differential equations are solved by the perturbation method.

The velocity, temperature and average Nusselt numbers obtained from the perturbation method are compared with available experimental data.

The comparison shows that the analytical perturbation solution, where the terms are taken up to a second order approximation, should be modified to satisfactorily represent the behaviors of velocity and temperature data.

The modified solutions for the velocity, temperature and average Nusselt numbers are also presented.

1．まえがき

管内層流強制対流を応用した熱交換器で，伝熱管が水平に設置されている増合には浮力の影響を考慮する必要がある．水平管は垂直管に比べて層流強制対流に及ぼす浮力の影響が顕著に現れ，熱交換器の効率の改良やより高精度の設計を手がけようとするときには，浮力の影響は重要となる．水平管内の浮力は自由対流を発生させるので，本研究では，水平管において層流強制・自由共存対流の熱伝達を流体力学的，熱的に十分発達したと仮定して理論的に解析した．

一般に熱と流れの問題には有限差分法などを用いた数値解析が広く行われているが，本研究のような３次元問題の場合，数値計算によって解を得るのは困難であり，また得られた解においても実験データの不足などにより解の妥当性や精度の判定が難しい．そこで本研究では，摂動法を用いて理論解析を行う．一般的に，摂動法は適用範囲が狭く計算が繁雑であるという欠点はあるが，摂動パラメータが小さい場合には十分正確な結果が得られるという利点がある．

強制・自由共存対流に関する摂動法を用いた研究は，Farisら[1]によって行われているが，その論文の提示式の係数には誤りが多く信頼性に欠けるので，本研究で正しい理論解を求めなおし，また得られた理論解とMoriら[2]の空気に関する実験値との比較を行いその理

平成３年９月30日受理
*機械システム工学科（Department of Mechanical Systems Engineering）
**共通講座・工学物理学（Applied Physics Laboratory）

論解の妥当性を検討する．本研究では摂動パラメータが2次の項までの解析を行う．厳密には，3次，4次……と高次の項まで計算することにより，より正確な理論解が得られるのだが，計算が複雑になり困難なため，今回はMoriら[2)]の実験値をもとに3次の項以降の補正を行った．

主要記号

Cp	定圧比熱	
D	管の直径（内径）	
g	重力加速度	
Gr	グラスホフ数	$g\beta(T_w-T_m)R^3/\nu^2$
Gr_z	軸方向の温度勾配に基づくグラスホフ数	$g\beta R^4(dT_m/dZ)/\nu^2$
$h(\phi)$	局所熱伝達係数	
k	熱伝導率	
L	加熱部分の長さ	
$\overline{Nu}$	平均ヌッセルト数	$\overline{h}R_i/k$
$Nu(\phi)$	局所ヌッセルト数	$h(\phi)R_i/k$
Nu_o	純粋な強制対流のヌッセルト数	
P	圧力	
p	無次元圧力	$P/\rho W_m^2$
Pe	ペクレ数	RePr
Pr	プラントル数	$\mu c_p/k$
Ra	レイレイ数	$PrGr_z$
R_i	管の内半径	
r	半径方向座標	
Re	レイノルズ数	W_mR_i/ν
T	流体温度	
U	半径方向の流速	
u	無次元半径方向速度	$U/A\varepsilon$
V	円周方向の流速	
v	無次元円周方向速度	$V/A\varepsilon$
W	管軸方向速度	
w	無次元管軸方向速度	W/W_m
Z	管軸方向座標	
z	無次元管軸方向座標	Z/L
α	熱拡散率	
β	体膨張係数	
Γ	無次元パラメータ	$PeGr_z/\sqrt{Re}$
γ	$\gamma=R_i^2(\partial P/\partial Z)/(\mu W_m)$	
ε	無次元パラメータ	$\varepsilon=\beta(T_w-T_m)$
η	無次元半径方向座標	$\eta=r/R_i$
θ	無次元温度	$(T_w-T)/T_w-T_m)$
μ	粘性係数	
ν	動粘性係数	
ρ	密度	
ϕ	管の頂点からの角度	
ψ	無次元流れ関数	

添字

0, 1, 2	第0，第1，第2次の摂動
c	中心
i	管壁
m	混合平均

2．理論解析

Fig. 1に示すように，重力場で水平に設置された円管内の強制対流熱伝達に及ぼす浮力（自由対流）の影響を円筒座標系(r, ϕ, Z)で解析する．流れの速度成分は，(U, V, W)である．解析に際して，次の仮定を設ける．

(1) 流れは非圧縮，定常層流で，流体力学的および熱的に十分発達している．

(2) 物性値は，運動方程式中の浮力の項にあらわれる密度を除いて，一定とする．

(3) 管軸方向の圧力こう配は一定とする．

(4) エネルギー式中の粘性散逸項は省略する．

以上の仮定は，従来の研究[1,3)]を参考にして設定された．

円管の壁面での加熱条件は熱流束一様とする（q_w = constant)．従って，管壁の表面温度は円周方向には一様であるが，管軸方向には直線的に変化する．

2．1　基礎式

上記の仮定と次の無次元量［式(1)］を用いて連続の式，運動方程式及びエネルギー式を表すと，式(2)〜(6)のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}\eta\equiv r/R,\ z\equiv Z/L,\ u\equiv U/(\varepsilon A),\\ v\equiv V/(\varepsilon A),\ w\equiv W/W_m,\\ p\equiv P/(\rho W_m^2),\ \theta\equiv(T_w-T)/(T_w-T_m)\end{array}\right\}\quad(1)$$

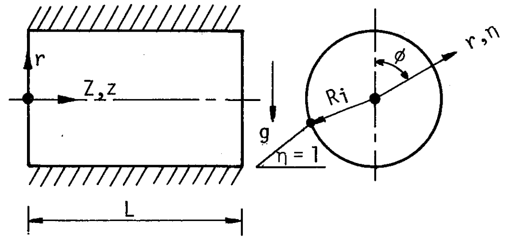

Fig. 1　Physical model and coordinate system.

ここに，$\varepsilon \equiv \beta(T_w - T_m)$，$A \equiv \sqrt{gR_l/\varepsilon}$であり，uとvの無次元化で採用された基準速度$\varepsilon A$は，自由対流の解析ではじめてOstrach[4]によって導入された．W_mは管断面にわたるWの平均速度である．

（連続の式）

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{u}{\eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial \phi}=0 \tag{2}$$

（運動方程式）

$$\frac{Gr}{Re^2}\left[u\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{v}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \phi}-\frac{v^2}{\eta}\right]=-\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{Gr}{Re^2\sqrt{Gr}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta u)\right)+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}-\frac{2}{\eta^2}\frac{\partial v}{\partial \phi}\right]-\frac{Gr}{Re^2}\theta\cos\phi \tag{3}$$

$$\frac{Gr}{Re^2}\left[u\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{v}{\eta}\frac{\partial v}{\partial \phi}+\frac{uv}{\eta}\right]=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\frac{Gr}{Re^2\sqrt{Gr}}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta v)\right)+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}+\frac{2}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right]+\frac{Gr}{Re^2}\theta\sin\phi \tag{4}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{v}{\eta}\frac{\partial w}{\partial \phi}=-\frac{\gamma}{\sqrt{Gr}}+\frac{1}{\sqrt{Gr}}\times\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right] \tag{5}$$

（エネルギー式）

$$u\frac{\partial \theta}{\partial \eta}+\frac{v}{\eta}\frac{\partial \theta}{\partial \phi}-\left(\frac{Gr_z}{Gr}\right)\frac{Re}{\sqrt{Gr}}w=\frac{1}{Pr\sqrt{Gr}}\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2}+\left(\frac{R_l}{L}\right)^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right] \tag{6}$$

境界条件は同様に，次式(7)，(8)で与えられる．

$$\eta=0:\quad u, v, w, \theta \text{は有限.} \tag{7}$$

$$\eta=1:\quad u=v=w=\theta=0 \tag{8}$$

2．2　解法

連続の式(2)を満足する流れ関数ψを次のように定義する．

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}=u,\quad -\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=v \qquad (9),\ (10)$$

式(9)のuと式(10)のvを式(3)〜(6)に代入し，式(3)と(4)から圧力pを消去すると，ψ,w,θに関する次式が得られる．

$$\frac{\sqrt{Gr}}{Re^2}\nabla^4\psi+\frac{1}{\eta}\frac{Gr}{Re^2}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \phi}-\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\nabla^2\psi=\frac{Gr}{Re^2}\left[\frac{1}{\eta}\cos\phi\frac{\partial \theta}{\partial \phi}+\sin\phi\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right] \tag{11}$$

$$\nabla^2 w+\frac{\sqrt{Gr}}{\eta}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \phi}-\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right]w-\gamma=0 \tag{12}$$

$$\nabla^2\theta+\frac{Pr\sqrt{Gr}}{\eta}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \phi}-\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\theta+\frac{Gr_zPrRe}{Gr^{3/2}}w=0 \tag{13}$$

なお，式(13)では，管軸方向の熱伝導項，式(6)の右辺カギ括弧の中の第３項は無視してある．

境界条件は，

$$\eta=0:\ w, \theta, \frac{1}{\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\ \text{は有限.} \tag{14}$$

$$\eta=1:\ w=\theta=\frac{\partial \psi}{\partial \phi}=\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=0 \tag{15}$$

となる．

式(11)〜(15)を，浮力の効果をあらわす(Gr/Re^2)を摂動パラメータとして採用する摂動法（Perturbation Method）で解析する．

従属変数ψ,w,θの摂動解を次のように仮定する．

$$\begin{cases}\psi=\psi_0+\left(\frac{Gr}{Re^2}\right)\psi_1+\left(\frac{Gr}{Re^2}\right)^2\psi_2+\cdots & (16)\\ w=w_0+\left(\frac{Gr}{Re^2}\right)w_1+\left(\frac{Gr}{Re^2}\right)^2 w_2+\cdots & (17)\\ \theta=\theta_0+\left(\frac{Gr}{Re^2}\right)\theta_1+\left(\frac{Gr}{Re^2}\right)^2\theta_2+\cdots & (18)\end{cases}$$

上式でψ_0, w_0, θ_0は純粋な強制対流$(Gr=0)$の場合の解で，次のように定まる．

$$\psi_0=0 \tag{19}$$

$$w_0=-\frac{\gamma}{4}(1-\eta^2) \tag{20}$$

$$\theta_0=\frac{Pe\cdot Gr_z}{Gr}\frac{1}{8}(\eta^4-4\eta^2+3) \tag{21}$$

w_0とθ_0は，式(16)〜(18)を式(11)〜(13)に代入し，第０次の摂動から定まる．なお，式(20)のγと式(21)の$(PeGr_z/Gr)$の値は，それぞれ，wとθの定義から，

$$\gamma=-8,\quad \frac{Pe\cdot Gr_z}{Gr}=\frac{48}{11}$$

となる．

次に，式(16)〜(18)を式(11)〜(13)に代入して，第２次の摂動解まで求めると，ψ, w, θが次のように得られる．

$$
\begin{aligned}
\phi =\ & \sqrt{\mathrm{Gr}}[4.34\times10^{-4}\Gamma(\eta^7-12\eta^5+21\eta^3-10\eta)\sin\phi+0.905\times10^{-7}\Gamma^2\{(0.00372\mathrm{Pr}+0.000372)\eta^{14}-(0.125\mathrm{Pr}\\
& +0.01786)\eta^{12}+(1.172\mathrm{Pr}+0.182)\eta^{10}-(5.417\mathrm{Pr}+1.042)\eta^8+(15.625\mathrm{Pr}+3.828)\eta^6-(19.085\mathrm{Pr}+5.173)\eta^4\\
& +(7.826\mathrm{Pr}+2.222)\eta^2\}\sin2\phi] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w} =\ & 2(1-\eta^2)+0.217\times10^{-4}\Gamma(-\eta^9+20\eta^7-70\eta^5+100\eta^3-49\eta)\cos\phi+0.942\times10^{-8}\Gamma^2(-24.69+122.5\eta^2\\
& -253.63\eta^4+282.33\eta^6-182.44\eta^8+68.5\eta^{10}-13.79\eta^{12}+1.245\eta^{14}-0.03125\eta^{16})+[0.942\times10^{-8}\Gamma^2(-2.907\eta^2\\
& +2.417\eta^4+7\eta^6-12.05\eta^8+7.083\eta^{10}-1.6643\eta^{12}+0.125\eta^{14}-0.00397\eta^{16})-0.181\times10^{-6}\Gamma^2\{(0.000059\mathrm{Pr}\\
& +0.0000059)\eta^{16}-(0.0026\mathrm{Pr}+0.000372)\eta^{14}+(0.03348\mathrm{Pr}+0.0052)\eta^{12}-(0.2257\mathrm{Pr}+0.0434)\eta^{10}+(1.042\mathrm{Pr}\\
& +0.2552)\eta^8-(2.3856\mathrm{Pr}+0.6467)\eta^6+(2.6086\mathrm{Pr}+0.7407)\eta^4-(1.06994\mathrm{Pr}+0.3107)\eta^2\}]\cos2\phi \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta =\ & (48/11)[0.125(\eta^4-4\eta^2+3)+0.181\times10^{-6}\Gamma\{(10\mathrm{Pr}+1)\eta^{11}-(210\mathrm{Pr}+30)\eta^9+(1125\mathrm{Pr}+175)\eta^7-(2600\\
& +500)\eta^5+(3000\mathrm{Pr}+735)\eta^3-(1325\mathrm{Pr}+381)\eta\}\cos\phi+0.785\times10^{-10}\mathrm{Pr}\Gamma^2\{(0.278\mathrm{Pr}+0.0278)\eta^{18}-(9.609\\
& +1.3125)\eta^{16}+(137.68\mathrm{Pr}+19.86)\eta^{14}-(858.75\mathrm{Pr}+135)\eta^{12}+(2996.25\mathrm{Pr}+535.5)\eta^{10}-(6448.44\mathrm{Pr}\\
& +1340.7)\eta^8+(8741.67\mathrm{Pr}+2083.92)\eta^6-(7228.125+1918.875)\eta^4+(3312.5\mathrm{Pr}+952.5)\eta^2-(643.4511\mathrm{Pr}\\
& +195.9265)\}-9.42\times10^{-9}\Gamma^2(-0.00009645\eta^{18}+0.00486\eta^{16}-0.0704\eta^{14}+0.4757\eta^{12}-1.8244\eta^{10}+4.41146\eta^8\\
& -7.045\eta^6+7.656\eta^4-6.173\eta^2+2.5649)+0.181\times10^{-6}\mathrm{Pr}\Gamma^2\{(0.000011626\mathrm{Pr}+0.0000011626)\eta^{18}\\
& -(0.00052556\mathrm{Pr}+0.00007234)\eta^{16}+(0.007406\mathrm{Pr}+0.001135)\eta^{14}-(0.05543\mathrm{Pr}+0.01004)\eta^{12}+(0.2756\mathrm{Pr}\\
& +0.06158)\eta^{10}-(0.8389\mathrm{Pr}+0.2138)\eta^8+(1.4374\mathrm{Pr}+0.3928)\eta^6-(1.3043\mathrm{Pr}+0.3703)\eta^4+(0.4788\mathrm{Pr}\\
& +0.1388)\eta^2\}\cos2\phi+0.785\times10^{-10}\mathrm{Pr}\Gamma^2\{(0.0625\mathrm{Pr}+0.00625)\eta^{18}-(2.262\mathrm{Pr}+0.262)\eta^{16}+(30.625\mathrm{Pr}\\
& +4.188)\eta^{14}-(175.929\mathrm{Pr}+25.286)\eta^{12}+(517.188\mathrm{Pr}+73.75)\eta^{10}-(806.25\mathrm{Pr}+96.45)\eta^8+(631.25\mathrm{Pr}\\
& +26.75)\eta^6-(181.25\mathrm{Pr}+54.25)\eta^4-(13.4345\mathrm{Pr}+36.946)\eta^2\}\cos2\phi-9.42\times10^{-9}\Gamma^2(-0.0000124\eta^{18}\\
& +0.000496\eta^{16}-0.008668\eta^{14}+0.0506\eta^{12}-0.12552\eta^{10}+0.11667\eta^8+0.075521\eta^6-0.24223\eta^4\\
& +0.13315\eta^2)\cos2\phi+0.181\times10^{-6}\Gamma^2\{(0.000000185\mathrm{Pr}+0.0000000185)\eta^{18}-(0.000010334\mathrm{Pr}\\
& +0.000001476)\eta^{16}+(0.0001744\mathrm{Pr}+0.0000271)\eta^{14}-(0.001612\mathrm{Pr}+0.00031)\eta^{12}+(0.01085\mathrm{Pr}\\
& +0.002658)\eta^{10}-(0.03976\mathrm{Pr}+0.01078)\eta^8+(0.081520\mathrm{Pr}+0.023147)\eta^6-(0.08916\mathrm{Pr}+0.02589)\eta^4\\
& +(0.038\mathrm{Pr}+0.01117)\eta^2\}\cos2\phi] \qquad (24)
\end{aligned}
$$

次に，局所ヌッセルト数Nu(ϕ)と平均ヌッセルト数$\overline{\mathrm{Nu}}$は，次のように計算される．

$$\mathrm{Nu}(\phi)\equiv\frac{\mathrm{h}(\phi)\mathrm{R_i}}{\mathrm{k}} \qquad (25)$$

ここに，$\mathrm{h}(\phi)\equiv-\dfrac{\mathrm{k}}{(\mathrm{T_w}-\mathrm{T_m})}\dfrac{\partial\mathrm{T}}{\partial\mathrm{r}}\Big|_{\mathrm{R_i}}$ であるから

$$\mathrm{Nu}(\phi)=-\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\Big|_{\eta=1} \qquad (26)$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Nu}(\phi)\mathrm{d}\phi \qquad (27)$$

となる．式(26)と(27)に，式(24)のθを代入し，純粋な強制対流(Gr = 0)の場合のヌッセルト数$\mathrm{Nu_0}$との比を計算すると次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Nu}(\phi)/\mathrm{Nu_0} =\ & 1.0-\Gamma(0.2787\times10^{-3}\mathrm{Pr}+0.10498\times10^{-3})\cos\phi+\Gamma^2(-17.7096\times10^{-10}\mathrm{Pr}^2+0.0622\times10^{-10}\mathrm{Pr}\\
& +40.4211\times10^{-9})+\Gamma^2(5.1660\times10^{-8}\mathrm{Pr}^2+2.6874\times10^{-8}\mathrm{Pr}+4.7575\times10^{-10})\cos2\phi \qquad (28)
\end{aligned}
$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}/\mathrm{Nu_0}=1.0+\Gamma^2(-17.7096\times10^{-10}\mathrm{Pr}^2+0.0622\times10^{-10}\mathrm{Pr}+40.4211\times10^{-9}) \qquad (29)$$

ここで，式(22)～(24)及び(28)，(29)にあらわれるΓは

$$\Gamma\equiv\mathrm{PeGr_z}/\sqrt{\mathrm{Re}} \qquad (30)$$

と定義されるもので，浮力の効果を示す一つの無次元パラメータである．

2．3　理論解の計算結果

Fig. 2～4 は空気(Pr = 0.72)を加熱した場合の自由対流の影響を示している．図中の実線は本研究における理論解の計算値（以下解析 I と記述する）であり，破線は後述する本研究における理論解の修正値（以下解析IIと記述する）を示したものである．

本研究で得られた解の適用範囲を正しく認識するこ

とは大変重要なことである．速度の式，温度の式の適用範囲はそれぞれ$(W_{0+1+2}-W_{0+1})<(W_{0+1}-W_0)$，$(T_{0+1+2}-T_{0+1})<(T_{0+1}-T_0)$が成り立つ範囲である．ここで沿字0, 1, 2は第0次摂動，第1次摂動，第2次摂動を表している．これによると今回の適用範囲は摂動パラメータΓが$\Gamma \leqq 3000$という結果になった．

Fig. 2は水平管の層流強制・自由共存対流における垂直平面($\phi=0$)の速度分布を摂動パラメータ$\Gamma=0$, 500, 1000, 1500の場合について表したものである．実線（解析Ⅰ）で示すように，$\Gamma=0$すなわち自由対流の影響がない純粋な強制対流の場合には，速度分布は放物線状となりポアゾイユ流れであることがわかる．またΓの値が変化してもWの最大値はあまり変わらず，Wの最大値のηの座標は$\Gamma=0$のとき$\eta=0$，$\Gamma=500$のとき$\eta=0.16$, $\Gamma=1000$のとき$\eta=0.3$, $\Gamma=1500$のとき$\eta=0.4$となり徐々に管中心より下方に移動している．これは加熱の場合，自然対流は浮力の影響により管壁付近では上方に，管中央付近では下方に流体が流れることを示唆している．

Fig. 3は水平管の層流強制・自由共存対流における垂直平面の温度分布をFig. 2と同様に摂動パラメータ$\Gamma=0, 500, 1000, 1500$の場合について表したものである．縦軸$\theta$は$\theta=(T_w-T)/(T_w-T_m)$で定義されているので$\theta$が最大のとき管内温度は最小である．解析Ⅰにおいては実線で示すように，Γの値を変化させてもθの最大値つまり管内温度の最小値はあまり変わらず，管内温度の最小値のη座標は$\Gamma=0$のとき$\eta=0$，$\Gamma=500$のとき$\eta=0.13$，$\Gamma=1000$のとき$\eta=0.29$，$\Gamma=1500$のとき$\eta=0.37$と徐々に管中心より下方に移動している．この傾向はFig. 2に示す解析Ⅰの速度分布と一致している．

Fig. 4は水平管の層流強制・自由共存対流における管断面の等温線を摂動パラメータ$\Gamma=1200$の場合について表したものである．図は左右対象であるため右半分を作画している．純粋な強制対流の場合には等温線は管中央を中心とした真円を描くが，実線で示した理論解から明らかなように，層流強制・自由共存対流の場合には浮力の影響で楕円となり，等温線が管底付近($\phi=180°$)で密になってくる傾向にあることがわかる．

2．4　理論解と実験値との比較

Fig. 5からFig. 7は水平管の層流強制・自然共存対流において，空気($Pr=0.72$)を加熱した場合について本研究の解析値をMoriらの理論解[3]及び彼らの実験値[2]と比較したものである．摂動パラメータΓの値はMoriらの研究[2),3)]に基づき$\Gamma=1200$とした．なお，図中に示す実線は本研究の解析Ⅰに基づく理論解，破線は後述する本研究の修正理論解（解析Ⅱ），一点鎖線はMoriらの理論解[3]をそれぞれ示し，さらに○印はMori

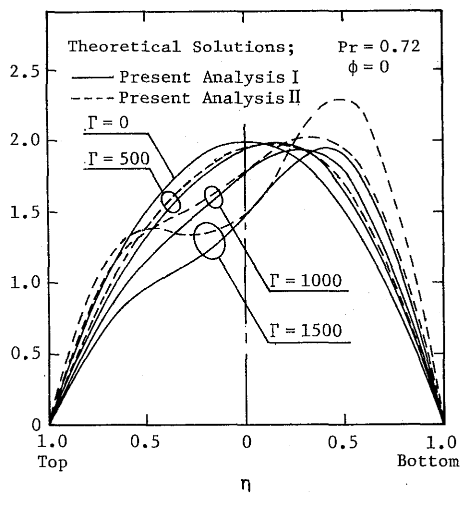

Fig. 2　Effect of the parameter Γ on the axial velocity distributions at $Pr=0.72$.
(solid line: 2nd order perturbation, dotted line: modified 2nd order perturbation)

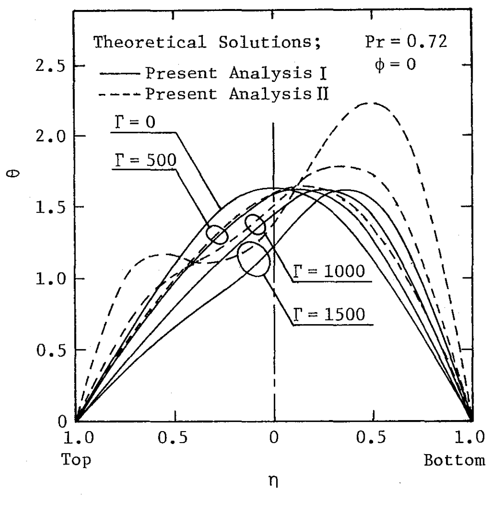

Fig. 3　Effect of the parameter Γ on the temperature distributions at $Pr=0.72$.
(solid line: 2nd order perturbation, dotted line: modified 2nd order perturbation)

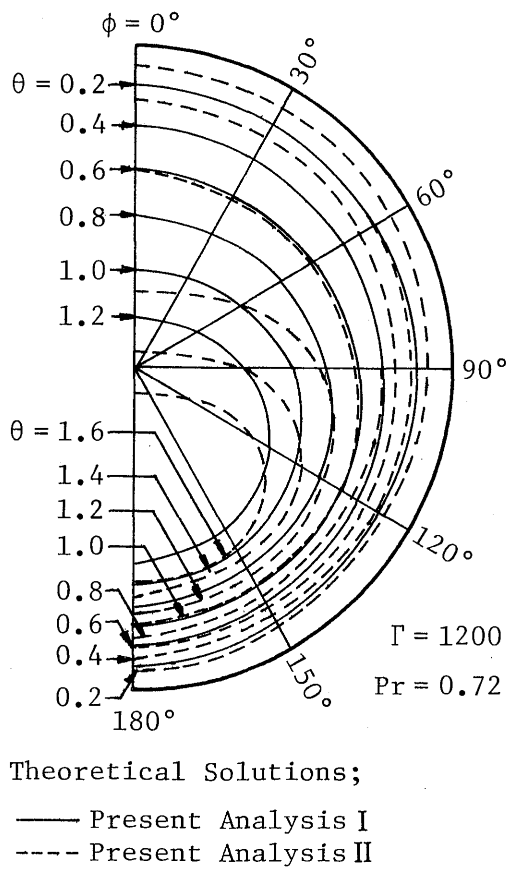

Fig. 4　Isotherms at the parameters, $\Gamma = 1200$ and $\mathrm{Pr} = 0.72$.
(solid line: 2nd order perturbation, dotted line: modified 2nd order perturbation)

らの実験値[2)]を示している．

Fig. 5 は管断面の速度分布を比較したものであり，縦軸をW/W_cとおいている．ここでW_cは中心軸流速度である．図から明らかなように，実線で示した本研究の解析 I に基づく理論解は実験値にかなり近いが管壁付近では差異がみられる．一方，一点鎖線で示したMoriらの理論解は直線で表されており実験値とはかなりの違いがある．

Fig. 6 は管断面の温度分布を比較したものである．縦軸を$(T_w-T)/(T_w-T_c)$とおいている．図から明らかなように，実線で示した本研究の解析 I に基づく理論解は管中心付近においては実験値に等しい．しかし，管壁付近では傾向は類似しているが，かなりの差異が生じている．一方，一点鎖線で示したMoriらの理論解はFig. 5 の速度分布と同様にほぼ直線的に表されており実験値とかなりの違いがある．

Fig. 7 は摂動パラメータΓに対して熱伝達に関するヌッセルト数の比$\overline{Nu}/Nu_0$を実験値と比較したものである．ここで，$\overline{Nu}$は本研究の理論解で得られた強制・自由共存対流の平均ヌッセルト数であり，Nu_0は純粋な強制対流のヌッセルト数である．実線で示した本研究の解析 I に基づく理論解は$\Gamma = 1000$までは$\overline{Nu}$とNu_0の比にほとんど変化がみられないが，$\Gamma = 3500$あたりから急に$\overline{Nu}$とNu_0の比が大きくなっている．一方，Moriらの実験値は摂動パラメータΓが約2000において$\overline{Nu}/Nu_0$の値は約1.5となっている．解析 I に基づく理論解は実験値にかなり近いが，この値は理論解では$\Gamma = 3000$のときであり，実験値に比べ約35%程小さい．

3．理論解の修正

前節において，本研究での解析 I に基づく理論解とMoriらの実験値[2)]を比較して速度分布や温度分布が管壁付近でかなりの違いがあること，またヌッセルト数においては実験値よりかなり小さくなっていることが明らかになった．この結果，解析 I では自由対流の影響が実際の自由対流の影響より小さく見積られている

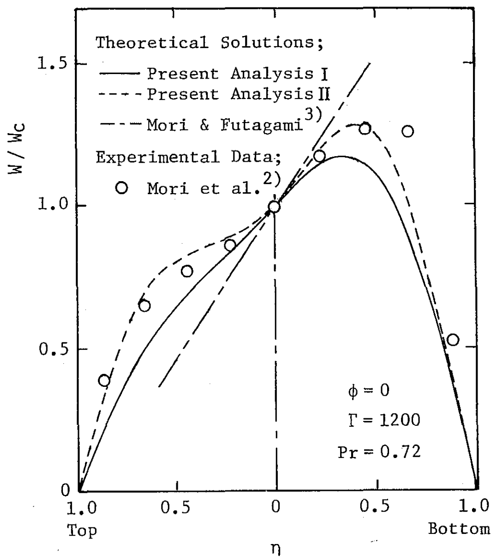

Fig. 5　Comparison of axial velocity distributions among our present analyses I and II, the other theoretical analysis and the experimental data.

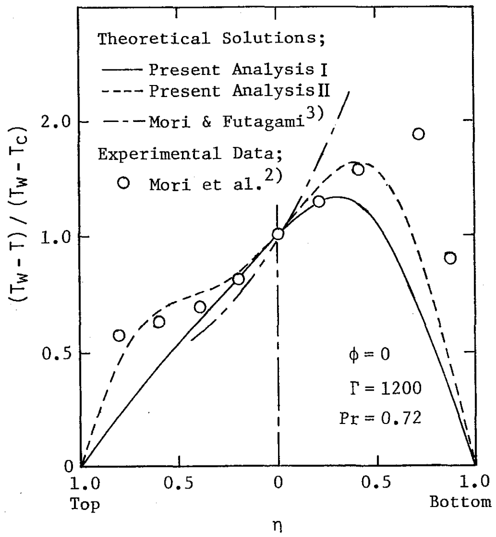

Fig. 6 Comparison of temperature distributions among our present analyses I and II, the other theoretical analysis and the experimental data.

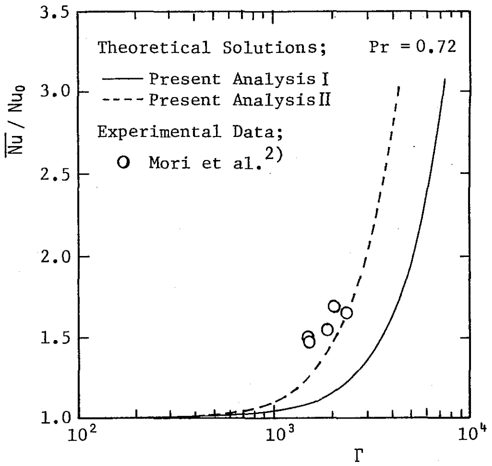

Fig. 7 Comparison of the ratio $\overline{Nu}/Nu_0$ between our present analyses I and II and the experimental data.

ことになる．これは前節の摂動法において摂動パラメータΓの3次，4次……の項を省略したためであると思われる．

実験値により近い正確な理論解を得て，強制・自由共存対流の熱伝達特性を明確にするためには，この省略している3次，4次……高次の項まで考慮して解析するのが最も理想的な方法である．しかし，計算が複雑となり困難なため今回は3次以降の補正をつぎのように行った．すなわち，まずψの式に注目し，ψのΓの項の最後の部分に，3次以降の項をおりこむ形を取り，ψのΓ^2の項のη^4, η^2の係数を変数としてWとθが実験値[2]により近い値となるように再計算するという手順である．しかし，Wとθが同時に実験値に近くなるような値が得られなかったため，θにおいてΓとΓ^2の項に重みをつけて，最終的にWとθの補正後の解，すなわち修正理論解（以下解析IIと記述する）を得た．

3．1　理論解の修正

式(22)〜(24)及び式(29)に示す流れ関数，速度分布，温度分布及びヌッセルト数などの理論解は先の補正方法のもとで，最終的に次のように修正された．

$$\psi = \sqrt{Gr}\,[4.34\times10^{-4}\Gamma(\eta^7-12\eta^5+21\eta^3-10\eta)\sin\phi+0.905\times10^{-7}\Gamma^2\{(0.00372Pr+0.000372)\eta^{14}-(0.125Pr+0.01786)\eta^{12}+(1.172Pr+0.182)\eta^{10}-(5.417Pr+1.042)\eta^8+(15.625Pr+3.828)\eta^6-(50.0Pr+13.676)\eta^4+(38.741Pr+10.725)\eta^2\}\sin2\phi] \tag{31}$$

$$w = 2(1-\eta)+0.217\times10^{-4}\Gamma(-\eta^9+20\eta^7-70\eta^5+100\eta^3-49\eta)\cos\phi+0.942\times10^{-8}\Gamma^2(-24.69+122.5\eta^2-253.63\eta^4+282.33\eta^6-182.44\eta^8+68.5\eta^{10}-13.79\eta^{12}+1.245\eta^{14}-0.03125\eta^{16})+[0.942\times10^{-8}\Gamma^2(-2.907\eta^2+2.417\eta^4+7\eta^6-12.05\eta^8+7.083\eta^{10}-1.6643\eta^{12}+0.125\eta^{14}-0.00397\eta^{16})-0.181\times10^{-6}\Gamma^2\{(0.000059Pr+0.0000059)\eta^{16}-(0.0026Pr+0.000372)\eta^{14}+(0.03348Pr+0.0052)\eta^{12}-(0.2257Pr+0.0434)\eta^{10}+(1.042Pr+0.2552)\eta^8-(6.25Pr+1.7095)\eta^6+(12.9137Pr+3.575)\eta^4-(7.511Pr+2.082)\eta^2\}]\cos2\phi \tag{32}$$

$$\theta = (48/11)[0.125(\eta^4-4\eta^2+3)+1.2\times0.181\times10^{-6}\Gamma\{(10Pr+1)\eta^{11}-(210Pr+30)\eta^9+(1125Pr+175)\eta^7-(2600+500)\eta^5+(3000Pr+735)\eta^3-(1325Pr+381)\eta\}\cos\phi+0.785\times10^{-10}Pr\Gamma^2\{(0.278Pr+0.0278)\eta^{18}-(9.609+1.3125)\eta^{16}+(137.68Pr+19.86)\eta^{14}-(858.75Pr+135)\eta^{12}+(2996.25Pr+535.5)\eta^{10}-(6448.44Pr+1510.7)\eta^8+(8741.67Pr+2083.92)\eta^6-(7228.125+1918.875)\eta^4+(3532.5Pr+1222.5)\eta^2-(843.4511Pr$$

$$+295.9265)\} - 1.87\times 9.42\times 10^{-9}\Gamma^2(-2.00009645\eta^{18}+0.01586\eta^{16}-4.0704\eta^{14}+1.4757\eta^{12}-1.8244\eta^{10}$$
$$+11.41146\eta^8-2.045\eta^6+8.656\eta^4-10.184\eta^2-1.4351)+0.181\times 10^{-6}\mathrm{Pr}\,\Gamma^2\{(0.000011626\mathrm{Pr}$$
$$+0.0000011626)\eta^{18}-(0.00052556\mathrm{Pr}+0.00007234)\eta^{16}+(0.007406\mathrm{Pr}+0.001135)\eta^{14}-(0.05543\mathrm{Pr}$$
$$+0.01004)\eta^{12}+(0.2756\mathrm{Pr}+0.06158)\eta^{10}-(0.8389\mathrm{Pr}+0.2138)\eta^8+(1.4374\mathrm{Pr}+0.3928)\eta^6-(1.3043\mathrm{Pr}$$
$$+0.3703)\eta^4+(0.4788\mathrm{Pr}+0.1388)\eta^2\}\cos 2\phi+0.785\times 10^{-10}\mathrm{Pr}\,\Gamma^2\{(0.0625\mathrm{Pr}+0.00625)\eta^{18}-(2.262\mathrm{Pr}$$
$$+0.262)\eta^{16}+(30.625\mathrm{Pr}+4.188)\eta^{14}-(175.929\mathrm{Pr}+25.286)\eta^{12}+(517.188\mathrm{Pr}+73.75)\eta^{10}-(806.25\mathrm{Pr}$$
$$+96.45)\eta^8+(631.25\mathrm{Pr}+26.75)\eta^6-(181.25\mathrm{Pr}+54.25)\eta^4-(13.4345\mathrm{Pr}+36.946)\eta^2\}\cos 2\phi-9.42\times$$
$$10^{-9}\Gamma(-0.0000124\eta^{18}+0.000496\eta^{16}-0.008668\eta^{14}+0.0506\eta^{12}-0.12552\eta^{10}+0.11667\eta^8+0.075521\eta^6$$
$$-0.24223\eta^4+0.13315\eta^2)\cos 2\phi+0.181\times 10^{-6}\Gamma^2\{(0.000000185\mathrm{Pr}+0.0000000185)\eta^{18}-(0.000010334\mathrm{Pr}$$
$$+0.000001476)\eta^{16}+(0.0001744\mathrm{Pr}+0.0000271)\eta^{14}-(0.001612\mathrm{Pr}+0.00031)\eta^{12}+(0.01085\mathrm{Pr}$$
$$+0.002658)\eta^{10}-(0.1042\mathrm{Pr}+0.02849)\eta^8+(0.4036\mathrm{Pr}+0.1117)\eta^6-(0.626\mathrm{Pr}+0.174)\eta^4+(0.3172\mathrm{Pr}$$
$$+0.08842)\eta^2\}\cos 2\phi] \tag{33}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}/\mathrm{Nu}_o = 1.0+\Gamma^2(4.573096\times 10^{-8}\mathrm{Pr}^2+1.28746\times 10^{-7}\mathrm{Pr}+3.6605\times 10^{-12}) \tag{34}$$

3．2　修正理論解の計算結果

Fig. 2～4 に示す破線は摂動法の摂動パラメータの３次以降の項を補正して行った修正理論解に基づく値を示している．

Fig. 2 の垂直平面の速度分布を参照すると，破線で示した本研究の解析IIに基づく修正理論解はΓの値の変化とともにWの最大値も徐々に大きくなり，Wの最大値のηの座標も$\Gamma = 0$のとき$\eta = 0$，$\Gamma = 1500$のとき$\eta = 0.47$と徐々に管中心より下方に移動していることがわかる．本研究の解析Ｉと解析IIの解を比較すると摂動パラメータΓが1000あたりから僅かな相違がみられ，$\Gamma = 1500$の時，顕著な違いが認められる．

Fig. 3 の垂直平面の温度分布を参照すると，破線で示した本研究の解析IIに基づく修正理論解はΓの値の変化とともに，θの最大値も徐々に大きくなり，θの最大値のηの座標は$\Gamma = 0$のとき$\eta = 0$，$\Gamma = 500$のとき$\eta = 0.13$，$\Gamma = 1000$のとき$\eta = 0.37$，$\Gamma = 1500$のとき$\eta = 0.49$と徐々に管中心より下方に移動していることがわかる．本研究の解析Ｉと解析IIの解を比較すると摂動パラメータΓが1000以上の時，顕著な違いが認められる．この傾向は速度分布の場合と同様である．

Fig. 4 の管断面の等温線を参照すると，破線で示した本研究の解析IIに基づく修正理論解は解析Ｉの理論解と比較してより歪んだ円となり，等温線が管底付近($\phi = 180°$)で解析Ｉの解よりさらに密になっており顕著な違いが認められる．また管中央の等温線にも僅かな違いがある．

3．3　修正理論解と実験値との比較

Fig. 5 から Fig. 7 に示す破線は本研究の解析IIに基づく修正理論解を示したものである．

Fig. 5 の速度分布より明かなように，本研究の解析Ｉに基づく理論解はMoriらの実験値[2)]（○印）と，管壁付近でかなりの差異があった．それに比べ，破線で示す解析IIの修正理論解は実験値と全体的にほぼ合致しており改善されていることがわかる．

Fig. 6 の温度分布より明かなように，本研究の解析Ｉに基づく理論解はMoriらの実験値[2)]（○印）と，管壁付近でかなりの差異があった．それに比べ，破線で示す解析IIの修正理論解は実験値と大体において合致している．しかし，管壁付近で僅かな差異が認められる．

Fig. 7 に示した熱伝達に関する$\overline{\mathrm{Nu}}/\mathrm{Nu}_o$の比と摂動パラメータ$\Gamma$の関係を参照すると，データの不足で比較し難いが，本研究の解析Ｉに基づく理論解はMoriらの実験値[2)]（○印）とかなりの相違があった．それに比べ，破線で示す本研究の解析IIに基づく$\overline{\mathrm{Nu}}/\mathrm{Nu}_o$の修正理論解は実験値より僅かに小さいだけで，解析Ｉの理論解よりかなりの改善が認められる．

4．むすび

水平管における層流強制・自由共存対流の熱伝達において流体力学的，熱的に十分発達したと仮定して，摂動法を用いて理論解析を行った．

今回は摂動パラメータが２次の項までの解析を行った．厳密には，３次，４次……と高次まで計算することにより，より正確な理論解が得られるが，計算が複雑になり困難なため，Moriらの実験値[2)]をもとに３次以降の補正を行った．その結果，これまでの研究で得られた理論解よりもより実験値に近い解を求めることができ，自由対流の影響を明確にした上で速度分布，温度分布，ヌッセルト数を図示して層流強制・自由共存対流の熱伝達特性を明らかにした．

本研究で得られた速度の式及び温度の式の適用範囲は摂動パラメータが$\Gamma \leqq 3000$のときである.

最後に，本研究の数値解析プログラムの作成にご協力頂いた，当時の大学院生高妻泰久君に感謝する.

参考文献

1）G. N. Faris and R. Viskanta ; Int. J. Heat Mass Transfer, 12, 10, (1969), 1295.
2）K. Mori, K. Futagami, S. Tokuda and M. Nakamura ; Int. J. Heat Mass Transfer, 9, 5, (1966), 453.
3）Y. Mori and K. Futagami ; Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 12, (1967), 1801.
4）S. Ostrach ; Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., 75, (1953), 1287.