偏平ケーブルに現われる1/2分数調波共振とカオス的挙動の解析

高橋和雄*・町田健一郎**
松野進**・入江省造***

1/2 Subharmonic Resonance and Chaotic Behaviors in a Cable Subjected to a In-plane Harmonic Excitation

by
Kazuo TAKAHASHI*, Ken-ichiro MACHIDA**,
Susumu MATSUNO** and Syozo IRIE***

1/2 subharmonic resonance and chaotic motions near the 1/2 subharmonic resonance of a horizontal cable subjected to uniformly distributed sinusoidally time- varying load are presented. The problem is solved by a Galerkin method to obtain one ordinary differential equation for time variable.

1/2 subharmonic resonances are solved by the harmonic balance method. Chaotic motions are analyzed by Runge-Kutta-Gill method.

1/2 subharmonic resonances of cables with various sag-to span ratios are shown and chaotic motions are shown for the particular sag-to-span ratio.

1．まえがき

これまで，力学や数学の分野で研究が行われてきた“カオス”と言われる現象が，近年，工学の分野でも関心を集め，電気工学や機械工学を中心に研究が進んでいる[1]．構造物の非線形振動においても，研究が行なわれるようになってきているが，引張材として使用されるケーブルにカオス的挙動が存在することがわかっている[2) 3)]．

ケーブルの運動方程式は，2次と3次の非線形項をもつため[4]，分岐型の応答の1つである分数調波共振においては，1/3分数調波共振だけでなく，1/2分数調波共振も卓越することが予想される．

ケーブルが，周期的変動荷重を受ける場合，1/2分数調波共振の周辺には，カオス的振動が発生するということを，Regaら[2) 3)]がはじめて明らかにしている．

ケーブルの非線形振動特性はきわめて複雑であるためその非線形動的解析をしておくことが必要である[5]．

本研究では，サグ比1/8以下の偏平ケーブルに周期的等分布荷重が作用する場合を対象に，1自由度振動系にモデル化した運動方程式を取り扱う．まず，運動方程式にGalerkin法を適用して，常微分方程式に変換した後，解析的手法として，非線形項が大きな場合にも有効性を失わないFourier級数解析法にもとづく調和バランス法を用いた解析を行う[5]．次いでサグ比をパラメーターに1/2分数調波共振を明らかにする．カオス的応答に対しては，従来の解析的手法では対応できないため，計算機を使用した数値シミュレーションを行なう．このため，微分方程式の直接数値積分法として，Runge-Kutta-Gill法を用いた時間応答解析を行う．数値解析において主調波共振および1/2分数

平成4年9月30日受理
*社会開発工学科（Department of Civil Engineering）
**大学院修士課程土木工学専攻（Graduate Student, Department of Civil Engineering）
***長崎県土地開発公社（Nagasaki Prefectural Land Development Corporation）

調波共振の解析解との比較を行い，次に解析解との比較と，荷重強度をパラメーターとして，カオス的応答の発生について数値的検討する．

2．運動方程式

Fig. 1に示すような偏平ケーブルが周期的変動荷重 $p_0 \cos \Omega t$ を受ける場合の運動方程式は，Irvineの成書[6]から次式のように与えられる．

$$L(w)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{8f}{\ell^2}h-(H_e+h)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=p_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

$$h=\frac{EA}{L_e}\left\{\frac{8f}{\ell^2}\int_0^\ell w dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right\}$$

ここに，w：面内鉛直たわみ，t：時間，m：ケーブルの単位長さあたりの質量，f：ケーブルサグ，ℓ：ケーブルスパン長，h：付加水平張力，E：ヤング率，A：断面積，$L_e=\ell(1+8f^2/\ell^2)$：ケーブル長，H_e：初期水平張力，p_0：荷重強度，Ω：外力の円振動数

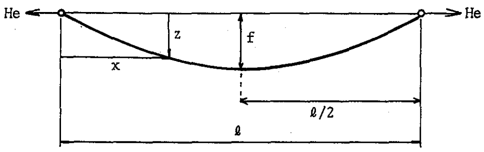


Fig. 1　Geometry and coodinate system.

3．解　　法

(1)　常微分方程式への変換[4) 7)]

式(1)の解を1自由度系モデルで，次の変数分離形に仮定する．

$$w=\ell T(t)W(x) \quad (2)$$

ここに，T(t)：未知の時間関数，W(x)：境界条件を満足する座標関数

本研究ではケーブルの非線形特性を明らかにするため，弦とは異なる固有振動形をもつ対称振動に焦点を絞って以下の解析を行なう．上式の座標関数Wとして，基準化した自由振動の面内対称モードを用いる[6]．

$$W(x)=\left(1-\tan\frac{\pi\omega_1}{2}\sin\pi\omega_1\xi-\cos\pi\omega_1\xi\right)/W\max \quad (3)$$

ここに，$\xi=x/\ell$，$\omega_1=n_1/\pi n_0$：第1次の無次元固有円振動数，$n_0=\sqrt{H_e\pi^2/m\ell^2}$：弦の1次の固有円振動数，$n_1$：ケーブルの第1次の固有円振動数，W max：最大値

上式の ω_1 は次の超越方程式の第1次の根で与えられる[6]．

$$\tan\frac{\pi\omega_1}{2}=\frac{\pi\omega_1}{2}-\frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi\omega_1}{2}\right)^3 \quad (4)$$

ここに $\lambda^2=64\gamma^2k^2/(1+8\gamma^2)$，$\gamma=f/\ell$：サグ比，$k=\sqrt{EA/H_e}$：縦波－横波伝播速度比

式(2)は，式(1)の厳密解ではない．そこでGalerkin法を適用し，さらに粘性減衰力を考慮すると，次式が得られる．

$$\ddot{T}+2h\omega_1\dot{T}+\omega_1^2T+C_2T^2+C_3T^3=\bar{p}_0\cos\bar{\omega}\tau \quad (5)$$

ここに，$C_2=12\gamma I_bI_cI_d$，$C_3=I_b^2I_d/2$，$\bar{p}_0=p_0\ell I_c/H_eI_a\pi^2$，$I_d=k^2/(1+8\gamma^2)I_a\pi^2$，$I_a=\int_0^1 W^2 d\xi$，$I_b=\int_0^1 W'^2 d\xi$，$I_c=\int_0^1 W d\xi$，h：減数定数，$\tau=n_0t$，$\bar{\omega}=\Omega/n_0$

(2)　1/2分数調波共振

1/2分数調波共振を求めるために，式(5)の解を次式のように仮定する．

$$T=\frac{c_0}{2}+c_{1/2}\cos\frac{\bar{\omega}\tau}{2}+s_{1/2}\sin\frac{\bar{\omega}\tau}{2}+c_1\cos\bar{\omega}\tau+s_1\sin\bar{\omega}\tau \quad (6)$$

ここに，c_0，c_1，s_1：付随調波成分，$c_{1/2}$，$s_{1/2}$：分岐調波成分

式(6)を式(5)に代入して，調和バランス法を適用すれば，次の未定定数を求める連立非線形代数方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{c_0}{2}\omega_1^2+\frac{C_2}{2}\left(\frac{c_0^2}{2}+c_{1/2}^2+s_{1/2}^2+c_1^2+s_1^2\right)+\frac{3}{4}C_3\left(\frac{c_0^2}{6}+c_0c_{1/2}^2-s_{1/2}^2c_1+c_{1/2}^2c_1+c_0s_{1/2}^2+c_0c_1^2+c_0s_1^2+2c_{1/2}s_{1/2}s_1\right)=0\\
&\left(\omega_1^2-\frac{\bar{\omega}^2}{4}\right)c_{1/2}+\bar{\omega}h\omega_1s_{1/2}+C_2(c_0c_{1/2}+c_{1/2}c_1+s_{1/2}s_1)+\frac{3}{4}C_3(c_0^2c_{1/2}+c_{1/2}^3+2c_0c_{1/2}c_1+c_{1/2}s_{1/2}^2+2c_{1/2}c_1^2+2c_{1/2}s_1^2+2c_0s_{1/2}s_1)=0\\
&\left(\omega_1^2-\frac{\bar{\omega}^2}{4}\right)s_{1/2}-\bar{\omega}h\omega_1c_{1/2}+C_2(c_0c_{1/2}+c_{1/2}c_1-s_{1/2}c_1)+\frac{3}{4}C_3(c_0^2s_{1/2}+s_{1/2}^3-2c_0s_{1/2}c_1+s_{1/2}c_{1/2}^2+2s_{1/2}c_1^2+2s_{1/2}s_1^2+2c_0c_{1/2}s_1)=0 \quad (7)\\
&(\omega_1^2-\bar{\omega}^2)c_1+2\bar{\omega}h\omega_1s_1+\frac{C_2}{2}(2c_0c_1+c_{1/2}^2-s_{1/2}^2)+\frac{3}{4}C_3(c_0^2c_1+c_1^3-c_0s_{1/2}^2+2s_{1/2}^2c_1+2c_{1/2}^2c_1+c_1s_1^2+c_0c_{1/2}^2)=\bar{p}_0
\end{aligned}$$

$$(\omega_1^2-\bar{\omega}^2)s_1-2\bar{\omega}h\omega_1c_1+C_2(c_0s_1+c_{1/2}s_{1/2})+\frac{3}{4}C_3(c_0^2s_1+s_1^3+2c_{1/2}^2s_1+2s_{1/2}^2s_1+c_1^2s_1+2c_0c_{1/2}s_{1/2})=0$$

式(7)に Newton-Raphson 法を用い，適当な初期値のもとに解けば，必要な解が得られる．

また，式(6)は次式のようにも書ける．

$$T=c_0/2+A_{1/2}\cos(\bar{\omega}\tau/2-\phi_{1/2})+A_1\cos(\bar{\omega}\tau-\phi_1) \quad (8)$$

ここに，$A_{1/2}=\sqrt{c_{1/2}^2+s_{1/2}^2}$：分岐応答成分，$A_1=\sqrt{c_1^2+s_1^2}$：付随応答成分，$\phi_{1/2}=\tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$，$\phi_1=\tan^{-1}(s_1/c_1)$，$\phi_{1/2}$，$\phi_1$：位相差

(3)　時間応答解析

一方，式(5)は $T=P_1$，$\dot{T}=P_2$ とおくと，次の2元連立の1階常微分方程式となる．

$$\dot{P}_1=P_2$$
$$\dot{P}_2=-2h\omega_1P_2-\omega_1^2P_1-C_2P_1^2-C_3P_1^3+\bar{p}_0\cos\bar{\omega}\tau \quad (9)$$

これに，Runge-Kutta-Gill 法を適用して直接数値積分すれば，時間応答が求められる．

4．ケーブルの固有振動特性

ケーブルの動特性を支配するパラメーターはサグ比 γ と縦波ー横波伝播速度比 k の2つである．これまでの研究によるとサグ比 γ によってケーブルの対称振動の固有振動形は弦の場合と異なって，1段高次の振動形（1次→3次，3次→5次）と遷移することが知られている[6]．また，遷移を起こすサグ比は縦波ー横波伝播速度比 k によって異なることが明らかになっている．ケーブルは，サグをもつために，式(5)に示すように2次と3次の非線形項が存在する．2次の非線形項はケーブルのサグによって存在する非対称な復元力特性をもつ．2次の非線形項はケーブルの剛性を減少させる軟化バネ特性を示す．これに対して3次の非線形項はケーブルの弾性伸びに起因する．この非線形項はケーブルの剛性を増大させる効果をもつ．これらの非線形項はケーブルのサグ比によって著しく異なる．2次の非線形項は特定のサグ比に最大値をもつ[4]．3次の非線形項はケーブルの固有振動形の変化に伴って弦の1段高次の値になる[4]．したがって，ケーブルの非線形振動特性は，ケーブルのサグ比および応答振幅によって複雑に変化することが予想される[5]．

5．調和バランス法による1/2分数調波共振特性

$\gamma=0.005$，0.02，0.05の3種のケーブル（k=30，h=0.0）の主調波応答と1/2分数調波応答を Fig. 2〜4 に示す．

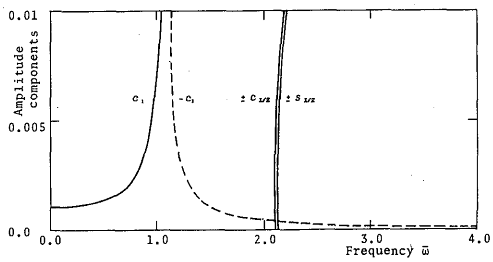


Fig. 2　Resonance curves of the harmonic and 1/2 subharmonic resonances: k=30 and γ=0.005.

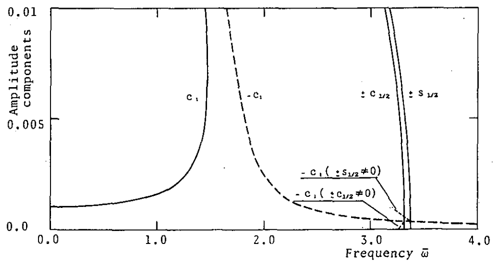


Fig. 3　Resonance curves of the harmonic and 1/2 subharmonic resonances: k=30 and γ=0.02.

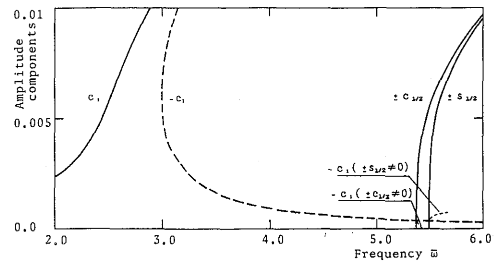


Fig. 4　Resonance curves of the harmonic and 1/2 subharmonic resonances: k=30 and γ=0.05.

これらの図において，縦軸は，スパン長 ℓ で無次元化した振幅成分で，横軸は，弦の1次の固有振動数で無次元化した無次元加振振動数 $\bar{\omega}=\Omega/n_0$ である．荷重強度 $\bar{p}_0$ は，静的応答（$\bar{\omega}=0.0$）が1/1000になるように調整してある．

主調波応答 c_1 は，あらゆる振動数領域で生じ，実線が外力と同位相，破線が逆位相の応答を示す．1/2分数調波応答 $c_{1/2}$，$s_{1/2}$ は，固有振動数の2倍の振動数領域で生じ，サグ比によって，その特性や発生領域が異なる．分数調波共振は，文献4）の Fig. 3, 4 に示した非線形項の係数とサグ比との関係から，サグ比 γ=0.02の場合に，2次の非線形項が支配的な軟化バネ特

性を示し，γ=0.005 および 0.05 の場合，3 次の非線形項が支配的な硬化バネ特性を示す．また，1/2 分数調波共振の発生領域は 2 次の非線形項の影響を受け，サグ比 γ=0.02 の近傍で最も大きくなる．なお，1/2 分数調波共振の位相は，主調波応答と同位相もしくは逆位相である．

6．数値シミュレーションによる 1/2 分数調波共振とカオス的挙動の解析

(1)　精度の検討

Fig. 5 に調和バランス法によって得られた応答と Runge-Kutta-Gill 法で得られた応答の比較を示す．

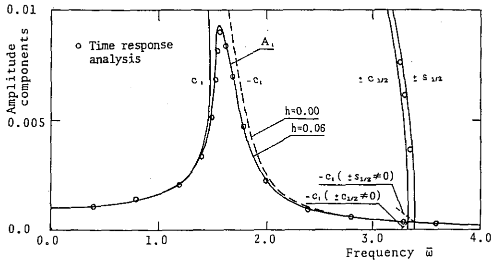


Fig. 5　Resonance curves of the harmonic and 1/2 subharmonic resonances: k=30 and γ=0.02.

図中の○印は，シミュレーションによる振幅である．主調波共振は，減衰定数 h=0.06，分数調波共振は，h=0.0 の場合の解である．図のように両者は一致している．周期解については，式(6)の仮定で十分である．これから数値シミュレーションによって，周期解以外の応答を捜すことにする．

(2)　1/2 分数調波共振とその近傍のカオス的挙動

Fig. 6 は，サグ比 γ=0.02，荷重強度 $\bar{p}_0$=0.03 の 1/2 分数調波共振近傍の主調波共振 c_1 と分数調波共振 $c_{1/2}$ および $s_{1/2}$ である．加振振動数 $\bar{\omega}$=2.83 で，主調波共振 c_1 から 1/2 分数調波共振 $c_{1/2}$ に移る．次いで，$\bar{\omega}$=2.98 付近で 1/2 分数調波共振 $s_{1/2}$ に移る．加振振動数が上昇すると，1/2 分数調波共振 $s_{1/2}$ は減少し，$\bar{\omega}$=3.56 付近で再び主調波共振 c_1 のみが得られる．Fig. 6 の場合，ケーブルの応答は外力と同周期 T と 2 倍の周期 2T の 2 つの解が存在する．このシミュレーションによる応答振幅は，解析解とよく一致している．次に，荷重強度 $\bar{p}_0$ を増大させて，0.04の場合を Fig. 7 に示す．図に示すように，$\bar{\omega}$=2.50～3.02 の範囲では周期 T および周期 2T と一致しない応答が生じている．$\bar{\omega}$=3.16 付近でも別の解が現われている．これらの周期 T および周期 2T と一致しない解についての時間応答

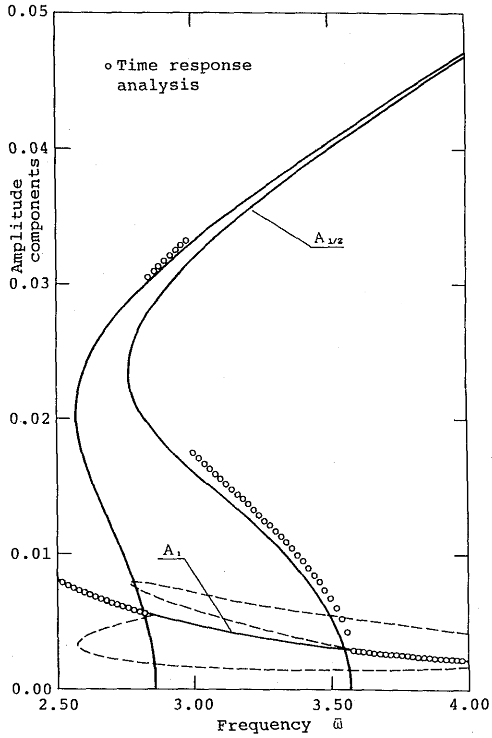


Fig. 6　Resonance curves of the 1/2 subharmonic resonance near $2\omega_1$:k=30, γ=0.02 and $\bar{p}_0$=0.03.

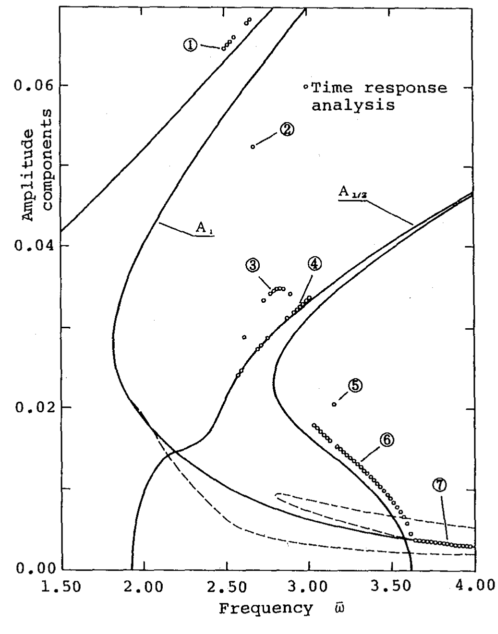
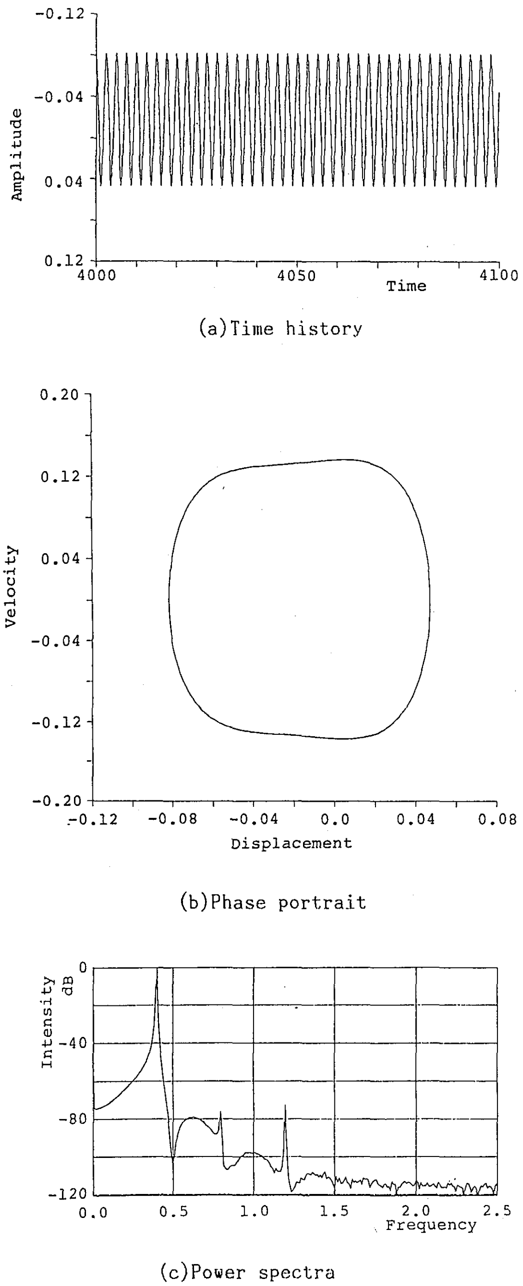


Fig. 7　Resonance curves of the 1/2 subharmonic resonance near $2\omega_1$:k=30, γ=0.02 and $\bar{p}_0$=0.04.

を詳しく検討する．

なお，これらの数値シミュレーションにあたっては，初期条件の変位，速度をいずれも 0 とし，時間きざみは $\Delta\tau=1/200$ 無次元時間で $\Delta\tau N=4000$ までの応答を求めた．時間応答解析のみでは，振動の周期を特定することは不可能であるために位相平面図およびパワースペクトルを求めた．Fig. 7 上のポイント①〜⑦の時間応答，位相平面図，パワースペクトルは Fig. 8〜14 に示すとおりである．

Fig. 8 および Fig. 14 が主調波応答である．Fig. 11 および Fig. 13 が分数調波共振である．Fig. 9 の加振振動数 $\bar{\omega}=2.68$(f=0.43，f：振動数）では，カオスが生じている．このカオスの近傍には Fig. 10 のような周期 6T の応答が生じている．また，$\bar{\omega}=3.16$(f=0.50) では，Fig. 12 に示すように周期 8T の応答が表われている．以上のような結果をもとに，$\bar{p}_0=0.04$ における周期解

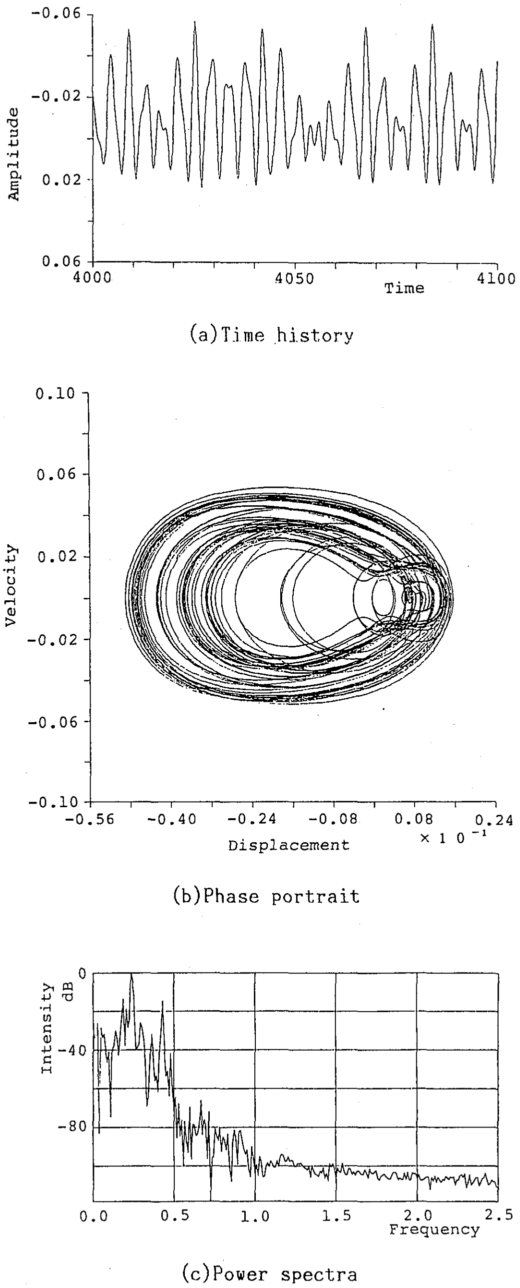


(a) Time history

(b) Phase portrait

(c) Power spectra

Fig. 8 Time response at point ①: k=30, γ=0.02 and $\bar{\omega}$=2.50 (f=0.40).



(a) Time history

(b) Phase portrait

(c) Power spectra

Fig. 9 Time response at point ②: k=30, γ=0.02 and $\bar{\omega}$=2.68 (f=0.43).

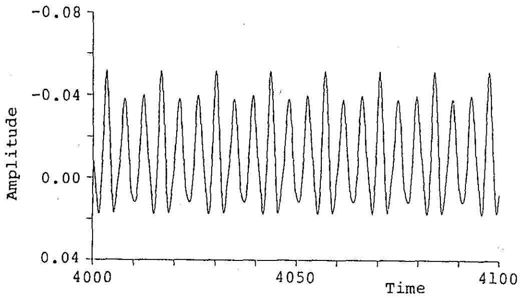
の種類を求めると，Fig. 15 のように得られる．

周期 T の解が周期 2T の分数調波共振に移り，さらに周期 T の整数倍で分岐することが予想される．

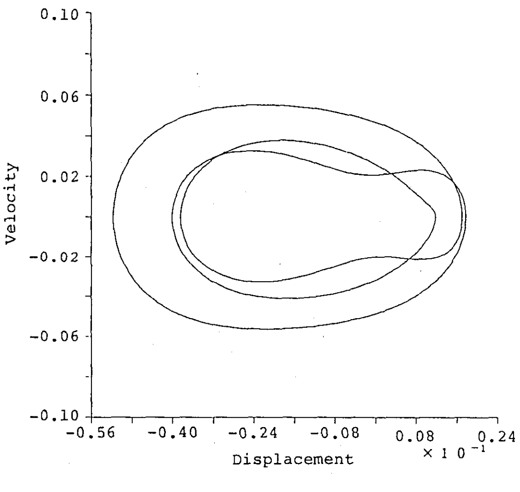
7．まとめ

本研究では，周期的変動荷重を受ける偏平ケーブルの 1/2 分数調波共振に着目して，まず，サグ比をパラメーターに，調和バランス法を用いて応答特性を明らかにした．その結果を踏まえ，数値シミュレーションを行って，解析解との比較と，カオス的応答の発生について検討した．得られた結果を要約すると次のとおりである．

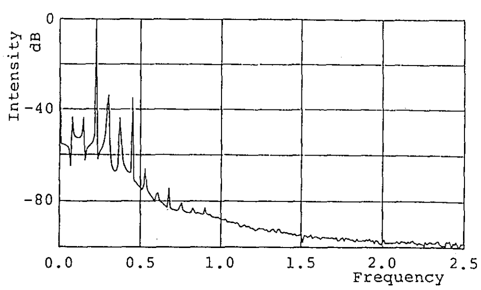
(1) 偏平ケーブルに現われる 2 次，3 次の非線形項の大きさは，サグ比によって異なる．2 次の非線形項が卓越する場合に 1/2 分数調波共振の発生領域が広い．



(a)Time history

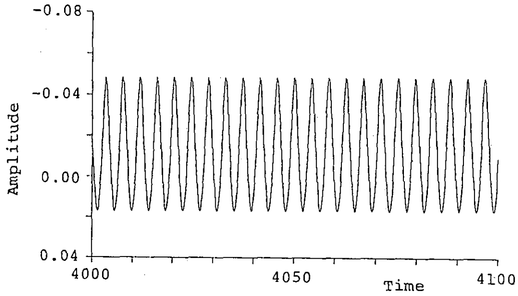


(b)Phase portrait

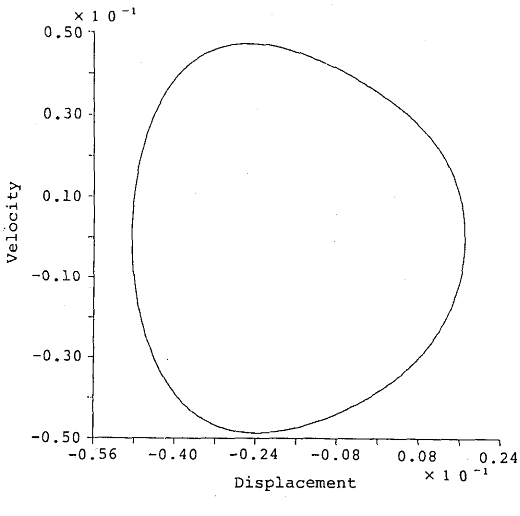


(c)Power spectra

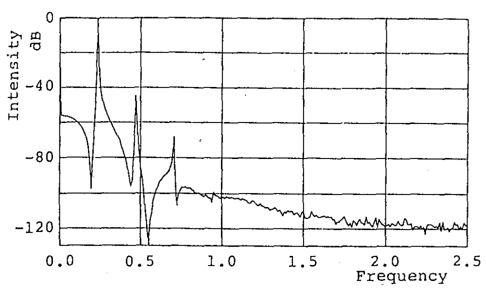
Fig. 10 Time response at point ③: k=30, γ=0.02 and ϖ=2.80 (f=0.45).



(a)Time history



(b)Phase portrait



(c)Power spectra

Fig. 11 Time response at point ④: k=30, γ=0.02 and ϖ=2.96 (f=0.47).

(2) 調和バランス法による主調波応答および1/2分数調波共振は，Runge-Kutta-Gill法による数値シミュレーション結果とよく一致する．

(3) 数値シミュレーションによれば，主調波応答から分数調波応答への遷移時と，2つの分数調波応答間で振幅の飛び移りが起こることを確認できた．

(4) 荷重強度を大きくした場合，ジャンプ現象の近辺に周期がn倍の分岐応答とカオス的な応答が発生する．

本研究では，偏平ケーブルの1/2分数調波共振の調和バランス法による解析と数値シミュレーション結果を示したが，1/2分数調波共振の近傍にカオス的挙動を示す解が存在することを確めた．Regaらによるカオスの存在の主張が確認された．今後，カオスの発生領域の詳細な検討およびカオスの発生に及ぼすケーブルのサグの影響を明らかにする予定でいる．1988年フ

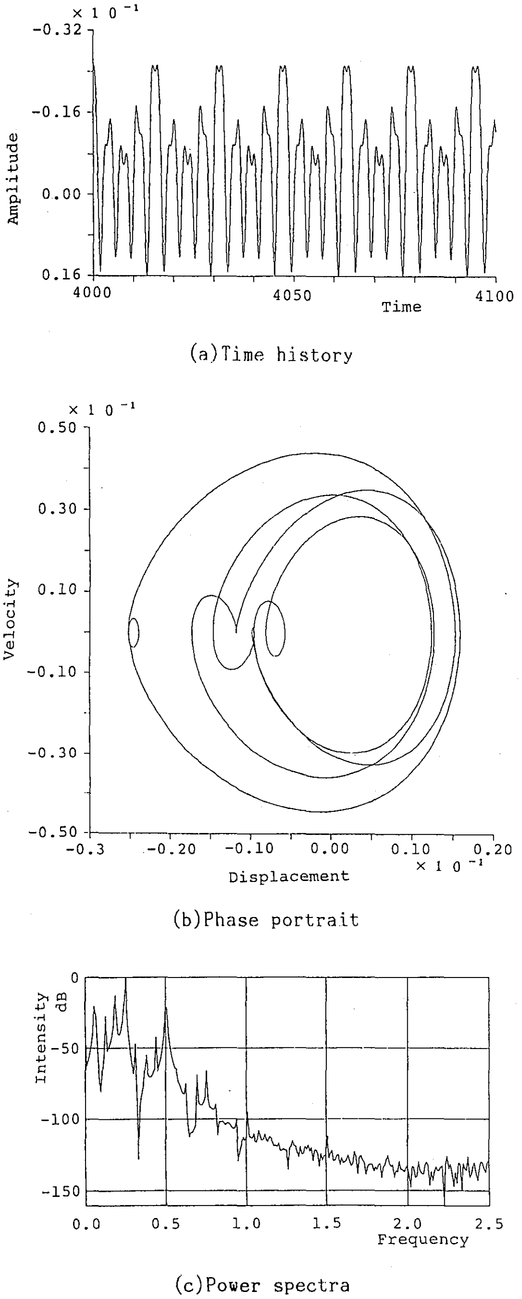


Fig. 12　Time response at point ⑤: k=30, γ=0.02 and $\bar{\omega}$ =3.16(f=0.50).

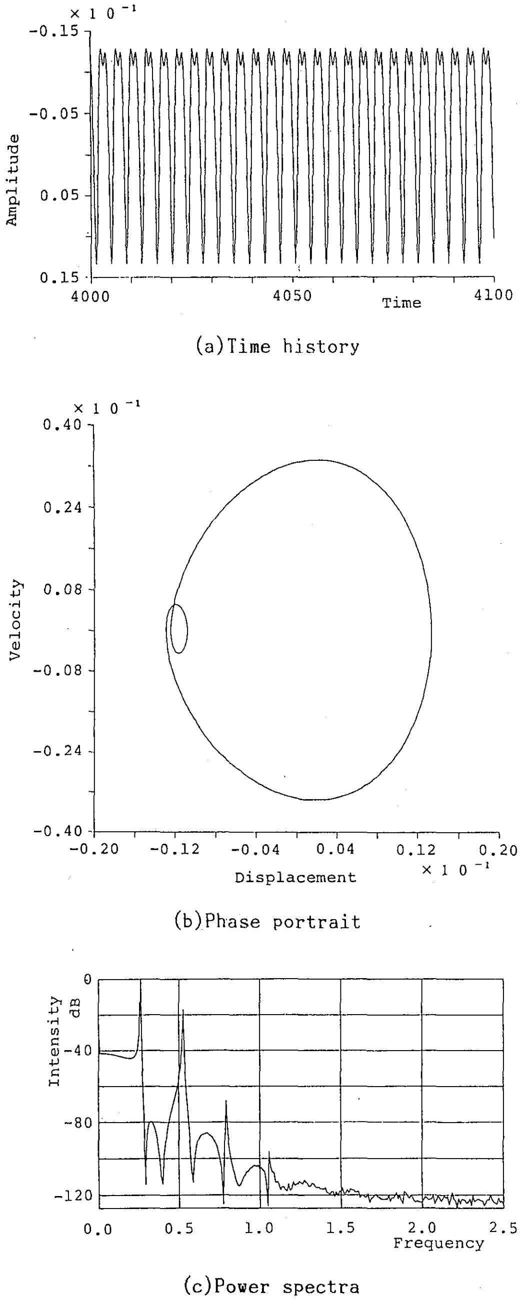


Fig. 13　Time response at point ⑥: k=30, γ=0.02 and $\bar{\omega}$=3.30(f=0.53).

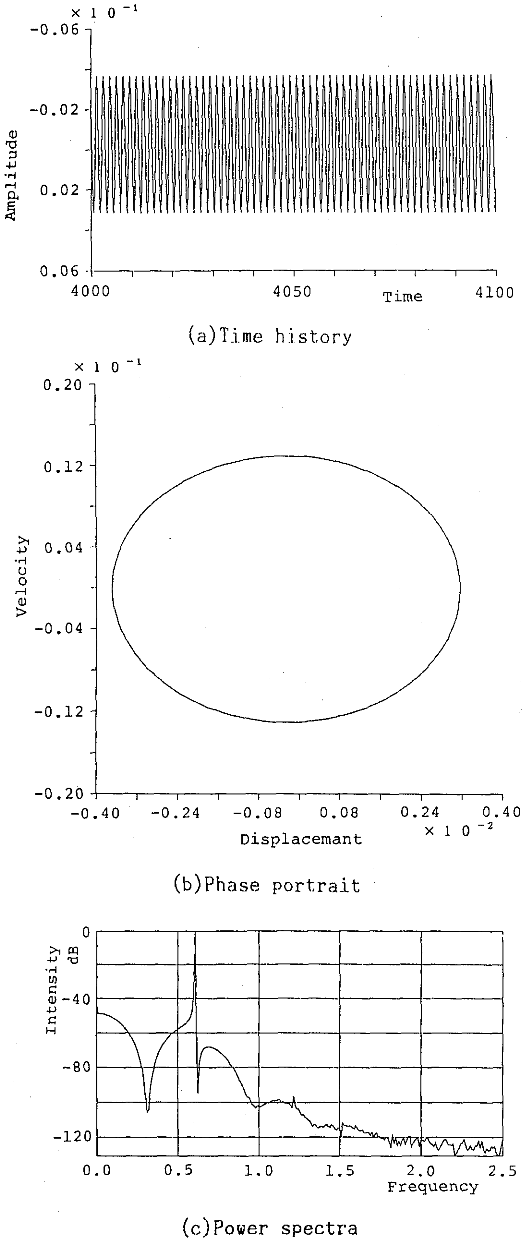


Fig. 14　Time response at point ⑦: k=30, $\gamma=0.02$ and $\bar{\omega}=3.80$(f=0.60).

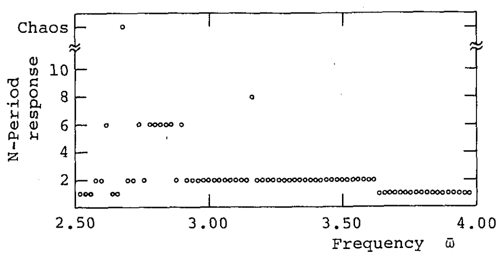


Fig. 15　Bifurcation diagram: k=30, $\gamma=0.02$ and $\bar{p}_0=0.04$.

ランスグルノーブルでのIUTAM総会および1989年ドイツシュトゥガルトでのIUTAMシンポジウムで著者にケーブルにカオスの解析の必要性を示したRega氏に感謝いたします。

参考文献

1）Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B., 武者利光監訳，橋口住久訳：非線形力学とカオス，オーム社，昭63.

2）Benedettini, F. and Rega, G.: Planar Nonlinear Osillations of Elastic Cables under Subharmonic Resonance Conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 132, No. 3, pp. 353～366, 1989.

3）Benedettini, F. and Rega, G. ：1/2 Subharmonic Resonance and Chaotic Motions in a Model of Elastic Cable, Nonlinear Dynamics in Engineering Systems, Springer-Verlag, pp. 27～34, 1990.

4）高橋和雄・町田健一郎・夏秋義広：変動軸力を受けるケーブルの安定を失った後の応答，長崎大学工学部研究報告，第22巻，第38号，pp 63～70, 1992.

5）夏秋義広・高橋和雄：構造部材の非線形振動―非線形振動への誘い―，片山技報，Vol. 9, pp. 12～16, 1989.

6）Irvine, H.M.: Cable Structures, The MIT Press, pp. 87～99, 1981.

7）高橋和雄・一ノ瀬寛幸・町田健一郎・夏秋義広：変動軸力を受けるケーブルの動的安定性，構造工学論文集，Vol. 37A, pp. 719～732, 1991.