

有限の水平上向き面上の膜状凝縮熱伝達の理論解析

茂地 徹* ・ 金丸 邦康**
山田 昭* ・ 時田 雄次***

An Analysis of Film Condensation Heat Transfer on a Finite-Size Horizontal Plate Facing Upward

by

Toru SHIGECHI*, Kuniyasu KANEMARU**
Takashi YAMADA* and Yuji TOKITA***

An analysis has been made of two-dimensional, steady-state, laminar film condensation heat transfer on a finite-size horizontal plate facing upward in a stagnant saturated vapor, taking into account the effect of the plate edge. The boundary-layer equations for the condensate film on the plate are solved using an integral method. The effect of inclination angle of the vapor-liquid interface at the plate edge upon the thickness of condensate film and the heat transfer rate is examined for the solutions obtained. And the solution obtained under the condition of minimum condensate film thickness, which is shown to be equivalent to that at the inclination angle of 90 degrees, is presented in terms of the average Nusselt number.

1. まえがき

有限の水平上向き面上の定常膜状凝縮においては、冷却面は常に安定な凝縮液膜で覆われ、液膜内の液体は平板の中心部から端部へと流れてゆき、端部から流下することがこれまでの実験¹⁾で観察されている。このような有限の上向き水平面系の熱伝達係数を予測する場合に、傾斜面にも適用できるように修正された、体積力駆動対流に基づくヌッセルトの凝縮液膜理論²⁾を形式的に適用しても、平板に平行な方向(水平方向)の体積力が存在しないので対流熱伝達係数の大きさは零となり、ヌッセルトの理論から対流熱伝達係数(凝縮液膜厚さは有限であることが実験で観察されているから、実際には「ある有限値」をとると推定される)の大きさに関して有益な情報を得ることはできな

い。従って、有限の上向き水平面系に対して対流熱伝達係数の現実的な大きさを確定するためには、体積力駆動対流に基づいた凝縮液膜理論とは異なる観点から、流動・伝熱のメカニズムについて理論的検討を加える必要がある。

Leppert-Nimmo³⁾は、有限の平板に沿う凝縮液の流れは凝縮液膜の厚さの変化に起因して発生する静圧勾配によって駆動されると仮定して理論解析し、ヌッセルト数の理論解を求めた。しかし、その解は平板の中心と端部での凝縮液膜厚さの比 δ_L/δ_0 を未決定のまま含む不完全なものである。なお、彼らは実験データを整理するために、 $\delta_L/\delta_0 \leq 0.4$ の範囲でヌッセルト数の近似解を得ている。

本研究では、静止飽和蒸気中に置かれた有限の上向

平成4年9月30日受理

*機械システム工学科 (Department of Mechanical Systems Engineering)

**共通講座・工業物理学 (Applied Physics Laboratory)

***大分大学工学部 (Faculty of Engineering, Oita University)

き水平平板上の2次元定常層流膜状凝縮熱伝達を, Leppert-Nimmoと同様に液膜内の液体の流れは液膜厚さの変化に起因する静圧勾配によって駆動されると仮定して, 特に境界条件として平板の端部での気液界面の傾斜を考慮した理論解析をプロフィール法(境界層積分法)で行い, まず, 平板の端部での気液界面の傾斜角が凝縮液膜厚さと熱伝達に及ぼす影響を明らかにし, 次にその結果に基づいて熱伝達が最大となる場合のヌッセルト数の理論解を求めた結果について報告する。

主要記号

c_p	: 定圧比熱
g	: 重力加速度
Gr	: グラスホフ数, 式(31)
h	: 熱伝達係数
H	: 相変化数, 式(33)
H^*	: 修正相変化数, 式(32)
k_1, k_2	: 定数, 式(29), 式(30)
L	: 平板の半幅
ℓ	: 凝縮潜熱
Nu	: ヌッセルト数
P	: 圧力
Pr	: プラントル数
T	: 温度
T_s	: 飽和温度
T_w	: 表面温度
ΔT_s	: 温度差 = $T_s - T_w$
u, v	: (x, y) 方向の速度成分
u_x	: 代表速度
x, y	: 座標軸 (Fig. 1)
α	: 傾斜角
$\beta_1 \sim \beta_3$: 定数
γ_1, γ_2	: 定数
δ	: 凝縮液膜厚さ
δ_0	: 平板中心での凝縮液膜厚さ
δ_L	: 平板端部での凝縮液膜厚さ
λ	: 熱伝導率
μ	: 粘性係数
ν	: 動粘性係数
ρ	: 密度
添字	
L	: 液体 (凝縮液)
max	: 最大値
min	: 最小値
V	: 蒸気
x	: 局所値

— : 平均値

2. 理論解析

2.1 基礎式

Fig. 1に示すように, 温度 T_s の静止飽和蒸気中に置かれた幅 $2L$, 一様温度 T_w の水平上向き冷却面上での2次元定常膜状凝縮を考える。冷却面は平板中心で最大厚さを有する安定な凝縮液膜で覆われている。解析に際して次の仮定を設定する。

(1) 平板上の凝縮液膜は平滑気液界面を有する層流境界層とみなすことができる。

(2) 表面張力は無視できる。

(3) 物性値は一定である。

凝縮液膜に関する質量, 運動量およびエネルギーの保存則から次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_L \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P_L}{\partial x} + \mu_L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$0 = -\rho_L g - \frac{\partial P_L}{\partial y} \quad (3)$$

$$\rho_L c_{pL} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_L \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

境界条件:

$$y=0: u=v=0 \quad (5)$$

$$T = T_w \quad (6)$$

$$y=\delta: \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$P_L = P_V \quad (8)$$

$$T = T_s \quad (9)$$

$$\lambda_L \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s = \ell \rho_L \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \quad (10)$$

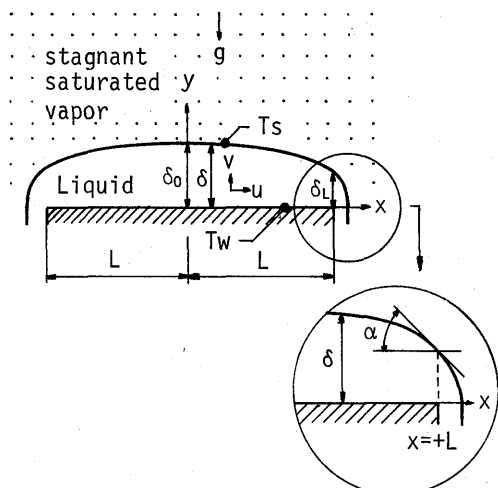


Fig. 1 Physical model and coordinate system

平板から遠く離れた攪乱されていない蒸気に関して、静圧は次式で表される。

$$-\rho_v g - \frac{dP_v}{dy} = 0 \quad (11)$$

式(3)と式(11)を式(8)の適合条件を介して組み合わせると、式(2)の右辺の凝縮液の平板に沿う静圧勾配は次のように得られる。

$$\frac{\partial P_L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^s (\rho_L - \rho_v) g dy \quad (12)$$

さらに、凝縮液と蒸気の密度は一定であるから、式(12)は次のように書かれる。

$$\frac{\partial P_L}{\partial x} = (\rho_L - \rho_v) g \frac{d\delta}{dx} \quad (13)$$

式(13)は、有限の平板に沿う凝縮液膜内の静圧勾配は液膜の流動方向の厚さ変化により確立されることを意味しており、静圧勾配が負となる、つまり凝縮液が平板の中心から端部へと流れるためには、液膜厚さは流動方向（ x の正の方向）に減少しなければならないことがわかる。式(13)を式(2)に代入すると、液膜の運動量の式は次のようになる。

$$\rho_L \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -(\rho_L - \rho_v) g \frac{d\delta}{dx} + \mu_L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14)$$

2.2 プロファイル法による理論解

式(14)と式(4)を、式(1)および関連する境界条件を用いてそれぞれ積分すると、次式のようになる。

$$\rho_L \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^s u^2 dy - u_s \frac{d}{dx} \int_0^s u dy \right\} + (\rho_L - \rho_v) g \delta \frac{d\delta}{dx} + \mu_L \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = 0 \quad (15)$$

$$\rho_L c_{pL} \frac{d}{dx} \int_0^s u \left\{ (T_s - T) + \frac{\ell}{c_{pL}} \right\} dy - \lambda_L \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 = 0 \quad (16)$$

次に液膜内の速度と温度のプロファイルを次のように仮定する。

$$u = u_x \varphi(\eta) \quad (17)$$

$$T_s - T = \Delta T_s \theta(\eta) \quad (18)$$

ここで、 u_x は x のみの関数で代表速度、 ΔT_s は飽和温度と表面温度の差を表し、 φ と θ は次式で定義される η のみの関数である。

$$\eta = y/\delta \quad (19)$$

式(17)と(18)を式(15)と(16)に代入し、 y を η に変換すると、 δ と u_x に関する次の連立常微分方程式を得る。

$$\beta_1 \frac{d(\delta u_x^2)}{dx} - \beta_2 \varphi(1) u_x \frac{d(\delta u_x)}{dx} + g \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_L} \right) \delta \frac{d\delta}{dx} + \gamma_1 \nu_L \frac{u_x}{\delta} = 0 \quad (20)$$

$$\left(\beta_3 + \beta_2 \frac{\ell}{c_{pL} \Delta T_s} \right) \frac{d(\delta u_x)}{dx} + \gamma_2 \frac{\lambda_L}{\rho_L c_{pL} \delta} = 0 \quad (21)$$

ここに、 β_1 、 β_2 、 β_3 、 γ_1 および γ_2 は数値定数で、それぞれ

次のように定義される。

$$\beta_1 \equiv \int_0^1 \varphi^2 d\eta \quad (22)$$

$$\beta_2 \equiv \int_0^1 \varphi d\eta \quad (23)$$

$$\beta_3 \equiv \int_0^1 \varphi \theta d\eta \quad (24)$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_0 \quad (25)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{d\theta}{d\eta} \Big|_0 \quad (26)$$

式(20)と(21)の微分方程式の初期条件は次のように与えられる。

$$x=0: \delta = \delta_0, u_x = 0 \quad (27)$$

式(20)、(21)および(27)の厳密解は、次のように得られる。

$$\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{k_1 Gr}{H^*(1+k_2 H^*)}} \left(\frac{\delta_0}{L} \right)^5 \int_{\delta_1/\delta_0}^1 F(\xi) d\xi \quad (28)$$

ここに、 δ_0 は後で決定される未定のパラメータで、 k_1 、 k_2 、 Gr （グラスホフ数）および H^* （修正相変化数）は、それぞれ、次のように定義される。

$$k_1 \equiv \frac{3\beta_2}{2\gamma_1(-\gamma_2)} \quad (29)$$

$$k_2 \equiv \frac{\{4 - 3\varphi(1)\beta_2/\beta_1\}\beta_1(-\gamma_2)}{3\beta_2\gamma_1} \quad (30)$$

$$Gr \equiv \frac{gL^3}{\nu_L^2} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_L} \right) \quad (31)$$

$$H^* \equiv \frac{H}{Pr_L(1 + (\beta_3/\beta_2)H)} \quad (32)$$

$$H \equiv \frac{c_{pL} \Delta T_s}{\ell} \quad (33)$$

式(28)の積分中の被積分関数 $F(\xi)$ は定数パラメータ ω を含む次の関数である。

$$F(\xi) = \frac{\xi^{3/2} (\xi^3 - \omega - \omega/3)}{\sqrt{1 - \xi^3 - \omega}} \quad (34)$$

$$\omega = \frac{\{2(-\gamma_2)\beta_1/(\gamma_1\beta_2)\}H^*}{1 + \left\{ 1 - \frac{\varphi(1)\beta_2}{2\beta_1} \right\} \left\{ \frac{2(-\gamma_2)\beta_1}{\gamma_1\beta_2} \right\} H^*} \quad (35)$$

式(28)から、次の表現が得られるので、

$$\frac{d\delta}{dx} = -\sqrt{\frac{H^*(1+k_2 H^*)}{k_1 Gr}} \left(\frac{L}{\delta_0} \right)^3 / F(\delta/\delta_0) \quad (36)$$

$$\frac{\delta_0}{L} = \left\{ \frac{H^*(1+k_2 H^*)}{k_1 Gr} \right\}^{1/5} / \left\{ \int_{\delta_1/\delta_0}^1 F(\xi) d\xi \right\}^{2/5} \quad (37)$$

式(28)は次式のように書くことができる。

$$\frac{x}{L} = \frac{\int_{\delta_1/\delta_0}^1 F(\xi) d\xi}{\int_{\delta_1/\delta_0}^1 F(\xi) d\xi} \quad (38)$$

次に平板中心での凝縮液膜厚さ δ_0 を定める必要がある。そのため、本研究では、平板端部での境界条件として次式を指定する。

$$\frac{d\delta}{dx} \Big|_{x=L} = -\tan \alpha \quad (39)$$

ここで、 α はFig. 1に示すように、平板端部で気液界面が水平面となす傾斜角で、 $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ とする。式(36)と(37)を式(39)に適用すると

$$\tan \alpha = \left\{ \frac{H^*(1+k_2H^*)}{k_1Gr} \right\}^{1/5} \left\{ \int_{\delta_L/\delta_0}^1 F(\xi) d\xi \right\}^{3/5} \times \frac{1}{F(\delta_L/\delta_0)} \quad (40)$$

となる。従って、 x/L と δ/L の関係が式(40)、(37)および(38)により完全に確定する。

熱伝達係数は、得られた液膜厚さ δ から次のように計算される。

局所値：

$$h_x \equiv \frac{\lambda_L}{\Delta T_s} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 = \frac{(-\gamma_2)\lambda_L}{\delta} \quad (41)$$

平均値：

$$\bar{h} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \frac{(-\gamma_2)\lambda_L}{L} \int_0^L \frac{1}{\delta} dx \quad (42)$$

また、平均ヌッセルト数 $\overline{Nu} = \bar{h} \cdot L/\lambda_L$ は次式で計算される。

$$\overline{Nu} = (-\gamma_2) \left\{ \frac{k_1Gr}{H^*(1+k_2H^*)} \right\}^{1/5} \frac{\int_{\delta_L/\delta_0}^1 \frac{F(\xi)}{\xi} d\xi}{\left\{ \int_{\delta_L/\delta_0}^1 F(\xi) d\xi \right\}^{3/5}} \quad (43)$$

2.3 最小液膜厚さの理論解

式(37)は無次元厚さ $\Delta_0 = \delta_0/L$ と $\Delta_L = \delta_L/L$ を導入すると次式のように書き直される。

$$\Delta_0 = \left\{ \frac{H^*(1+k_2H^*)}{k_1Gr} \right\}^{1/5} / \left\{ \int_{\Delta_L/\Delta_0}^1 F(\xi) d\xi \right\}^{2/5} \quad (44)$$

式(44)において、 Δ_0 は、付録で示されるように、 H^* の正の値に対して $\Delta_L = \Delta_{Lmin}$ で最小値 Δ_{0min} をとり、 Δ_{0min} と Δ_{Lmin} は、それぞれ、次のように定まる。

$$\frac{\Delta_{Lmin}}{\Delta_{0min}} = \left(\frac{\omega}{3} \right)^{\frac{1}{3-\omega}} \quad (45)$$

$$\Delta_{0min} = \left\{ \frac{H^*(1+k_2H^*)}{k_1Gr} \right\}^{1/5} / \left\{ \int_{(\frac{\omega}{3})^{1-\omega}}^1 F(\xi) d\xi \right\}^{2/5} \quad (46)$$

$$\Delta_{Lmin} = \left(\frac{\omega}{3} \right)^{\frac{1}{3-\omega}} \Delta_{0min} \quad (47)$$

液膜厚さが最小の場合には、平均ヌッセルト数は、後で示すように最大となり、次式で表される最大値 \overline{Nu}_{max} をとる。

$$\overline{Nu}_{max} = (-\gamma_2) \left\{ \frac{k_1Gr}{H^*(1+k_2H^*)} \right\}^{1/5} \times \frac{\int_{(\frac{\omega}{3})^{1-\omega}}^1 \frac{F(\xi)}{\xi} d\xi}{\left\{ \int_{(\frac{\omega}{3})^{1-\omega}}^1 F(\xi) d\xi \right\}^{3/5}} \quad (48)$$

さて、式(45)の条件を式(36)に適用すれば、次の関係が得られる。

$$\frac{d\delta}{dx} \Big|_{x=L} = -\infty \quad (49)$$

一方、式(39)で α を 90° に設定すると、上式が得られる。以上のことから、最小液膜厚さの条件 [式(45)] 下で得られる解は、平板端部での境界条件として α を 90° に設定して得られる解と同等であることがわかる。

3. 結果と考察

3.1 速度と温度のプロファイル

本解析では、液膜内の境界条件を満足する速度プロファイル φ と温度のプロファイル θ を次のように与えた。

$$\varphi(\eta) = 2\eta - \eta^2 \quad (50)$$

$$\theta(\eta) = 1 - \eta \quad (51)$$

これらのプロファイル関数から、数値定数が次のように定まる。

$$\beta_1 = 8/15, \beta_2 = 2/3, \beta_3 = 1/4$$

$$\gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$$

$$k_1 = 1/2, k_2 = 1/30$$

また、式(32)の修正相変化数 H^* と式(35)のパラメーター ω は次のように計算される。

$$H^* = \frac{H}{Pr_L \left(1 + \frac{3}{8} H \right)} \quad (52)$$

$$\omega = \frac{8}{3} \frac{H^*}{H^* + \frac{5}{3}} \quad (53)$$

3.2 平板端部での気液界面の傾斜角の影響

平板端部での気液界面の傾斜角 α が凝縮液膜厚さと平均ヌッセルト数に及ぼす影響をFig. 2(a)と2(b)に示す。縦軸の δ/L の高さは $\alpha=90^\circ$ の場合に最も小さくなり、 $x/L=1$ の近傍を除けば α が 10° まで減少して

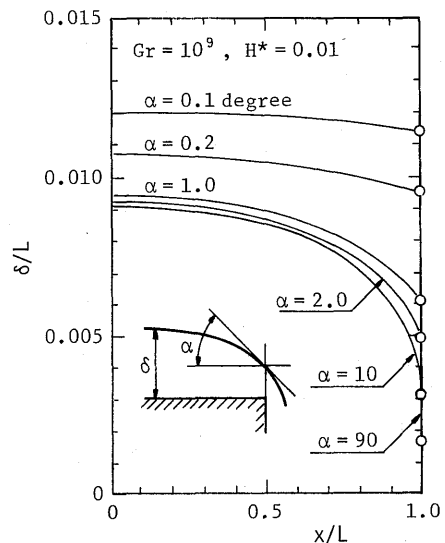


Fig. 2(a) Effect of α on condensate film thickness

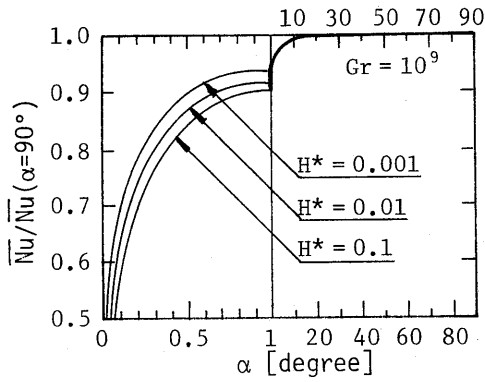


Fig. 2(b) Relationship between $\overline{Nu}/\overline{Nu}(\alpha=90^\circ)$ and α

もほとんど増加しない。αがさらに1°まで減少するにつれて、δ/Lの大きさは急に増大し、Fig. 2(a)にみられるように、液膜の形状は平坦になっていく。ヌッセルト数の比 $\overline{Nu}/\overline{Nu}(\alpha=90^\circ)$ と α の関係をFig. 2(b)に示す。Fig. 2(a)で示される液膜の大きさから予測されるように、ヌッセルト数の比は α=90° で最大値をとり、α=1° と α=0° の間で急激に減少する。従って、液膜厚さと熱伝達に及ぼす α の影響は、α が非常に小さい場合、特に、α=1° と α=0° の間で顕著に現れ、α が10°以

上の場合には、実際上無視することができる。このことは、最小液膜厚さの解、つまり境界条件が α=90° の場合の解は、平板端部で気液界面が水平に近い場合 (α ≤ 1°) を除けば、α の広い範囲で有効であることを示唆している。

3.3 最小液膜厚さの理論解

Fig. 3(a)と3(b)に、大気圧の飽和水蒸気に対する最小液膜厚さ δ_{min} の分布と最大平均熱伝達係数 \overline{h}_{max} の計算例を示す。液膜厚さ δ_{min} は平板中心で最大値をとり、幅 2L または温度差 ΔTs が増加するにつれて厚くなるが、熱伝達係数 \overline{h}_{max} はその逆の傾向を示す。また、Fig. 4から、液膜厚さの比 (δ/δ₀)_{min} の分布は 0 < H* ≤ 0.1 の範囲で x 方向に相似であることがわかる。

熱伝達に関する式(48)の数値計算結果をFig. 5に示す。図中の実線で示される厳密解は、0 < H* ≤ 0.1 の範囲に対して、±0.5%の精度で、次式で近似することができる。

$$\overline{Nu}_{max} = 0.821(1 + 6.23H^*)^{-1/8}(Gr/H^*)^{1/5} \quad (54)$$

ちなみに、運動量の式(4)で慣性項を無視すると、次式の解が得られる。

$$\overline{Nu}_{max} = 0.821(Gr/H^*)^{1/5} \quad (55)$$

この式はNimmo-Leppert¹⁾が (δ_l/δ₀) ≤ 0.4 の範囲で

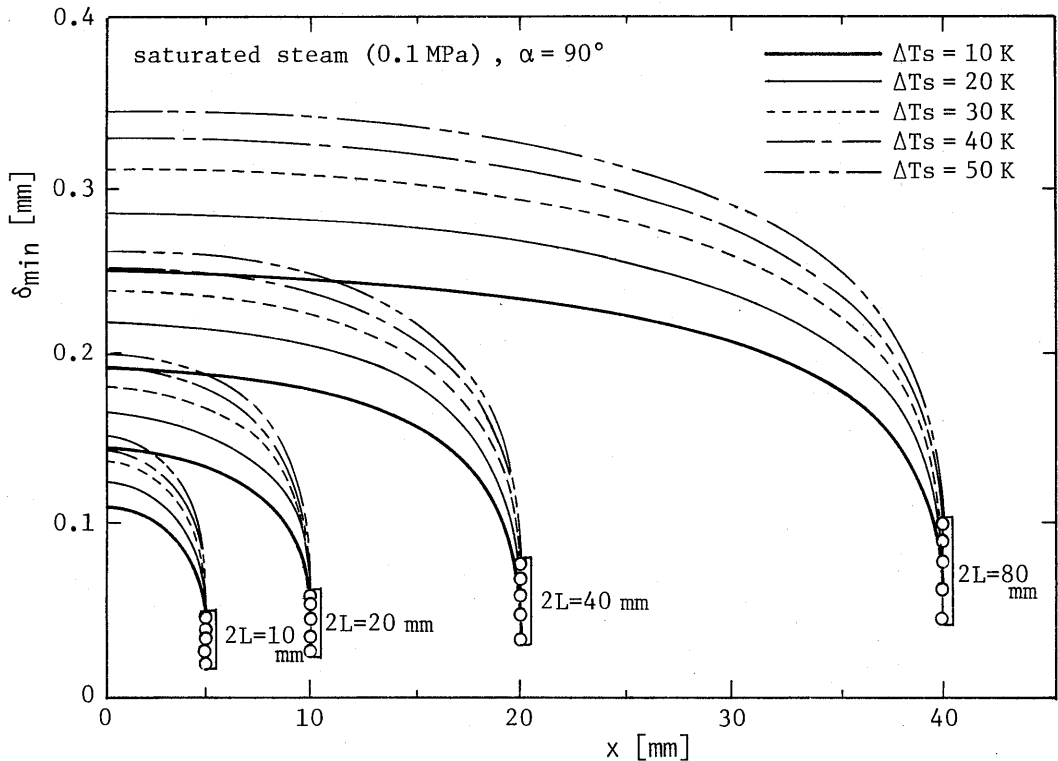


Fig. 3(a) Distributions of condensate film thickness

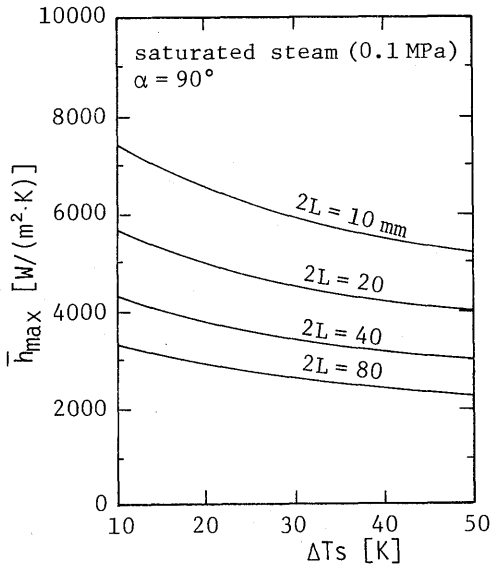


Fig. 3(b) Average heat transfer coefficients

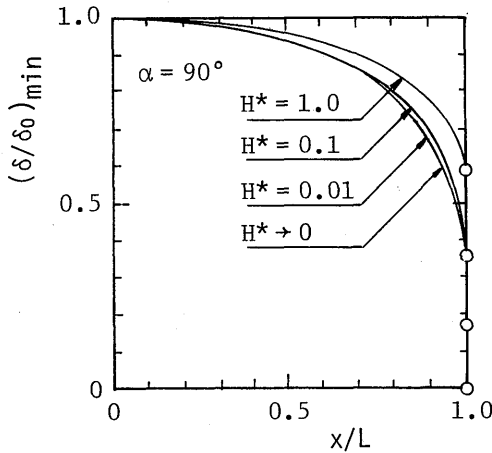


Fig. 4 Relationship between $(\delta/\delta_0)_{\min}$ and (x/L)

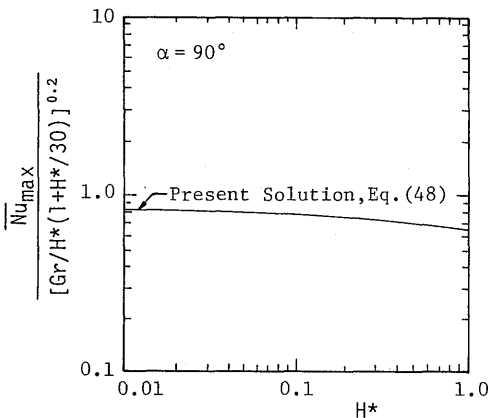


Fig. 5 Average Nusselt Number

提案した近似式と一致する。

4. むすび

静止飽和蒸気中に置かれた有限の上向き水平平板上の層流膜状凝縮熱伝達を、平板の端部の効果を考慮するため境界条件として平板の端部での気液界面の傾斜角を導入して理論的に解析した。その結果、最大熱伝達は平板端部で気液界面の傾斜角が90°に等しい場合に得られることが明らかとなった。さらに、その最大ヌセルト数の精度よい近似式を提案した。

参考文献

- 1) B. Nimmo and G. Leppert; Heat Transfer 1970, Elsevier Pub., 6, No. Cs2, 2, (1970).
- 2) W. Nusselt, Zeits; VDI, 60, 541-569, (1916).
- 3) G. Leppert and B. Nimmo; Trans. ASME, J. Heat Transfer, 90, 178-179, (1968).

付録 液膜厚さ Δ_0 の最小値の存在について

本研究で採用された式(50)の速度分布と式(51)の温度分布に基づいて計算された式(44)の Δ_0 と Δ_L の間の関係をFig. A1に示す。図から明らかなように、 Δ_0 は正の H^* の値に対して常に最小値を有する。

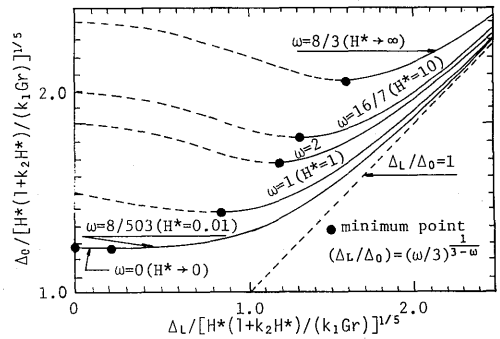


Fig. A1 Relationship between Δ_0 and Δ_L , Eq. (44)