

受働杭に作用する側方流動圧と変形の 簡易推定法の提案

棚 橋 由 彦* ・ 藤 田 道 浩**
浅 井 健 一*** ・ 松 井 謙 二****

Simple Estimation of Lateral Flow and Pressure Working on the Substructure under Soft Ground

by

Yoshihiko TANABASHI*, Michihiro FUJITA**
Ken'ichi ASAI*** and Kenji MATSUI****

abstract

With the recent increase in the extension of a traffic network and plus difficulties in obtaining suitable sites, road construction work has often encountered soft ground. Therefore, lateral movement of the bridge substructure; i.e. pier and abutment, due to the partial load with rear filling work becomes remarkable. However, a rational estimation of lateral flow and pressure working on the substructure has not been prepared for the design of the bridge substructure.

This paper commences by comparing the observed behavior of model pier and the calculated behavior of a stress-coupling finite element analysis adopting an elasto-viscoplastic model as soft ground. Secondly, the demanded parameters to estimate their behavior are determined so as to minimize the discrepancies in the estimation. Using these parameters a prediction model is constructed, and the numerical simulation are carried out according to some varying factors affecting lateral pressure.

Finally, from the results of the numerical simulation, the paper proposes simple estimation formulae of the lateral flow, pressure and its profile on the substructure.

1. はじめに

近年、交通ネットワークの拡大と適地の用地難から、軟弱地盤上における道路の開発が進み、橋台等の構造物の建設や背面盛土の施工に伴う、受働杭としての橋脚基礎に側方流動圧が作用し、それに伴う、橋脚・橋台の側方移動が問題となっている。

ここに、働方流動圧とは、軟弱地盤上の抗土圧構造物が背面盛土の偏載荷重を受けることにより発生する

背面と橋台側の水平全応力の差分 $\Delta\sigma_x$ を意味する。側方流動現象の力学的メカニズムの解明および側方流動圧の定量的な把握は、地盤と構造物の相互作用問題であり、流動圧の大きさや分布形状が盛土荷重や地盤強度、橋脚剛性等に依存するため困難であり、事前設計に供し得る推定法は確立していないのが現状である。

本研究では、受働杭に作用する側方流動圧と側方変位の評価のために、粘土の弾塑性的な性質と、クリー

平成4年9月30日受理

*社会開発工学科 (Civil Engineering Department)

**土木工学専攻修士課程 (Graduate Student, Civil Engineering Department)

***建設省土木研究所 (P.W.R.I. Ministry of Construction)

****(株)建設技術研究所九州支社 (CTI Co. Ltd., Kyushu Branch)

ブに代表される時間依存性の考慮が重要であるとの観点から、地盤材料に弾・粘塑性モデルの一つである関口・太田モデル¹⁾を採用した。すなわち、関口・太田モデルを用いた解析値と、別途なされた模型実験の実測値との比較から、その差異を最小にするように、パラメータを同定し、モデルの妥当性を検討するとともに、入力パラメータの感度分析を行った。次いで、想定した地盤モデルにおいて弾・粘塑性FEM解析によるシミュレーション計算を行い、受働杭に作用する側方流動圧および側方変位の簡易評価式を提案した。

2. 解析方法

2.1 地盤モデル

土の構成式(応力-ひずみ-時間関係)の研究は、近年急速に発展し、種々のモデルが提案されている。最初の統一的モデルは、ケンブリッジ大学のRoscoeやSchofieldらの提案したCam-Clayモデル²⁾である。このような背景下において、関口・太田は正規圧密粘土の応力誘起異方性と時間依存性を考慮できる弾・粘塑性構成式を導いた。

関口・太田モデルは塑性体積ひずみ v_p を式(1)のように定義している。添字(0)は載荷時前の初期値を意味する。

$$v_p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left(\frac{p'}{p'_0} \right) + D\eta^* - \alpha \ln \left(\frac{\dot{v}}{\dot{v}_0} \right) \quad (1)$$

ここに、

- λ : 圧縮指数, κ : 膨潤指数, e_0 : 初期間隙比
- p' : 平均有効主応力, D : ダイレクシオン係数,
- α : 二次圧縮指数, \dot{v} : 体積ひずみ速度,
- \dot{v}_0 : 初期体積ひずみ速度
- $\eta^* = \sqrt{3}(\eta_{ij} - \eta_{j0})(\eta_{ij} - \eta_{j0})/2$
- $\eta_{ij} = s_{ij}/p'$, $\eta_{j0} = s_{j0}/p'_0$
- s_{ij} : 偏差応力

式(1)は、それぞれ第1項が圧密、第2項がダイレクシオン、第3項がクリープによる塑性体積ひずみを表している。次に、式(1)は左辺に塑性体積ひずみ、右辺に体積ひずみ速度の未知数を持っているので、これより粘塑性ポテンシャル F は式(2)のようになる。

$$F = \alpha \cdot \ln \left[1 + \frac{\dot{v}_0 t}{\alpha} \exp \left(\frac{f}{\alpha} \right) \right] = v_p \quad (2)$$

ここに、 f は降伏関数であり、

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left(\frac{p'}{p'_0} \right) + D\eta^* \quad (3)$$

よって、応力-粘塑性ひずみ関係式は、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\Lambda: \text{比例定数}) \quad (4)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}^p$: 粘塑性ひずみ速度

であり、 Λ を決定すると構成式が求まる。

2.2 杭のモデル化

地盤の応力・変形解析においては、一般に地盤材料は連続体として取り扱われる。

杭のような地盤に剛性の異なる材料を打設する場合、土との間ですべりや剝離といった現象を説明する必要がある。しかし、杭と土との接触面や結合面の不連続を生じる位置が明らかでない。また、解析に用いるとしても不連続面を考慮するなど種々の問題を生じ、解析を複雑にするだけである。

そこで、杭を表現する手法として、軸力と曲げが作用するビーム要素としてモデル化する。

2.3 解析手法

本解析では、Biotの三次元圧密理論³⁾をベースにした有限要素連成解析を用いる。

連成解析とは、間隙流体と土骨格を連成させて解析する手法であり、変位と間隙水圧とともに節点で離散化し、有限要素定式化を行うと、節点変位増分 $\Delta\delta$ と節点間隙水圧 π とで次のように定式化できる。

$$\begin{bmatrix} [K] \\ [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta \\ \pi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_u\}_{n+1} \\ \{R\pi\}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここに、

$$\{R_u\}_{n+1} = [C] \{ \pi \}_n - \{ M_1 \}_n - \{ M_2 \}_n - \{ P_1 \}_n + \{ M_1 \}_{n+1} + \{ M_2 \}_{n+1} + \{ P_1 \}_{n+1} \quad (6)$$

$$\{R\pi\}_{n+1} = (1 - \beta) \Delta t \{ \bar{K} \}_n \{ \pi \}_n + \{ M_s \}_n - \{ P_2 \}_n + \beta \Delta t \{ \{ M_s \}_{n+1} - \{ P_2 \}_{n+1} \} \quad (7)$$

$$[K] = \int_R [B]^T [D^{eq}] [B] dR \quad (8)$$

$$[\bar{K}] = \int_R [\bar{B}]^T [H] [\bar{B}] dR \quad (9)$$

$$[C] = \int_R [B_v]^T [N] dR \quad (10)$$

$$\{ M_1 \} = \int_R [B]^T \{ \sigma \} dR \quad (11)$$

$$\{ M_2 \} = \int_R [N]^T \{ F \} dR \quad (12)$$

$$\{ M_s \} = \int_R [B]^T [H] \rho_2 \{ F \} dR \quad (13)$$

$$\{ P_1 \} = \int_{S_T} [N]^T \{ \hat{T} \} dS_T \quad (14)$$

$$\{ P_2 \} = \int_{S_G} [N]^T Q dS_G \quad (15)$$

であり、 $[K]$ は土粒子骨格の剛性マトリクス、 $[C]$ は相互作用マトリクス、 $[\bar{K}]$ は間隙水圧に関する剛性マトリクス、 $\{\Delta\delta\}$ は節点変位増分ベクトル、 $\{\pi\}$ は節点間隙水圧ベクトル、 $\{R_u\}$ および $\{R\pi\}$ は外力ベクトル、 $[B]$ はひずみマトリクス、 $[D^{eq}]$ は弾塑性係数マトリクス、 $[H]$ は透水係数マトリクス、 $[B_v]$ は体積ひずみマトリクス、 $[\bar{B}]$ は間隙水圧勾配マトリクス、 $[N]$ は変位に関する形状関数、 $[\bar{N}]$ は間隙水圧に関する形状係数、 $\{F\}$ は物体力ベクトル、 $\{\hat{T}\}$ は S_T 上の規定表面力ベクトル

である。また、 n は時刻 t_n における値であることを表しており、 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 、 $\beta = (t - t_n) / \Delta t (0 < \beta < 1)$ である。

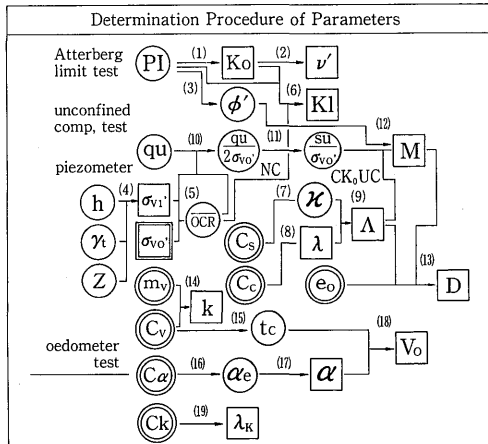
2. 4 入力パラメーターの決定法

入力パラメータは本来、厳密な力学試験により決定すべきであるが、模型実験に用いた粘土が入手不能なため、太田・鍋谷ら⁴⁾が提案する塑性指数 (PI) と一軸圧縮強度 q_u を用いるパラメータの決定法に依った。入力パラメータの決定チャートを Table 1 に示す。

3. 模型実験のシミュレーション

ここでは、建設省土木研究所で実施された模型実験⁹⁾の成果を参考にし、解析モデルの有効性を検討するため、模型実験シミュレーション計算を行い、実測値との差異が最小となるパラメータを決定した。さらに、パラメータの感度分析のため、ダイレタンシー係数 D 、限界応力比 M 、地盤の初期状態 (σ_{vo} と σ_{vi}) を変化させ、パラメトリック・スタディーを行った。

Table 1 Deparmination Prosedure of Parameters



(1) $K_0 = 0.44 + 0.42 \times 10^{-2} PI$	Massarsch (1979)
(2) $\nu' = K_0 / (1 + K_0)$	
(3) $\sin \phi = 0.81 - 0.233 \log PI$	Kenney (1959)
(4) $\sigma_{vi} = \gamma \cdot Z - P_w$	
(5) $OCR = \sigma_{vo} / \sigma_{vi}$	
(6) $K_1 = K_0 (OCR)^{0.54 \exp(-PI/122)}$	Alpan (1967)
(7) $x = C_u / \ell n 10, 1 / \ell n 10 = 0.434$	
(8) $\lambda = C_c / \ell n 10$	
(9) $A = 1 - x / \lambda$	
(10) $(qu / 2\sigma_{vo})_{NC} = 1 / (OCR)^{0.4} (qu / 2\sigma_{vo})_{OC}$	
(11) $(Su / \sigma_{vo})_{CKoUC} = \mu (qu / 2\sigma_{vo})_{NC}$	
(12) M determined using $(Su / \sigma_{vo})_{CKoUC}$, $M = 6 \sin \phi / (3 - \sin \phi)$	
(13) $D = \lambda A / [M(1 + e_0)]$	Ohta (1971)
(14) $K = m_v C_v \gamma_w$	
(15) $tc = t_{90} = H^2 T_v (U = 90\%) / C_v$	
(16) $\alpha_c = C_a / \ln 10$	
(17) $\alpha = \alpha_c / (1 + e_0)$	Sekiguchi (1977)
(18) $\nu_0 = \alpha / tc$	Sekiguchi (1977)
(19) $\lambda_k = C_k / \ell n 10$	

3. 1 模型実験の概要⁹⁾

模型実験は、1.2×1.2×2.4mのガラス製実験槽に層厚10cmの砂を敷き、その上に層厚50cmの軟弱地盤が造成された (Fig. 1 参照)。

載荷荷重は、0.17kgf/cm²の荷重増分を24時間ごとに載荷し、第9サイクルまで実施した (第9サイクルは72時間継続)。なお、載荷過程は、載荷→除荷→逆載荷の順序で行っている。

逆載荷工程は側方流動圧に対する対策工法の一つとして、施工順序による側方流動の低減効果をみるために実施されたものである。

3. 2 解析モデル

解析モデルは、模型実験土槽を要素数132、節点数161に要素分割した (Fig.1参照)。地盤の境界条件は底面を水平、鉛直両方向拘束、側面を水平方向のみ拘束としている。水理境界条件は、地盤表面と底面を排水、両側面を非排水とした。また、杭は下端を鉛直方向のみ拘束するピン結合、上端を自由端としている。

載荷荷重は、模型実験と対応させた3サイクルを1ステップとし (0.017kgf/cm² / 1 cycle), 0.0511kgf/cm² ~ 0.153kgf/cm² を3ステップに分け、1ステップを3日とした。

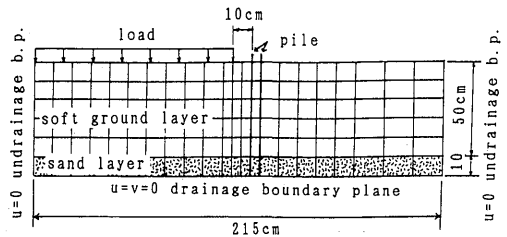


Fig 1 Analytical Modeling for Model Test

3. 3 解析結果と考察

まず、本解析に用いる関口・太田モデルの入力パラメータの感度分析を、ダイレタンシー係数 D 、限界応力比 M 、過圧密比 $O.C.R$ を変化させて行った。 D の増大、 M の減少に伴い、主として非排水時の変形がともに大きくなることが判明した。

解析結果に大きく影響を及ぼすパラメータは、影響の大きい順に、1) ダイレタンシー係数 D 、2) 限界応力比 M 、3) 地盤の初期状態 ($O.C.R$) である。

感度分析等の結果、模型実験の実測値をよくシミュレートしているのは、 $D = 0.014$ 、 $M = 2.0$ 、 $O.C.R$ (過圧密比) = 5.6の条件のもとに解析したもので (Fig. 2 参照)、細部を除き、概ね両者の地盤変形は一致してい

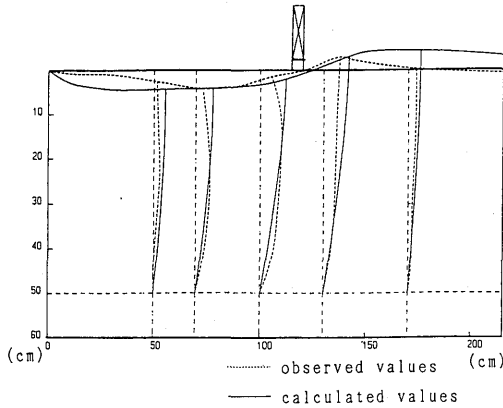


Fig. 2 Comparison between Observed and Calculated Deformation of Model Test

る。

4. 側方流動圧に関する試算

模型実験の解析により、弾・粘塑性有限要素解析が側方変位・流動圧の評価に対する有効性を確認できた。

確定したモデルにより、実大の地盤モデルを想定して、盛土載荷による地表面変形、側方変位、側方流動圧分布を把握する。

4.1 解析モデルと解析条件

解析するケースは、軟弱粘土層厚 $D = 5, 10, 15\text{m}$ の3ケースである。想定地盤 (Fig. 3) は、軟弱粘土層厚 D に対して下の砂層厚を D の2倍とし、杭前面の幅は盛土の3倍としている。

杭は一般に複数の杭列からなっている。等価剛性は、1列でモデル化した杭と杭群が同じ杭頭変位量とするような剛性とする。また、杭は軟弱粘土地盤下の砂層に根入れし、下端固定のビーム要素としてモデル化し、盛土端部に設置した。

変位境界条件は、底面は水平、鉛直両方向に拘束、側面は水平方向のみを拘束している。水理境界条件は両面排水、側面非排水としている。

想定した盛土過程は、 1m/d の急速施工である。盛土材は弾性材料とし、平面ひずみ問題として解析した。

解析に必要な土質パラメータは、太田・鍋谷らにより提案された決定法から求めた。なお、地盤材料の各種パラメータについては Table 2 に示す。

軟弱層厚 $D = 5, 10, 15\text{m}$ について、杭施工と無処理の解析を行った。なお、杭は1本にモデル化し、剛性 $EI = 5.0 \times 10^6 \text{tf} \cdot \text{m}^2$ とした。また、盛土の高さは $h = 15\text{m}$ までの載荷とした。

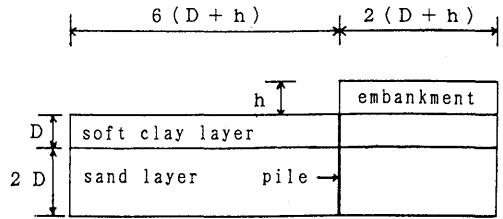


Fig. 3 Analytical Model for In-situ Simulation

Table 2 Estimated Parameters of Clay Ground

D : coefficient of dilatancy	0.051
A : irreversibility ratio $= 1 - \kappa/\lambda$	0.850
M : critical state parameter	1.900
ν' : effective Poisson's ratio	0.408
k_{xo}/γ_w : coefficient of permeability of x direction	$1.7 \cdot 10^{-3} \text{m/d}$
k_{yo}/γ_w : coefficient of permeability of y direction	$1.7 \cdot 10^{-3} \text{m/d}$
σ_{vo}' : preconsolidation pressure	$12.3 \sim 17.3 \text{tf/m}^2$
K_0 : coefficient of earth pressure at rest	0.690
σ_{v1}' : effective overburden pressure	$0.3 \sim 5.25 \text{tf/m}^2$
K_1 : coefficient of earth pressure at rest in-situ	$0.574 \sim 1.47$
λ : compression index	0.434
e_0 : void ratio (at preconsolidation)	2.800

4.2 解析結果と考察

(1) 地盤変形

地表面の隆起、沈下の状況を軟弱層 $D = 5\text{m}$ のときの「杭なし」、「杭あり」の場合における盛土高 $h = 2, 4, 6, \dots, 14, 15\text{m}$ ステップ毎について併せて Fig. 4 に示す。Fig. 4 より、杭の存在が地盤変形を著しく減少させていることが分かる。特に、杭の抑止効果により杭前面側の地盤隆起がほとんど生じなくなっている。

また、「杭あり」では変形量の低減と共に「杭なし」に比べて盛土側の沈下量が均一になっている。軟弱層

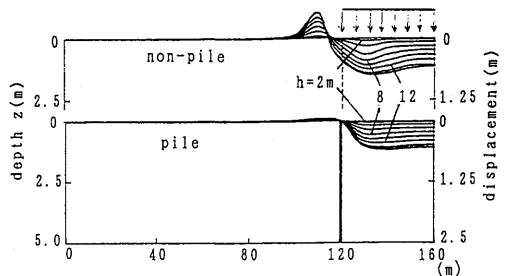


Fig. 4 Ground surface displacement

厚 $D=10$, 15m も $D=5\text{m}$ と同様の杭の変形抑止効果がみられる(図省略).

(2) 側方変位

側方変位解の一例として、軟弱層厚 $D=5\text{m}$ のときの「杭なし」、「杭あり」の状況を Fig. 5(a), (b)に示す。

深さ方向変位分布は、「杭なし」(Fig. 5(a))の場合、軟弱層と砂層の境界から変形の差が大きく、地表面で最大となる逆三角形分布を示す。「杭あり」(Fig. 5(b))の場合は、杭の剛性により地盤変位(杭のたわみ)が「杭なし」と比較して約 $1/30$ に著しく減少しており、弾性的な変位を示している。

(3) 側方流動分圧

Fig. 6(a), (b), (c)にそれぞれ軟弱層厚 $D=5$, 10 , 15m における側方流動圧分布を示す。図中に示している全応力 $\Delta\sigma_x$ と有効応力 $\Delta\sigma_x'$ の関係は、全応力 $\Delta\sigma_x =$

有効応力 $\Delta\sigma_x'$ +過剰間隙水圧 Δu となっている。

全応力と有効応力の大きさを比較すると、側方流動圧の大部分は過剰間隙水圧によって占められていることが分かる。側方流動圧の分布形状は軟弱層厚 $D=5\text{m}$ のように軟弱層が比較的薄い場合は三角形に近い分布を示しているが、軟弱層厚が厚くなるにしたがい、台形分布を示している(Fig. 6(b), (c)). また、盛土直下および下位砂層に面した部分の側方流動圧は過剰間隙水圧の消散により側方流動圧は小さくなる。

4.3 側方流動圧分布および変形の簡易推定法

側方流動圧については、既往の研究によると、盛土の高さや形状、地盤の構成や力学特性、および杭の配置や剛性等の影響を受けるが、概ね、二等辺三角形分布の形状となっている。Tschebotarioff⁷⁾は、側方流動圧は $P_{\max}=0.4\gamma h$ (γ :盛土の単位体積重量, h :盛土

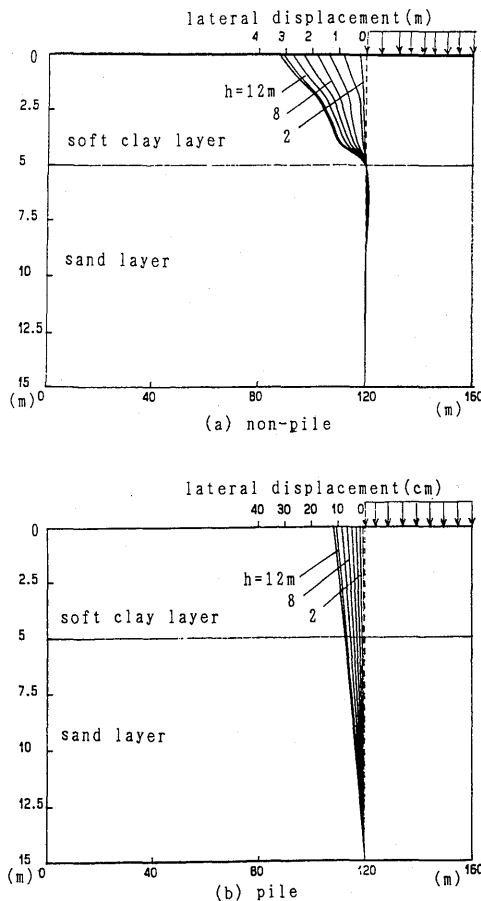


Fig. 5 Lateral displacement ($D=5\text{m}$)

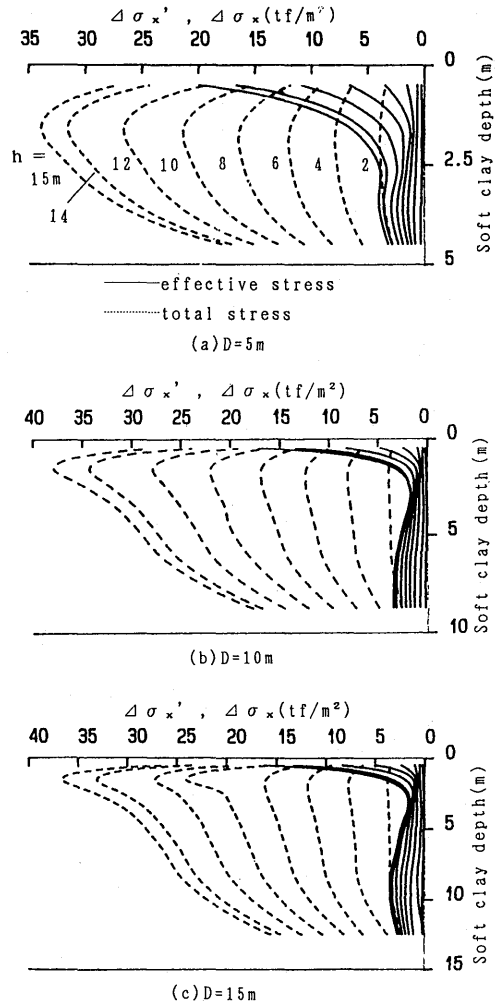


Fig. 6 Lateral pressure Profile

高さ)をピークとする三角形分布形状を仮定した。

ここでは、弾・粘塑性有限要素解析結果に基づき、側方流動圧および地盤と杭の変形の簡易推定法に関する検討を行う。

(1) 側方流動圧分布

側方流動圧分布を盛土荷重の関数として表すことを検討する。なお、側方流動圧は、杭前面と背面(盛土側)の水平方向全応力の差 $\Delta\sigma_x$ で定義する。

軟弱層厚 D 、盛土高 h 、地表面からの深さ z における側方流動圧 $\Delta\sigma_x$ 、および側方流動圧を盛土荷重で正規化した $\Delta\sigma_x/\gamma h$ で整理する。その結果、Fig. 7 より $\Delta\sigma_x/\gamma h$ は D および h によらず、概ね一定で z のみの関数として表現できることがわかる。Fig. 7 より軟弱層厚 D によって多少のばらつきがみられるが、側方流動圧の大きさおよび分布形状は式(16)のように表すことができる。

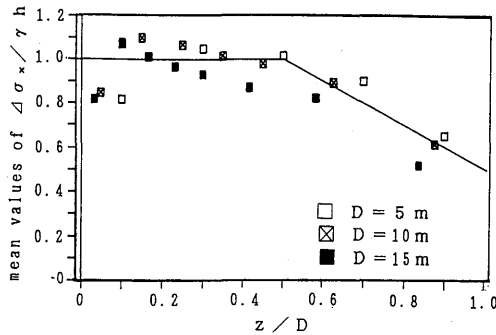


Fig. 7 Relationship between z/D and $\Delta\sigma_x/\gamma h$

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\gamma h} = 1.0 \quad (z/D \leq 0.5)$$

$$= 1.5 - z/D \quad (z/D > 0.5)$$

ここに、 $\Delta\sigma_x$:側方流動圧、 γh :盛土荷重
 D :軟弱層厚、 z :地表面からの深さ

(2) 地盤の変位

軟弱層の地盤変位は Fig. 5 のように盛土荷重や軟弱層厚によらず、概ね逆三角形の分布形状を示す。そこで、軟弱層における変形の面積である A_s と軟弱層厚と安定係数の積である $D \cdot \gamma h/c$ の関係式を Fig. 8 に示す。なお、 c は粘着力である。

$A_s - D \cdot \gamma h/c$ の関係は軟弱層厚によらず、ほぼ1本の指数曲線で表せる。Fig. 8 に設計値として示したラインは $A_s = a (D \cdot \gamma h/c)^b$ として側方流動現象は地表面での地盤変位だけでなく、軟弱層全域における側方

変位量と関わりがあると考えられる。

したがって A_s と $D \cdot \gamma h/c$ が非線形関数にあることが判明したことにより、 $D \cdot \gamma h/c$ は重要な指標となり得ることが明らかとなった。なお、 A_s と $D \cdot \gamma h/c$ の関係式は、

$$A_s = 0.09 (D \cdot \gamma h/c)^{1.45} \quad (17)$$

である。

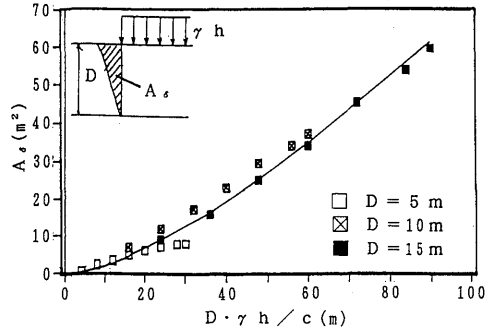


Fig. 8 Relationship between A_s and $D \cdot \gamma h/c$

(3) 杭の変位

杭基礎の地表面(杭頭)での水平変位 δ と $D \cdot \gamma h/c$ の関係を Fig. 9 に示す。軟弱層厚 D によらず δ と $D \cdot \gamma h/c$ の間に非線形な関係が認められる。杭基礎の場合も、地盤の変位と同様に、ほぼ1本の指数曲線で表される。

このことは、杭基礎の推定法において $D \cdot \gamma h/c$ が重要な指標となることを意味する。

なお、 δ と $D \cdot \gamma h/c$ の関係式は、

$$\delta = 0.15 (D \cdot \gamma h/c)^{1.28} \quad (18)$$

ここに、 δ :杭の水平変位量、 $D \cdot \gamma h/c$:軟弱層厚×安定係数である。

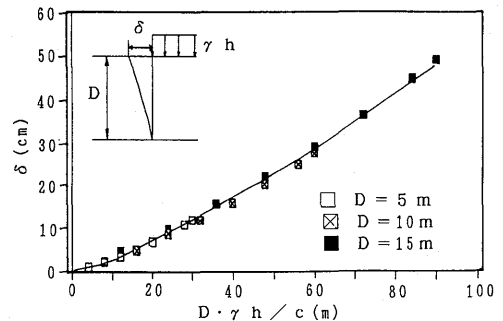


Fig. 9 Relationship between δ and $D \cdot \gamma h/c$

5. まとめ

受働杭に作用する側方流動圧と変形の弾・粘塑性解析および簡易推定法の提案を行った結果、以下の結論が得られた。

- (1) 弾・粘塑性構成モデルである、関口・太田モデルを用いた有限要素解析は、模型実験のシミュレーションの結果をみても、大変形についても十分追従できることが分かり、解析モデルとして妥当なものである。
- (2) 想定した地盤モデルでの解析を行った結果、地盤変形、側方変位、側方流動圧について、杭の効果や側方流動圧分布がよく表現できているといえる。
- (3) 側方流動圧分布、地盤および杭の変形について簡易推定法を提案したが、変形において重要な指標となる $D \cdot \gamma h/c$ は、建設省土木研究所で提案された I 値⁹⁾において重要な指標とされた $\gamma h/c$ と共通のものであり、この提案式は妥当なものといえる。

なお、本研究での数値計算には、長崎大学総合情報処理センターFACOM M-760/30を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, 9th ICSMFE, Tokyo, 1979.
- 2) Roscoe, K.H., A.N. Schofield and A. Thurairajah: Yielding of clay in state wetter than critical, Geotechnique, Vol. 13, No. 3, pp. 211-240, 1963.
- 3) Biot, M.A: General theory of three-dimensional Consolidation, Journ, Appl. Phys, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
- 4) 太田秀樹・鍋谷雅司・藤井伸二・山本松生: 弾・粘塑性有限要素解析の入力パラメータ決定における一軸圧縮強度の利用, 土木学会論文集, 第400号/III-10, pp.45-54, 1988.
- 5) Iizuka, A. and Ohta, H.: A determination procedure of input parameters in elasto-viscoplastic finite element analysis, Soils and Foundations, Vol. 27, No. 3, 1987.
- 6) 建設省土木研究所: 橋台の側方移動に関する研究, 土木研究所資料第1804号, 1981.
- 7) Tshebotarioff, G.P.: In retaining structures in foundation engineering, Foundation Engineering (Leonards, G.A., ed), McGraw-Hill, New York, pp. 490-496, 1962.