

3軸マシニングセンタにおいて工具が描く 3次元包絡面の算出

小島 龍 広*・小林 洋 一*
西田 知 照*

A Calculation Method for Three Dimensional Envelope Surface Generated by Cutting Tools in Machining Centers with Three Controllable Axes

by

Tatsuhiko KOJIMA*, Youichi KOBAYASHI*,
and Noriteru NISHIDA*

It is required to develop the method to examine whether the shape cut by NC machine tools controlled by NC program codes is identical with the shape requested in drawings. In this report, a method to calculate any cross-section profile from the three dimensional envelope surface generated by cutting tools is proposed. If we have only the values of coordinates of tool center path, we cannot get analytically the envelope generated by cutting tool movement owing to lack of information. If the values of slope of tangent on the tool center path are given in addition to the values of tool center coordinates, we can get analytically the three dimensional envelope surface.

1. 緒 言

FA化の進展に伴い、設計から製造までを支援するCAD/CAMシステムの導入が急速に普及してきている。しかし、NC工作機械を運転するために作成されるNCプログラムのミスを自動チェックする方法は、まだ確立されているとは言えない。一般に、CADで作図された図面は3面図から成っている。また、図面に示された形状は、最終的な加工形状である。従って、NCプログラムにより加工される形状を算出できれば、この形状と図面形状を比較することで、削り過ぎや削り残しの有無を含め、NCプログラムの正しさをチェックできる。

3次元加工において、工具が削り出す加工形状は工

具が描く包絡面にほかならない。この包絡面の座標が算出できれば、任意断面での加工形状を求めることができる。一方、3軸制御マシニングセンタでは、加工物に対する工具の瞬間的な動きは3軸方向の直線運動を合成したものとなる。従って、自由曲面形状を切削する場合も、曲線を短い線分の連続として近似することになり、最終的なNCデータは直線補間で指令することになる。従って、包絡面座標も直線補間指令の連続として求めればよい。

包絡面を算出するに当たって、工具中心の移動座標情報だけしか与えられない場合は、情報不足のために包絡面を解析的に求めることはできない。この場合は解析的な算出はできないので、逐次近似法やシミュ

レート法などを用いることになるが、これらの方法では、収束に時間がかかり過ぎたり、求めた値に誤差が入ったりする。また、誤差の評価が困難である。これに対し、工具中心の移動座標情報の他に、その点における接線の傾きが与えられれば、包絡面を解析的に算出することができる¹⁾。

本報告では、NCプログラムのチェックに活用する目的で開発した包絡面算出法を示す。すなわち、3軸制御マシニングセンタによる加工において、工具中心の移動座標データとその点における傾き情報が与えられたとき、工具が作る3次元包絡面の算出法を示す。さらに、包絡面座標算出式を用いて、3面図における加工物断面形状の計算例を示す。

2. 3次元包絡面座標計算の基本概念

本計算に用いる基準座標系を Fig. 1 に示す。工具中心と共に移動する座標系を (ξ, ζ, η) 、加工物に固定された加工物包絡面座標系を (X, Y, Z) とする。なお、工具軸 η の方向は常に Z 軸方向に一致しているものとする。

ここでまず、 Z 座標の値を任意の値に固定した $X-Y$ 平面上での包絡線の求め方を示す。例えば工具がボールエンドミルでその移動が3次元的である場合、Fig. 2 に示すように $X-Y$ 平面上での工具断面輪郭は常に円となり、 η 軸方向の工具切り込みによって、その円の大きさが変わりながら移動して行く。このとき、この工具断面輪郭群が作る包絡線が加工物の $X-Y$ 平面上における断面形状となる。

いま、工具軸回りの角度 θ を媒介変数とし、工具輪郭上の一点の動きを加工物座標系から見ると式(1)の形で表せる。

$$\begin{aligned} X &= f(\xi, \zeta, \theta) \\ Y &= g(\xi, \zeta, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

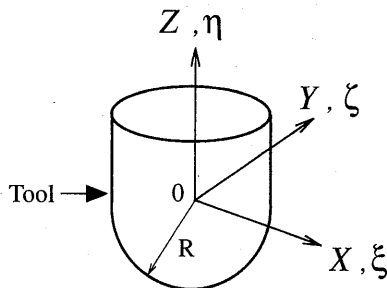


Fig. 1 Coordinate systems, $X-Y-Z$ (fixed on the work) and $\xi-\zeta-\eta$ (fixed at the center of cutter edge radius)

式(1)は二つの曲線群を表している。一つは、Fig. 3 に示すように、まず、 (ξ, ζ) を (ξ_1, ζ_1) に固定 (つまり、工具位置を固定) し、媒介変数 θ を変化させる。すると円 1 が描かれる。 (ξ, ζ) をわずかに変化させるごとに θ を変化させると、円 2、円 3 などの曲線群が得られる。他の一つは、Fig. 4 に示すように、まず、媒介変数 θ (工具軸回りの角度) の値を θ_1 に固定し、 (ξ, ζ) の値を工具中心移動経路に沿って連続的に変化させると曲線 1 が得られる。 θ の値を少し変化させるごとに、 (ξ, ζ) の値を変化させると、曲線 2、曲線 3 などの曲線群が得られる。Fig. 3 の円 1、円 2、円 3、…が作る包絡線と Fig. 4 の曲線 1、曲線 2、曲線 3、…が作る包絡線は一致する。これが $X-Y$ 平面上での求める加工物形状である。

式(1)において、点 (ξ, ζ) を (ξ_1, ζ_1) に固定し、 θ を変化させると次の曲線 (Fig. 3 の円 1 に相当) が得られる。

$$\begin{aligned} X &= f(\xi_1, \zeta_1, \theta) \\ Y &= g(\xi_1, \zeta_1, \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

同様に、 θ を θ_1 に固定し、 (ξ, ζ) を変化させると次の曲線 (Fig. 4 の曲線 1 に相当) が得られる。

$$\begin{aligned} X &= f(\xi, \zeta, \theta_1) \\ Y &= g(\xi, \zeta, \theta_1) \end{aligned} \quad (3)$$

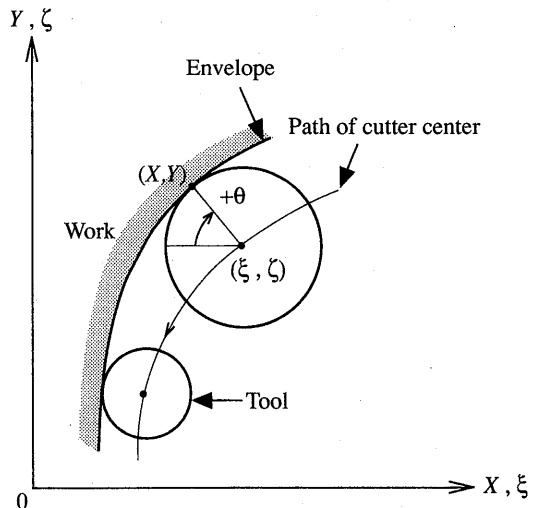


Fig. 2 Relation between a group of circles in the perpendicular cross-section to the cutter axis and their envelope

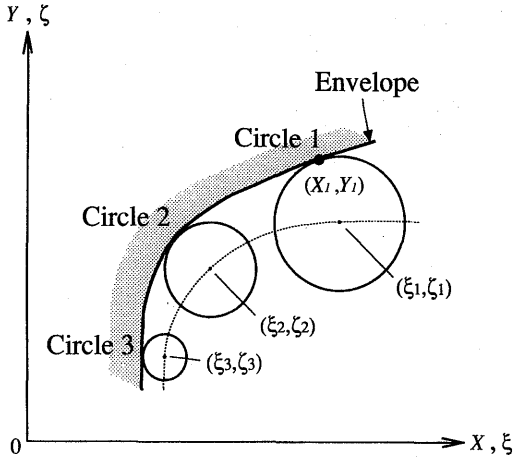


Fig. 3 The envelope generated by cutter edge circles obtained at each pair of values of (ξ, ζ) with the movement of the cutter center

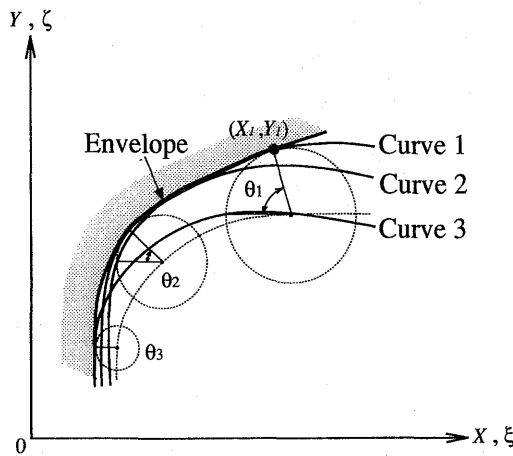


Fig. 4 The envelope generated by curves obtained at each specific value of θ with the movement of the cutter center

式(2)と式(3)で表される二つの曲線 (Fig. 3 の円 1 と Fig. 4 の曲線 1) が互いに接し、共通接線を持つ場合、この共通接線を持つ点は以下の点のみである。

$$\begin{aligned} X_1 &= f(\xi_1, \zeta_1, \theta_1) \\ Y_1 &= g(\xi_1, \zeta_1, \theta_1) \end{aligned} \quad (4)$$

この点は包絡線上の点でもあるから、点 (X_1, Y_1) を見つけることによって、求めたい包絡線が得られる。すなわち、点 (ξ_1, ζ_1) に対応する θ_1 の値を見いだせばよい。ここで、式(2)、すなわち点 (ξ_1, ζ_1) における接線の傾きを m_1 とし、式(3)、すなわち $\theta = \theta_1$ における接線の傾きを m_2 とするとき、共有点 $(X_1,$

$Y_1)$ においては $m_1 = m_2$ が成立する。この条件から θ_1 の値を決定することができる。

式(2)から

$$m_1 = \frac{dY}{dX} = \frac{dY/d\theta}{dX/d\theta} \quad (5)$$

また、式(3)から

$$m_2 = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\xi}}{\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\xi}} \quad (6)$$

となる。ここで $m_1 = m_2$ であるから次式が成り立つ。

$$\frac{dY}{d\theta} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} \right) - \frac{dX}{d\theta} \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} \right) = 0 \quad (7)$$

式(7)が θ の値を決定する条件式となっている。従って、移動する工具中心の座標値として $\{\xi_i, \zeta_i, (d\zeta/d\xi)_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が与えられたとき、式(7)を用いてこれらに対応する θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の値を求めることができる。さらに、この θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の値を式(1)に代入することで、任意 Z 座標値での (X_i, Y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) の値が得られるので、順次、 Z 座標値を変化させれば、3次元包絡面座標を求めることができる。

3. 3次元包絡面座標の算出

工具中心の移動座標データ (ξ_i, ζ_i, η_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) が与えられたとき、工具が作る包絡面の任意 Z 座標値での (X_i, Y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) の求め方を示す。工具は半径 R のボールエンドミルとする。

Fig. 5は工具中心移動座標値 (ξ, ζ, η) と加工物包絡面上の座標値 (X, Y, Z) の幾何学的関係を示した図である。工具軸回り角度 θ は時計回りを正方向にとると、工具円上の点の座標 (X, Y) は幾何学的に次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} X &= \xi - \sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2} \cos \theta \\ Y &= \zeta + \sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2}$ は $X-Y$ 平面上における工具断面半径を表している。Fig. 6に η, Z と R の関係を示す。Fig. 6から $\eta - Z \leq 0$ の範囲では、工具断面半径は R (定数) となり、式(8)は式(9)と置き換えられる。

$$\begin{aligned} X &= \xi - R \cos \theta \\ Y &= \zeta + R \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

また、 $R^2 - (\eta - Z)^2 < 0$ の範囲では、包絡面は存在しない。

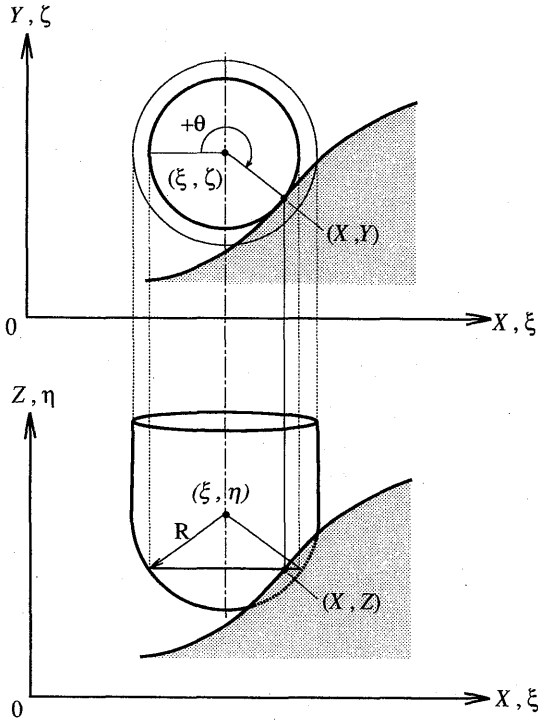


Fig. 5 Geometric relation between the position of cutter center (ξ, ζ, η) and the generating point (X, Y, Z) on the envelope

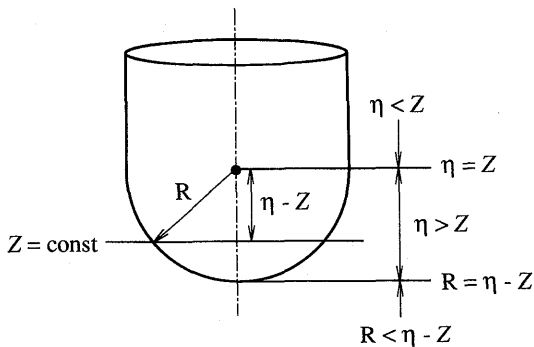


Fig. 6 Relation between a vertical region on the cutter and values of η , Z , and R

前章では簡単のために2次元平面上での包絡線を取扱ったが、この考え方を3次元空間に拡張すると以下のようなになる。式(1)に対応する式は式(10)となる。

$$\begin{aligned} X &= f(\xi, \zeta, \eta, \theta) \\ Y &= g(\xi, \zeta, \eta, \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

さらに、式(7)に対応する式として

$$\frac{dY}{d\theta} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right)$$

$$- \frac{dX}{d\theta} \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right) = 0 \quad (11)$$

が得られる。式(11)の各項は以下のようなになる。

$$\frac{dY}{d\theta} = \sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2} \cos \theta$$

$$\frac{dX}{d\theta} = \sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2} \sin \theta$$

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = 1$$

$$\frac{\partial X}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\eta - Z}{\sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2}} \cos \theta$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \zeta} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} = - \frac{\eta - Z}{\sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2}} \sin \theta \quad (12)$$

式(12)の各値を式(11)に代入すると、 θ に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{\eta - Z}{\sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} d\xi} \right\} \\ - \tan^{-1} \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right) + \pi \end{aligned} \quad (13)$$

従って、工具中心移動データとその点における接線の傾き $\{\xi_i, \zeta_i, \eta_i, (d\zeta/d\xi)_i, (d\eta/d\xi)_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) が与えられたとき、式(13)を用いてこれらに対応する θ_i ($i=1, 2, \dots, n$) を求めることができる。

次に、式(13)を式(8)に代入して θ を消去すると、任意 Z 座標での X, Y 座標を求める一般式が以下のように得られる。

$$X = \xi + A \left(B \frac{d\eta}{d\xi} + C \frac{d\zeta}{d\xi} \right)$$

$$Y = \zeta + A \left(B \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d\zeta}{d\xi} - C \right)$$

ここに

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}}$$

$$B = \frac{-(\eta - Z)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}}$$

$$C = \sqrt{R^2 - (\eta - Z)^2 - \frac{(\eta - Z)^2 \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}} \quad (14)$$

である。

さらに、 $\zeta = f(\xi)$, $\eta = g(\xi)$, $d\zeta/d\xi = f'(\xi)$, $d\eta/d\xi = g'(\xi)$ と定義すれば、

$$X = \xi + A \{Bg'(\xi) + Cf'(\xi)\} \quad (15.1)$$

$$Y = f(\xi) + A \{Bg'(\xi)f'(\xi) - C\} \quad (15.2)$$

となり、 X , Y は共に ξ に関する微分式で表される。ここで例えば、式 (15.1) は、 ξ , X , Z のみの関数となっており、

$$F(\xi, X, Z) = 0 \quad (16)$$

の形で表すことができる。式(16)から ξ が

$$\xi = G(X, Z) \quad (17)$$

の形で解析的に求まるならば、この式(17)を式(15.2)に代入し、 ξ を消去することによって3次元包絡面の式

$$h(X, Y, Z) = 0 \quad (18)$$

が得られる。ただし、 $\eta - Z \leq 0$, すなわち、 $g\{G(X, Z)\} \leq Z$ の範囲では

$$X = \xi + \frac{R}{\sqrt{1 + \{f'(\xi)\}^2}} f'(\xi)$$

$$Y = f(\xi) - \frac{R}{\sqrt{1 + \{f'(\xi)\}^2}} \quad (19)$$

となり、包絡面の式は

$$k(X, Y) = 0 \quad (20)$$

で表される。また $R^2 - (\eta - Z)^2 < 0$, すなわち、 $R^2 < [g\{G(X, Z)\} - Z]^2$ の範囲では包絡面は存在しない。

4. 計算例

導びかれた3次元包絡面座標算出式による、加工物断面形状(3面図)の計算例を以下に示す。3軸制御マシニングセンタでは、工具の瞬間的な動きは3軸方向の直線運動を合成したものとなる。このため、NCプログラムにおける工具中心移動座標データは、自由曲面形状の加工の場合でも、曲線を短い線分の連続と

して近似し、NCデータが生成される。この生成されたNCデータは、各線分の始点、終点座標から成っている。マシニングセンタによる加工では、NCデータの始点、終点間を直線補間指令で補間することによって、実際の切削が行われる。従って、指令された始点、終点座標を用いて一つの直線の式が決定できる。

Fig. 7は工具径20mmのボールエンドミルの工具中心が、点Pから点Qまで直線補間で移動するとき、切削される加工物包絡面の形状を示したものである。ここで、 X - Y 平面、 X - Z 平面上での直線PQの式をそれぞれ次式のように与える。

$$\zeta = a\xi + b$$

$$\eta = c\xi + d \quad (21)$$

この場合、工具中心の移動軌跡の接線の傾きは

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) = a$$

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = c \quad (22)$$

となる。従って、式(21)と式(22)を式(15.1)、式(15.2)に代入して ξ を消去すると、3次元包絡面の式が得られる。具体的な座標の算出においては、例えば、 X - Y 平面上での断面形状の算出の場合は、 Z 座標値を固定し、 X 座標の値を一定のきざみ幅で変化させ、そのたびに Y 座標の値を求めることになる。

Fig. 8に、 Z 座標値を5mm間隔で変化させたときの X - Y 平面上での加工物断面形状の様子を示す。図中、断面Aは $Z = -35\text{mm}$ の位置での断面形状の様子を表したものである。また、Fig. 9は Y 座標値を5mm間隔で変化させたときの、 X - Z 平面での断面形状である。図中、断面Bは $Y = 50\text{mm}$ の位置での断面形状の様子を表す。また、 Y - Z 平面での断面形状は、この場合 X - Z 平面と同じになるので省略する。

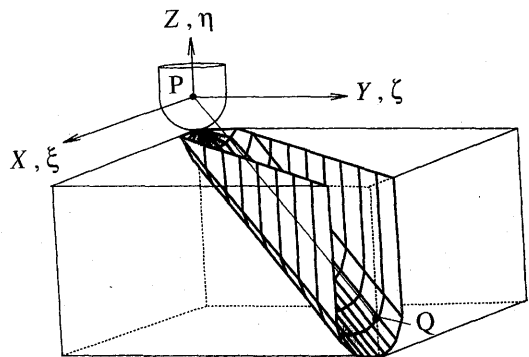


Fig. 7 A profile of three dimensional envelope surface obtained by a straight path cutting

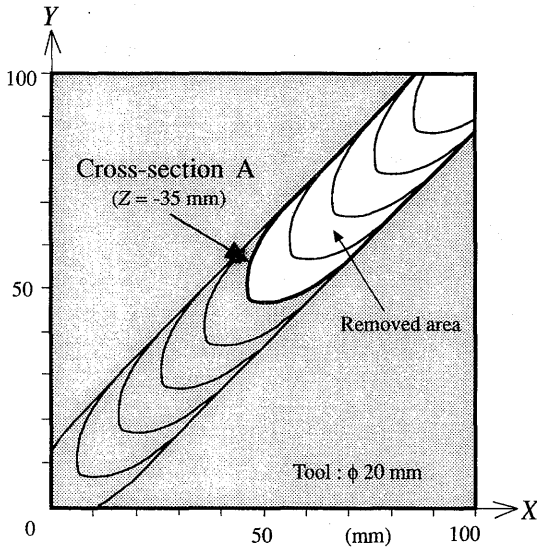


Fig. 8 A cross-section profile on X - Y plane in a straight path cutting

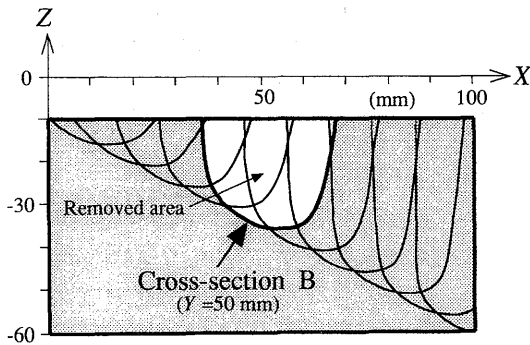


Fig. 9 A cross-section profile on X - Z plane in a straight path cutting

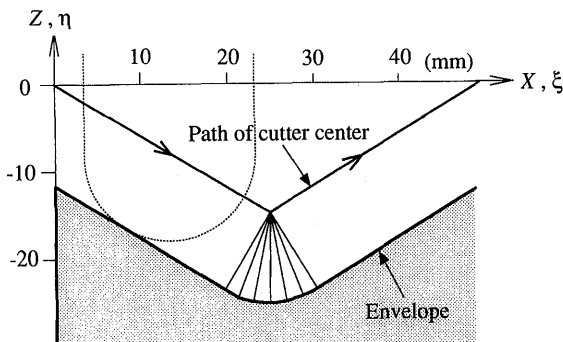


Fig.10 The envelope generated by two straight cutting paths with different inclination angles

Fig.10は工具中心の移動経路を表す。直線の傾きが変化した場合に、包絡線がどのように作られるかを X - Z 平面について示したものである。この場合、工具中心の移動経路である二つの直線の交点は尖点となっている。この尖点では、二本の直線の持つ傾きの値に加えて、この二つの傾きの値の間のすべての傾きの値を同時に持つとみなす。すなわち、この尖点においては二つの直線がなめらかに接続されているものとみなして包絡線の算出を行う。この処理によって、包絡線は連続化される。

以上の包絡面座標算出のためのプログラム開発は、3次元のCADソフト、Auto CADに備わっている言語 Auto Lisp²⁾を用いて行った。このため、形状の描画等に Auto CADの機能をそのまま利用できる。従って、NCデータを用いて描画された工作物断面形状の寸法と、CADで描かれた図面寸法を比較することによって、作成されたNCプログラムのミスチェックが可能である。

5. 結 言

3軸制御マシニングセンタにおいて、工具中心移動座標と、その点における傾き情報が与えられたとき、工具が描く3次元包絡面座標の算出式を導出した。さらに、この包絡面座標算出式を用いて、加工物の断面形状を求めて示した。

3次元加工において、自由曲面形状が切削される場合でも、NCプログラムは直線補間の連続として指令されるので、3次元包絡面座標も工具中心移動座標を直線の連続として求めた。ここで、直線の傾きが変化した場合に生じる尖点に対しては、傾きの値が一つの直線から次の直線へ連続的に変化するとして扱った。この処理によって連続的に包絡面座標を求めることができる。

今後は、CADソフト上に、作成されたNCプログラムコードを読みとり、NCデータで加工される任意断面加工形状と図面形状の寸法を比較計測できるようにし、NCプログラムのミスチェックが自動的に行えるようにすることが望まれる。

最後に、本研究のプログラム開発に協力していただいた院生の初手和宏君に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 西田, 小林, 扇谷, 塚本: 成形研削用砥石輪郭の計算法(第1報), 精密工学会誌, 58, 4 (1992) 628.
- 2) オートデスク(株): Auto LISP アプリケーション開発用, (1992).