

Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち板の 振動および座屈

高橋 和雄*・江島 裕章**
古谷 寿章***

Vibration and Buckling of a Non-uniform Cantilever Plate with Thermal Gradient on Pasternak Foundation

by

Kazuo TAKAHASHI*, Hiroaki ESHIMA**,
and Hisaaki FURUTANI***

Vibration and buckling of a non-uniform rectangular cantilever plate on Pasternak foundation which is an elastic foundation with a rate-independent shear layer interposed between the plate and the foundation under a steady, one-dimensional temperature gradient is studied. The problem is solved by using the Ritz method. The trial functions are assumed by beam functions which satisfy the geometric boundary conditions. The present results are compared with those of the previous solutions. Natural frequencies and buckling load are shown for various parameters of Pasternak foundation, tapers of the rectangular plate and thermal gradient.

1. まえがき

著者等は、Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ単純支持および固定の組合せからなる変断面長方形板の動的安定性解析¹⁾を、変断面片持ち板の場合に拡張することを考えている。Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち板の動的安定性解析に着手する前の第一段階として、本論文では固有振動解析および座屈解析を行う。

本研究では、一般解に用いる試行関数に対応するはりの固有振動形を採用する。はりの固有振動形は平板の自由端の境界条件のうち幾何学的境界条件しか満足していないので、これまで著者等¹⁾が採用してきた

幾何学的境界条件の他に、力学的境界条件を満足した試行関数を設定する必要がある Galerkin 法²⁾を用いるのは、不可能である。したがって、幾何学的境界条件のみで解が得られる Ritz 法を採用する。

本論文では、Ritz 法による定式化を行い解の収束性を検討した後、変断面、熱勾配および Pasternak 基礎が振動の固有値(固有振動数)ならび座屈固有値に与える影響を評価する。

2. ポテンシャルエネルギー

Fig. 1 に示すような、Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面長方形板が x 方向に一様分布の静的面内力

平成5年4月30日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**熊谷組 (Kumagai-gumi Co., Ltd.)

***大学院修士課程土木工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

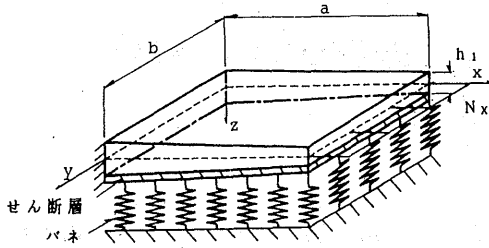


Fig. 1 Geometry and co-ordinate system.

N_x を受ける場合の振動問題を考える。

Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面長方形板のひずみエネルギー V は、変断面長方形板のひずみエネルギー³⁾、Pasternak 基礎のもつバネのひずみエネルギーおよびせん断層のひずみエネルギーから構成される。なお、本研究で用いる変断面長方形板は薄板と仮定するので、板厚方向 (z 方向) の応力成分を無視する。

$$\begin{aligned} V(w) = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \{ (\nabla^2 w)^2 \\ & - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \} dx dy \\ & + \frac{1}{2} K_e \int_0^b \int_0^a w^2 dx dy \\ & + \frac{1}{2} K_s \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $D(x) = E(x)h(x)^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 $E(x)$: ヤング率、 $h(x)$: 板厚、 ν : ポアソン比、 ρ : 板の密度、 w : たわみ、 K_e : バネ定数、 K_s : せん断層定数、 t : 時間、 x, y : 平板中央面の座標系
上式において熱勾配の項はヤング率 E に含まれている。

面内力による仕事 U は次のように与えられる。

$$U(w) = -\frac{1}{2} N_x \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

また、変断面長方形板の運動エネルギー T は次のように与えられる。

$$T(w) = \frac{1}{2} \rho \int_0^b \int_0^a h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3)$$

ポテンシャルエネルギーは次のように表される。

$$W(w) = V - U - T \quad (4)$$

3. Ritz 法による解法

解析に用いる一般解を、次のように仮定する。

$$W = \sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \quad (5)$$

ここに、 h_m, \bar{h}_n : 幾何学的境界条件を満足する座標関

数 (Appendix A)、ここでは、はりの固有振動形を用いる。 h_m : 片持ちばりの固有振動形、 \bar{h}_n : 両端自由ばりの固有振動形、 A_{mn} : 未定定数、 ω : 固有円振動数、 $\xi = x/a, \eta = y/b$

式(4)を無次元化した後、式(5)を代入し、Ritz 法を適用すると次式が得られる。

$$\frac{\partial W}{\partial A_{ij}} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

式(6)において微分を実行すると、次式が得られる。

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} (E_{mrs} - \lambda_v^4 F_{mrs} - \bar{N}_x G_{mrs}) A_{mn} = 0 \quad (7)$$

ここに

$$\begin{aligned} E_{mrs} = & \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} + \frac{\nu}{\beta^2} (I_{mr}^3 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^4 \bar{I}_{ns}^3) \\ & + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^5 + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} I_{mr}^5 \bar{I}_{ns}^4 \\ & + \kappa_e I_{mr}^1 \bar{I}_{ns} + \kappa_s \left(\frac{1}{\beta^2} I_{mr}^6 \bar{I}_{ns} + I_{mr}^7 \bar{I}_{ns}^4 \right) \\ F_{mrs} = & I_{mr}^8 \bar{I}_{ns} \quad G_{mrs} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^6 \bar{I}_{ns} \end{aligned}$$

I_{mr}, I_{nr}, \dots : 固有関数の定積分 (Appendix B)

($m, n, r, s = 1, 2, \dots, N$)

ここに、 $\lambda_v = 4\sqrt{\rho h_1 \omega^2 b^4 / D_1}$: 振動固有値、 $\kappa_e = K_e b^4 / D_1$: 無次元バネ定数、 $\kappa_s = K_s b^2 / D_1$: 無次元せん断層定数、 $\bar{N}_x = N_x b^2 / D_1$: 無次元静的面内力、 $\beta = a/b$: 縦横比、 N : 項数、 $D_1 = E_1 h_1^3 / 12(1-\nu^2)$

(D_1, E_1, h_1 : $x=a$ での板剛度、ヤング率、板厚)
式(7)は次のように行列表示される。

$$([E] - \lambda_v^4 [F] - \bar{N}_x [G]) \{x\} = \{0\} \quad (8)$$

$$[E] = E \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\} = E_{mrs}$$

$$[F] = F \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\} = F_{mrs}$$

$$[G] = G \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\} = G_{mrs}$$

$$\{x\} = \{A_{11} A_{12} A_{13} \dots A_{1N} A_{21} A_{22} \dots A_{NN}\}^T$$

上式は、一定の面内力 \bar{N}_x を受ける Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち板の振動固有値 λ_v を求める基礎式である。面内力がない場合の固有振動の振動方程式は、式(8)において $\bar{N}_x = 0$ とした式で表わされる。

$$([E] - \lambda_v^4 [F]) \{x\} = \{0\} \quad (9)$$

式(9)を行列の固有値問題として解くことにより、振動の固有値 λ_v とベクトル $\{x\}$ が求められる。ベクトル $\{x\}$ を用いることにより、式(5)から Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち板の固有振動形を得ることができる。

4. 座屈解析

座屈に関する方程式は、式(8)において $\lambda^4 = 0$ とし、 \bar{N}_x を変数とした次式で与えられる。

$$([E] - \bar{N}_x [G]) \{x\} = \{0\} \quad (10)$$

固有振動解析と同様に、式(10)を行列の固有値問題として解くことにより、座屈固有値 $\lambda_b = \bar{N}_x$ とベクトル $\{x\}$ を得ることができる。

5. 計算パラメータ

本研究では、片持ち板の板厚は x 方向に直線的に変化するものとし、温度は自由端 ($x=a$) を基準として線形的に変化するものとする。また、 y 方向には板厚、温度とも一定とする。したがって、 h_1, E_1, D_1 を用いると断面の諸値は次のように設定される。

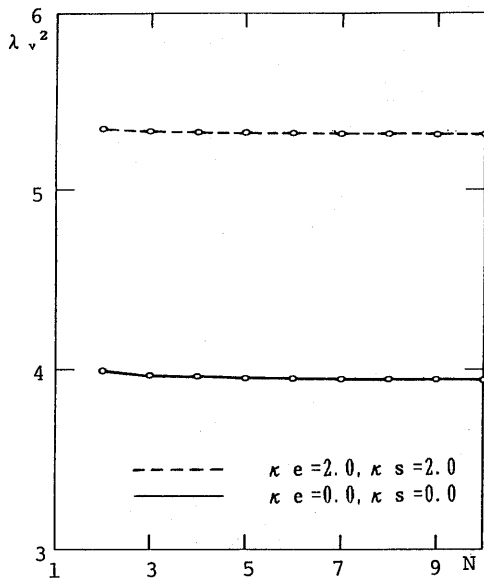
$$\begin{aligned} h(\xi) &= h_1 \{1 + \beta^*(1 - \xi)\} = h_1 G(\xi) \\ E(\xi) &= E_1 \{1 - \delta(1 - \xi)\} = E_1 T(\xi) \\ D(\xi) &= D_1 \{1 - \delta(1 - \xi)\} \{1 + \beta^*(1 - \xi)\}^3 \\ &= D_1 T(\xi) G(\xi)^3 = D_1 S(\xi) \end{aligned}$$

ここに、 β^* : 変断面パラメータ、 δ : 温度パラメータ

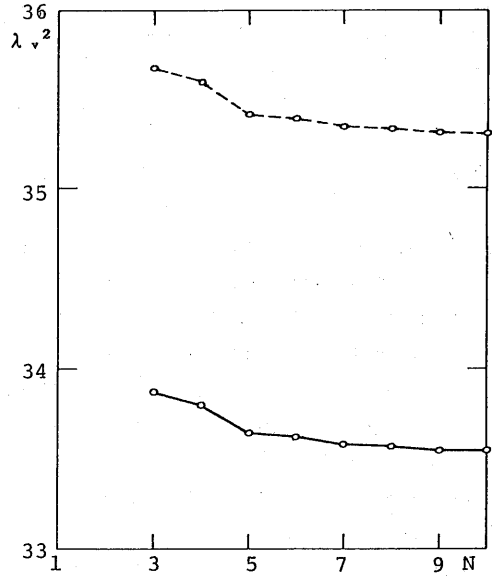
なお、Pasternak 基礎のパラメータは無次元バネ定数 κ_e 、無次元せん断層定数 κ_s の2つで与えられ、長方形板の形状は縦横比 β で与えられる。

6. 固有振動特性

Fig. 2 に Pasternak 基礎のない場合の熱勾配をもつ変断面片持ち板 ($\kappa_e=0.0, \kappa_s=0.0, \beta=1.0, \beta^*=0.6, \delta=0.8$) と Pasternak 基礎がある場合の熱勾配



(a) 1st mode



(b) 4th mode

Fig. 2 Convergences of frequency parameters.

Table 1 Frequency parameters λ_1^2 for the square, cantilever plate.

(a) present solution, (b) reference⁴⁾

Mode number	Ritz method (a)	Ritz method (b)	Method of superposition
1 st	3.484	3.494	3.459
2 nd	8.521	8.547	8.356
3 rd	21.38	21.44	21.09
4 th	27.28	27.46	27.06

をもつ変断面片持ち板 ($\kappa_e=2.0, \kappa_s=2.0, \beta=1.0, \beta^*=0.6, \delta=0.8$) の1次、4次の振動固有値の収束状況を示す。縦軸 λ_1^2 は振動の固有値の2乗(無次元固有振動数)で、横軸 N は項数である。

Fig. 2 (a)のように1次振動の収束は良好で3~4項で収束し、Fig. 2 (b)のように4次振動は8~9項で収束する。よって、本研究では固有振動解析に解が収束したとみなされる項数 $N = 10$ の値を用いる。しかし、次数が大きくなるほど解の収束性が悪くなるので、5次以上の固有振動解析を行う場合には、さらに項数を増やす必要がある。本研究でははりの固有振動形を用いているので項数 N が13以上になると桁落ちを生じる。したがって、試行関数の仮定や精度の確保の方法の検討が必要となってくる。

Fig. 2 では変断面パラメータ β^* や温度パラメータ δ

を考慮して収束性を検討しているが、 β^* や δ の収束に対する影響は小さい。すなわち、Pasternak 基礎のある場合の方が、ない場合よりも固有値は高くなるが、Pasternak 基礎や熱勾配の存在によって収束性が劣ることはない。

Table 1は、本法による解 λ_0^2 と比較解^{4) 5)}を併記したものである。 β^* や δ および Pasternak 基礎の影響のある場合の比較解を捜すのが困難なため、Pasternak 基礎や熱勾配がない一様断面片持ち正方形板について検討している。Table 1に示すように、本法による解(10項近似)と比較解⁴⁾および重ね合せ法⁵⁾は良く一致している。これらの比較解はいずれも5項近似であり、文献4)の Ritz 法による解は本法の5項近似と完全に一致している。なお、本法による解と文献5)の Ritz 法による解のポアソン比 ν は0.3であり、重ね合せ法の ν は0.333である。

Fig.3, 4に Pasternak 基礎がある場合 ($\kappa_e=2.0$, $\kappa_s=2.0$, $\beta=1.0$) とない場合 ($\kappa_e=0.0$, $\kappa_s=0.0$, $\beta=1.0$) の片持ち板の固有振動曲線を示す。縦軸は振動固有値の2乗 λ_0^2 で、横軸は変断面パラメータ β^* および温度パラメータ δ である。Fig.3より β^* が増加するにしたがって λ_0^2 が増大し、次数が高くなるほど変断面の影響が大きくなる。また、Fig.4より δ が増加するほど λ_0^2 が減少する。しかし、Fig.3と異なり

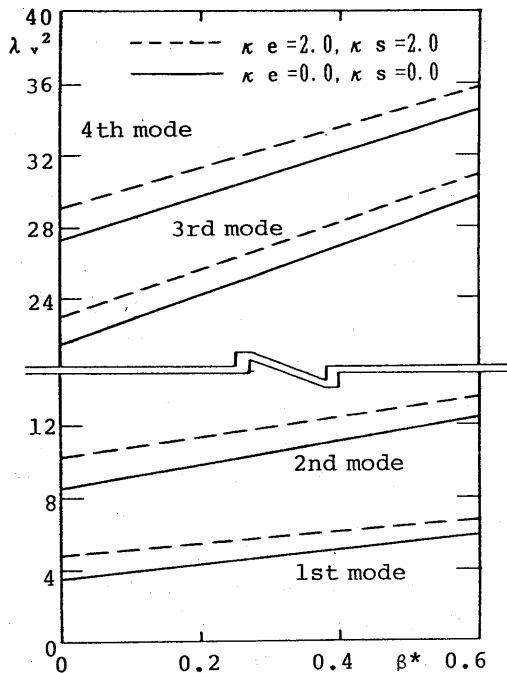


Fig.3 Natural frequencies of vibrations for the square, cantilever plate: effect of geometric parameters ($\delta=0.0$).

振動次数が高くなっても、熱勾配が振動数に及ぼす影響は変化しない。そして Fig.3, 4より Pasternak 基礎がある場合の方が、ない場合より β^* や δ の影響が少ないことがわかる。

次に、1~4次までの一様断面片持ち正方形板の固

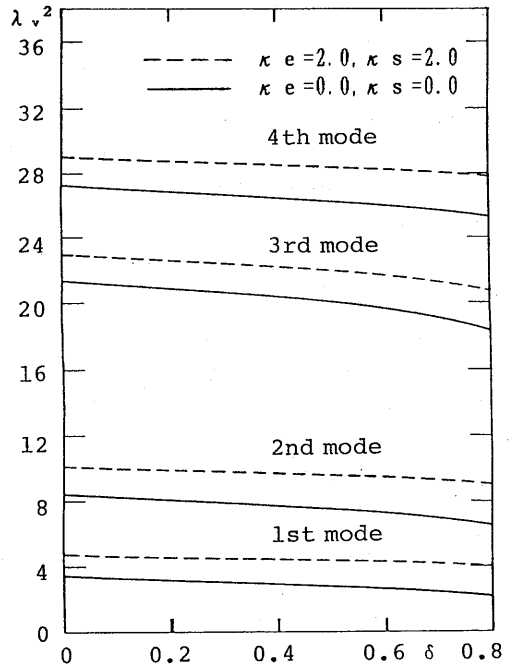
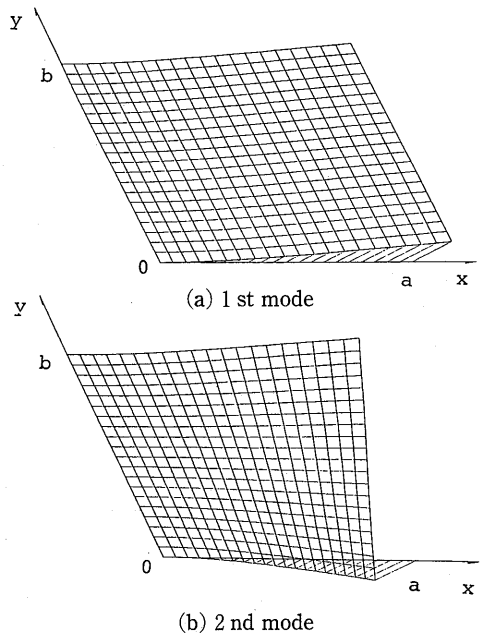


Fig.4 Natural frequencies of vibrations for the square, cantilever plate: effect of thermal gradient ($\beta^*=0.0$).



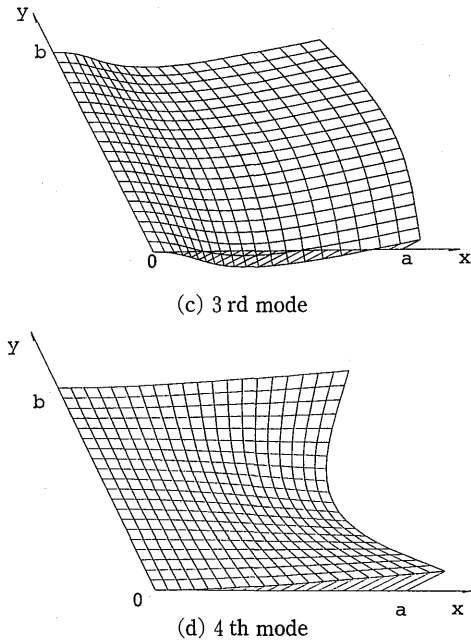


Fig. 5 1st four modes of vibration of a square cantilever plate.

有振動形を Fig. 5 に示す。固有振動形に対する変断面パラメータ β^* および温度パラメータ δ の影響について検討したところ、振動ベクトルに変化が見受けられるが、固有振動形に及ぼす影響は小さい。

7. 座屈特性

Fig. 6 に Pasternak 基礎のない場合 ($\kappa_e=0.0, \kappa_s=0.0, \beta=1.0, \beta^*=0.6, \delta=0.8$) と Pasternak 基礎のある場合の熱勾配をもつ変断面片持ち板 ($\kappa_e=2.0, \kappa_s=2.0, \beta=1.0, \beta^*=0.6, \delta=0.8$) の座屈固有値の収束状況を示す。縦軸 λ_b は座屈固有値で、横軸 N は項数である。Pasternak 基礎のない場合およびある場合の両方とも座屈固有値の収束性は良好で、3~4 項で収束する。振動の場合と同様に、座屈の場合も収束に及ぼす変断面および温度の影響は小さい。

Fig. 7 に Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち板 ($\kappa_e=2.0, \kappa_s=2.0$) と Pasternak 基礎のない場合 ($\kappa_e=0.0, \kappa_s=0.0$) の座屈曲線を示す。縦軸 λ_b は座屈固有値で、横軸 β は縦横比である。Fig. 7 から明らかなように、変断面パラメータ β^* が座屈固有値 λ_b を大きくさせ、温度パラメータ δ が λ_b を小さくさせる効果をもつ。そして、両者が同時に存在する場合には、お互いの影響が相殺される。また、Pasternak 基礎の存在が構造物全体の剛性を高めるため、Pasternak

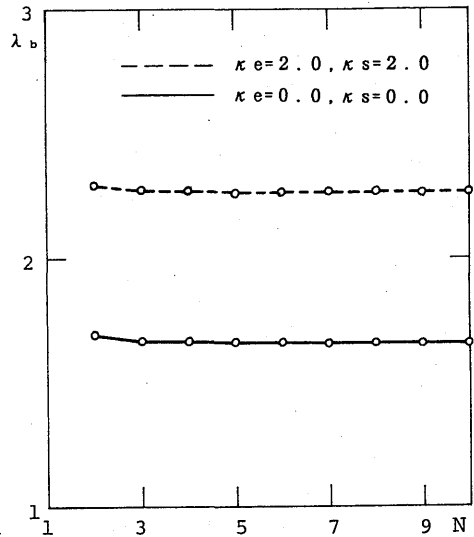


Fig. 6 Convergences of buckling eigen values ($\beta=1.0, \beta^*=0.6$ and $\delta=0.8$).

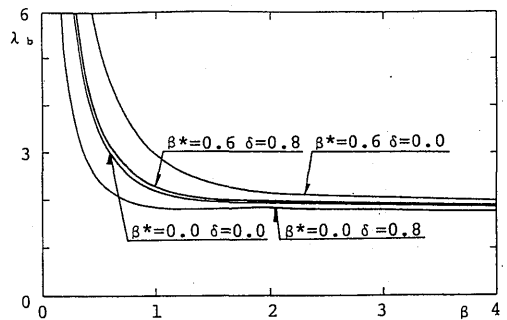


Fig. 7 Buckling curves of a cantilever plate with variable section and thermal gradient on Pasternak foundation.

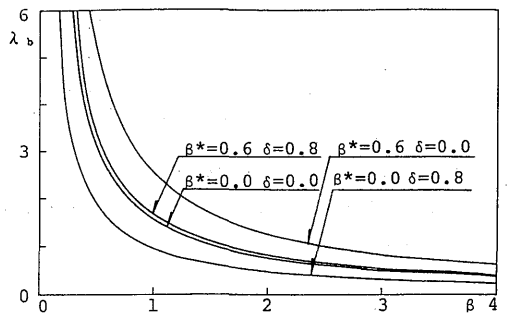


Fig. 8 Buckling curves of a cantilever plate with variable section and thermal gradient.

nak 基礎がある場合の座屈荷重が大きい。しかし、座屈曲線の形状は特に変化は見受けられない。

8. まとめ

本研究は、Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち長方形板の振動および座屈特性を明らかにしたものである。

- (1) 固有振動，座屈ともに解の収束性は良好で，変断面および温度パラメータは解の収束に影響を与えない。
- (2) 変断面パラメータが増加すると，振動の固有値（固有振動数）および座屈固有値は増大する。
- (3) 温度パラメータが増加すると，振動の固有値（固有振動数）および座屈固有値は減少する。
- (4) 変断面および温度パラメータが固有振動形に及ぼす影響は小さい。

今後は本研究の固有振動解析，座屈解析で得られた解をもとに，Pasternak 基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち板の動的安定性解析を行う予定である。

最後に，本研究の数値計算には，長崎大学総合情報処理センターの電子計算機 FACOM VP-1200モデル10を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 高橋，其田，夏秋：Pasternak 基礎上の長方形板の動的安定性，構造工学論文集，Vol. 38A，pp. 55~62, 1992.
- 2) 林：軽構造の理論とその応用（上），日科技連出版社，pp. 448~453, 1967.
- 3) Simons, D. A., Leissa, A. W.: Vibrations of Rectangular Cantilever Plates Subjected to Inplane Acceleration Loads, J. Sound and Vib., Vol. 17, pp. 407~422, 1971.
- 4) Leissa, A. W.: Vibration of Plates, NASA SP-160, p.76, 1969.
- 5) Gorman, D. J.: Free Vibration Analysis of Cantilever Plate by the Method of Superposition, J. Sound and Vib., Vol. 49, pp. 453~467, 1976.

Appendix A 片持ちばりおよび両端自由ばりの固有振動形

$$h_m = \cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi + \alpha_m (\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi)$$

$$\bar{h}_1 = 1 \quad \bar{h}_2 = \sqrt{3} (1 - 2\eta)$$

$$\bar{h}_n = \cosh \mu_n b \eta - \cos \mu_n b \eta$$

$$-\beta_n (\sinh \mu_n b \eta + \sin \mu_n b \eta) \quad (n \geq 3)$$

ここに，

$$\alpha_m = \frac{\sin \lambda_m a - \sinh \lambda_m a}{\cos \lambda_m a + \cosh \lambda_m a}$$

$$\beta_n = \frac{\cosh \mu_n b - \cos \mu_n b}{\sinh \mu_n b - \sin \mu_n b}$$

$\lambda_m a$: 片持ちばりの固有値， $\mu_n b$: 両端自由ばり固有値
($m, n = 1, 2, \dots, N$)

Appendix B 固有関数の定積分

$$I_{mr}^1 = \int_0^1 S(\xi) h_m h_r d\xi$$

$$I_{mr}^2 = \int_0^1 S(\xi) h_{2m} h_{2r} d\xi$$

$$I_{mr}^3 = \int_0^1 S(\xi) h_m h_{2r} d\xi$$

$$I_{mr}^4 = \int_0^1 S(\xi) h_{2m} h_r d\xi$$

$$I_{mr}^5 = \int_0^1 S(\xi) h_{1m} h_{1r} d\xi$$

$$I_{mr}^6 = \int_0^1 h_{1m} h_{1r} d\xi$$

$$I_{mr}^7 = \int_0^1 h_m h_r d\xi$$

$$I_{mr}^8 = \int_0^1 G(\xi) h_m h_r d\xi$$

$$\bar{I}_{ns}^1 = \int_0^1 \bar{h}_n \bar{h}_s d\eta$$

$$\bar{I}_{ns}^2 = \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_s d\eta$$

$$\bar{I}_{ns}^3 = \int_0^1 \bar{h}_n \bar{h}_{2s} d\eta$$

$$\bar{I}_{ns}^4 = \int_0^1 \bar{h}_{1n} \bar{h}_{1s} d\eta$$

$$\bar{I}_{ns}^5 = \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_{2s} d\eta$$

ここに，

$$G(\xi) = 1 + \beta^* (1 - \xi)$$

$$T(\xi) = 1 - \delta (1 - \xi)$$

$$S(\xi) = \{1 - \delta (1 - \xi)\} \{1 + \beta^* (1 - \xi)\}^3$$

$$h_{1m} = \lambda_m a \{-\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi + \alpha_m (\cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi)\}$$

$$h_{1r} = \lambda_r a \{-\sin \lambda_r a \xi - \sinh \lambda_r a \xi + \alpha_r (\cos \lambda_r a \xi - \cosh \lambda_r a \xi)\}$$

$$h_{2m} = (\lambda_m a)^2 \{-\cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi + \alpha_m (-\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi)\}$$

$$h_{2r} = (\lambda_r a)^2 \{-\cos \lambda_r a \xi - \cosh \lambda_r a \xi$$

$$+ \alpha_r (-\sin \lambda, a\xi - \sinh \lambda, a\xi) \}$$

n, s が 1 の場合

$$h_{1n} = h_{1s} = h_{2n} = h_{2s} = 0$$

n, s が 2 の場合

$$h_{1n} = h_{1s} = -2\sqrt{3}$$

$$h_{2n} = h_{2s} = 0$$

n, s が 3 以上の場合

$$\bar{h}_{1n} = \mu_n b \{ \sinh \mu_n b \eta - \sin \mu_n b \eta$$

$$- \beta_n (\cosh \mu_n b \eta + \cos \mu_n b \eta) \}$$

$$\bar{h}_{1s} = \mu_s b \{ \sinh \mu_s b \eta - \sin \mu_s b \eta$$

$$- \beta_s (\cosh \mu_s b \eta + \cos \mu_s b \eta) \}$$

$$\bar{h}_{2n} = (\mu_n b)^2 \{ \cosh \mu_n b \eta - \cos \mu_n b \eta$$

$$- \beta_n (\sinh \mu_n b \eta - \sin \mu_n b \eta) \}$$

$$\bar{h}_{2s} = (\mu_s b)^2 \{ \cosh \mu_s b \eta - \cos \mu_s b \eta$$

$$- \beta_s (\sinh \mu_s b \eta - \sin \mu_s b \eta) \}$$

$$(m, n, r, s = 1, 2, \dots, N)$$