

## 支点が動きうる偏平ケーブルの動的安定性

高橋 和雄\* · 鎌田 智之\*  
松野 進\*\*\*

## Dynamic Stability of a Cable with a Movable End

by

Kazuo TAKAHASHI\*, Tomoyuki KAMATA\*\*  
and Susumu MATSUNO\*\*\*

Dynamic stability of planar, linear response of a suspended cable driven by harmonic end-load are presented. The equation of motion in present case reveals that the tangential end-loading creates simultaneous parametric excitation and external loading for the transvers response. The basic equation is solved by a Galerkin method in space co-ordinate and the Runge-Kutta-Gill method in time co-ordinate. Response curves are shown for various sag-to-span ratios and damping constants. The results are compared with the results obtained for fixed supports.

## 1. まえがき

斜張橋の主桁あるいは塔が風荷重や交通荷重などによって振動するとケーブルに振幅の大きな局部振動が発生する可能性があることが指摘されている<sup>1)</sup>。この振動の原因に内部振動あるいは係数励振振動が考えられている。ケーブルと桁の連成振動の内部振動に関していくつかの研究<sup>2) 3)</sup>が見られる。一方、著者ら<sup>4)</sup>は Irvine ら<sup>5)</sup>の偏平弾性ケーブル理論を基礎として単一ケーブルの動的安定性について解析している。動的不安定領域に及ぼすサグ比の影響を評価している。解析に用いた力学モデルはケーブルの支点が変形に対して軸方向に拘束されていると仮定している。しかし、ケーブルの支点は完全拘束ではないので、ケーブルの支点が動きうる場合の解析も必要である。

そこで、本研究では、まず任意のサグをもつ弾性ケーブルの非線形運動方程式<sup>6)</sup>を用いて偏平ケーブルの

支点が軸方向に動きうることを考慮し線形化した運動方程式に変換する。Galerkin 法を適用して離散化を行い常微分方程式に変換する。支点が動きうる場合の運動方程式が非同次の Mathieu 方程式となるため、これまで著者が提案してきた解析的手法<sup>4)</sup>では対応が困難なため、数値シミュレーションを行う。そこで、微分方程式の直接数値積分法として Runge-Kutta-Gill 法を用いた時間応答解析を行う。ケーブルの支点が動きうる場合のケーブルの対称1次振動について、サグ比、励振力、減衰定数をパラメータとしての動的不安定領域を明らかにし、次いで支点の変位が拘束された場合の偏平ケーブルの動的安定性解析との比較検討を行う。

## 2. 運動方程式

任意のサグをもつ弾性ケーブルの面内運動方程式

平成5年9月30日受理

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*土木工学専攻修士課程 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

\*\*\*土木工学専攻修士課程 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

は、次式のように与えられる<sup>6)</sup>。

接線方向の運動方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\{EA\epsilon + (P+EA\epsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial s} - Kw\right)\} \\ - K(P+EA\epsilon)\left(\frac{\partial w}{\partial s} + Ku\right) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

法線方向の運動方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\{(P+EA\epsilon)\left(\frac{\partial w}{\partial s} + Ku\right)\} \\ - K\{EA\epsilon + (P+EA\epsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial s} - Kw\right)\} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial s} - Kw + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial s} - Kw\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} + Ku\right)^2\right\} \quad (3)$$

：ケーブルの中心軸に沿った Lagrange 表示のひずみ

$P = \sqrt{H_e^2 + (mgs)^2}$ ：ケーブルの張力

$K = \frac{mgH_e}{H_e^2 + (mgs)^2}$ ：ケーブルの曲率

$u$ ：接線方向の変位， $w$ ：垂直方向の変位， $t$ ：時間， $m$ ：ケーブルの単位長さあたりの質量， $f$ ：ケーブルのサグ， $E$ ：ヤング率， $A$ ：断面積， $H_e$ ：初期水平張力， $s$ ：ケーブルの中心軸に沿っての座標系。

ケーブルのサグが小さく、偏平ケーブル（サグ比 1/8 以下）とみなせる場合のケーブルの軸力と曲率は次のようになる。

$$\begin{aligned} P &\doteq H_e, \\ K &\doteq \frac{mg}{H_e} = K_e \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $K_e = 8f/\ell^2$ ：放物線ケーブルの曲率， $\ell$ ：ケーブルのスパン。

偏平ケーブルでは  $EA \gg H_e$  であるので、 $w \gg u$  である。したがって、偏平ケーブルでは式(1)の右辺の慣性力は無視される。また、微小変形を対象とするので、式(1)、(2)および、(3)の非線形項は無視することができる。偏平ケーブルとみなせる場合では  $ds \doteq dx$  である。このとき、式(1)は、次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(EA\epsilon) = 0 \quad (5)$$

式(5)を積分するとケーブルの張力の動的成分は時間関数のみで表されるので次のように表される。

$$T_d(t) = EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} - Kw\right) \quad (6)$$

ここで、 $T_d(t)$ ：ケーブル張力の動的成分。

Fig. 1 に示すような支点が動きうる偏平ケーブルが

変動軸方向力を受ける場合のケーブル張力の動的成分は、次式のように表せる。

$$T_d(t) = EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} - Kw\right) = H_e \cos \Omega t \quad (7)$$

ここに、 $\Omega$ ：変動水平張力の円振動数， $H_e$ ：変動水平張力の振幅。

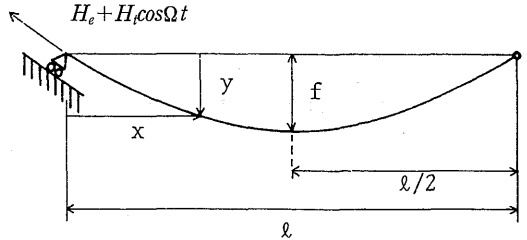


Fig. 1 Geometry of a cable subjected to harmonic end-load.

式(7)を積分のうえ、境界条件を考慮すると、 $u$ は $w$ によって表わされる。したがって、従属変数は $w$ のみとなる。

式(7)を考慮し、式(2)を線形化した式について、曲率 $K_e$ のオーダーの項まで採用ことにより式(2)は次式のように変形される。

$$\begin{aligned} L(w) = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (H_e + H_e \cos \Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - K_e H_e \cos \Omega t = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

支点が動きうる場合の変動軸力を受けるケーブルの運動方程式(8)には、係数励振振動の項（第2項）とケーブルのサグに起因する強制力の項（第3項）が含まれる。つまり、式(8)は非同次の Mathieu 方程式であるため、動的安定の解法<sup>7)</sup>は適用することができない。

### 3. 解法

#### (1) 常微分方程式への変換

式(8)の解を、次の変数分離形に仮定する。

$$w = \ell \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) W_n(x) \quad (9)$$

ここに、 $T_n(t)$ ：未知の時間関数， $W_n(x)$ ：境界条件を満足する座標関数。

上式の座標関数 $W_n$ として、支点が動きうるケーブルの固有振動形を用いる。これは、式(8)において $H_e = 0$ とした固有振動解析より得られる。すなわち、

$$W_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

式(8)に式(9)を代入した方程式に Galerkin 法を適用し離散化した後、粘性減衰力を考慮すると、次式が得られる。

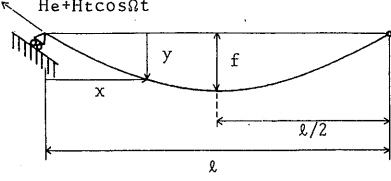
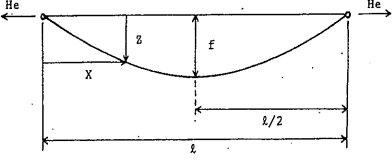
	Cable with movable support at one end	Cable with fixed supports
Geometry		
Stretching of the cable h	$h = 0$	$h \neq 0$
Natural frequency	$n_n = 1.0, 2.0 \dots$ : constant	$n_n$ and $W_n$ depend on the sag-to-span ratio
Natural vibration mode	$W_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$ : constant	
Equation of motion	Non-homogeneous Mathieu equation	Coupled homogeneous Mathieu equations
Phenomena	Forced vibration ( $\bar{\omega} = 1.0$ ) Parametric excitation ( $\bar{\omega} = 2.0, 1.0 \dots$ )	Parametric excitation ( $\bar{\omega} = 2 \omega_i, \omega_i$ )

Fig. 2 Dynamic properties of cables with movable support and fixed supports

$$\ddot{T}_n + 2h\omega_n \dot{T}_n + \omega_n^2 (1 + \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau) T_n + \frac{16\{(-1)^n - 1\}}{n\pi^3} \gamma \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau = 0 \quad (11)$$

ここに、 $\omega_n = n_n/\pi n_0$  :  $n$  次の無次元固有円振動数、 $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m l^2}$  : 弦の1次の固有円振動数、 $n_n$  : ケーブルの  $n$  次の固有円振動数、 $\gamma = f/l$  : サグ比、 $\bar{\omega} = \Omega/n_0$  : 無次元加振振動数、 $\tau = n_0 t$  : 無次元時間、 $\bar{H}_t = H_t/H_e$ 、 $h$  : 減衰定数。式(11)は、各  $n$  について成立する1自由度系の運動方程式である。

式(11)より明らかのように、サグ比  $\gamma$  が0または逆対称振動 ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) の場合においては、強制振動の項(第4項)が0となり、サグのない弦の係数励振振動の場合と一致する。本研究では係数励振振動と強制振動の両方の効果をもつ対称1次振動について解析を行う。

このとき、式(11)のようになる。

$$\ddot{T}_1 + 2h\omega_1 \dot{T}_1 + \omega_1^2 (1 + \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau) T_1 + \frac{32}{\pi^3} \gamma \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau = 0 \quad (12)$$

(2) 時間応答解析

式(12)は一般に解析的に解くことは不可能であるので、本研究では数値的な解析を行う。

Table 1 Natural frequencies of cables with movable support at one end and fixed supports  
 $\gamma$ : sag-to-span ratio  
 $k$ : ratio of the wave propagation speeds

$\gamma$	Cable with movable support at one end	Cable with fixed supports		
		$k=30$	$k=45$	$k=60$
0.001	1.0000	1.0024	1.0053	1.0094
0.01	1.0000	1.2120	1.4294	1.6793
0.02	1.0000	1.6781	2.1858	2.5566
0.03	1.0000	2.1830	2.6556	2.7779
0.04	1.0000	2.5518	2.7773	2.8216
0.05	1.0000	2.7133	2.8144	2.8374
0.1	1.0000	2.8358	2.8505	2.8550

$T_1(\tau) = P_1$ 、 $\dot{T}_1(\tau) = P_2$  とおくと、式(12)は次の2元連立の1階常微分方程式になる。

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h\omega_1 P_2 - \omega_1^2 (1 + \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau) P_1 - d_1 \gamma \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 $d_1 = -32/\pi^3$

この式を Runge-Kutta-Gill 法を用いて、初期変位0および初期速度0のもとに直接数値積分すれば、時間応答が得られる。

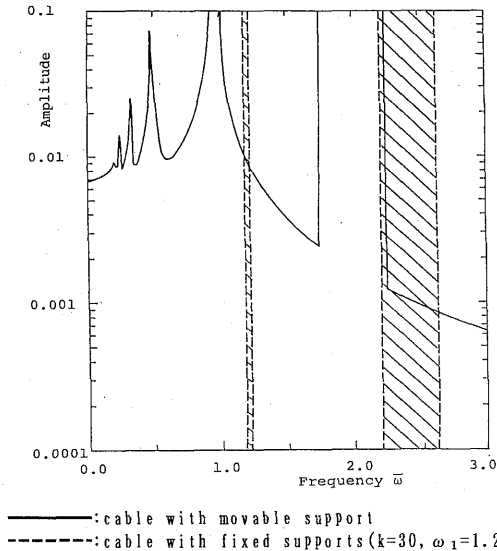


Fig. 3 Amplitudes of a cable  
with  $\gamma=0.01$ ,  $\bar{H}_t=0.3$  and  $h=0.005$ .

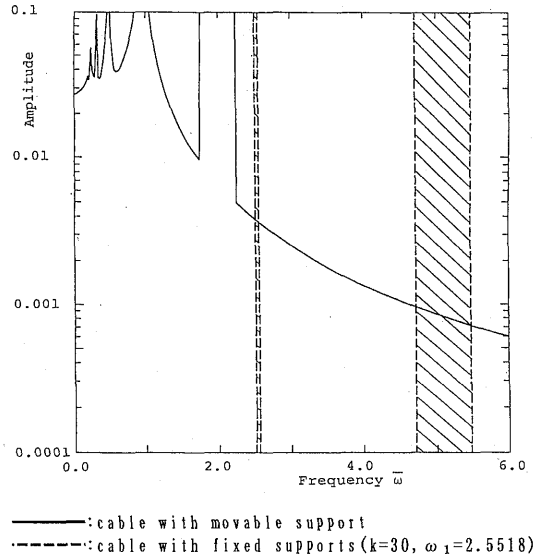


Fig. 4 Amplitudes of a cable  
with  $\gamma=0.04$ ,  $\bar{H}_t=0.3$  and  $h=0.005$ .

#### 4. 数値結果

##### (1) 支点が動きうる場合の応答特性

Table 1, Fig. 2 にそれぞれ支点が動きうる場合と文献<sup>5)</sup>に示した支点の変位が拘束された場合の1次の無次元固有振動数 $\omega_1$ および力学的特性の比較を示す。支点が動きうる場合では、サグに起因する強制力の項と係数励振振動の項をもつ非同次の Mathieu 方程式となる。このため、支点が動きうる場合の運動方程式は、強制振動と係数励振振動の両方の効果をもつ。支点が動きうる場合の固有振動形は対称・逆対称振動とも弦の場合と同じなので、無次元固有振動数は $\omega_1$ はサグに無関係に一定値1.0である。それに対し、支点の変位が拘束された場合では同次の Mathieu 方程式となる。このため、特定の振動数領域でのみ、係数励振振動が生じる。支点の変位が拘束された場合での対称振動は、その固有振動数がサグ比によって変化して、固有振動数は特定のサグ比で増大し一次高次のモードに遷移する。一方、モードの遷移状況は縦波-横波伝播速度比  $k$  によって異なる<sup>4)</sup>。

Fig. 3, 4 にサグ比  $\gamma=0.01, 0.04$ , 励振力  $\bar{H}_t=0.3$ , 減衰定数  $h=0.005$  について支点が動きうる場合と文献<sup>4)</sup>の支点の変位が拘束されている場合の応答の比較を示す。縦軸はスパン長で無次元化した無次元応答振幅で、横軸は弦の1次の固有円振動数で無次元化した無次元加振振動数  $\bar{\omega}$  である。支点が動きうる場合では、無次元加振振動数  $\bar{\omega}$  が  $2.0/j$  ( $j=1, 2, 3, 4, \dots$ ) 付近に発散振動が生じ、共振振動数1.0付近

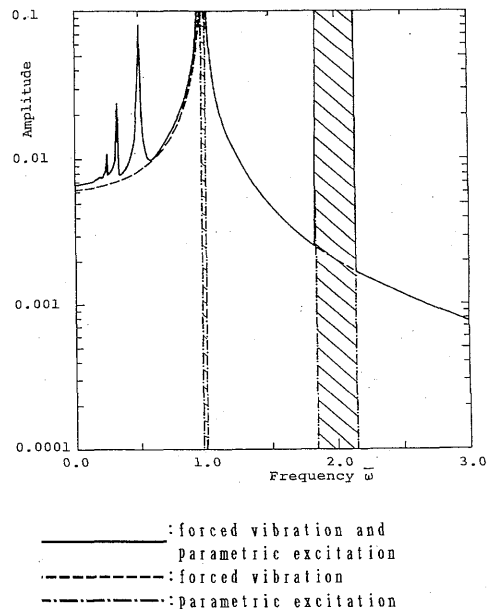


Fig. 5 Amplitudes of a cable with  
 $\gamma=0.02$ ,  $\bar{H}_t=0.3$  and  $h=0.005$ .

で応答振幅が大きくなる。この原因は支点の変位が拘束された場合と同様に、 $\bar{\omega}=2\omega_1(=2.0)$  付近で単純共振の主不安定領域が発生し、 $\bar{\omega}=2\omega_1(=2.0)/j$  ( $j=1, 2, 3, 4, \dots$ ) 付近に副不安定領域が発生するのに加え、 $\bar{\omega}=1.0$  付近で共振によって応答振幅が大きくなるためである。

支点の変位が拘束されている場合では $\bar{\omega}$ が固有振動

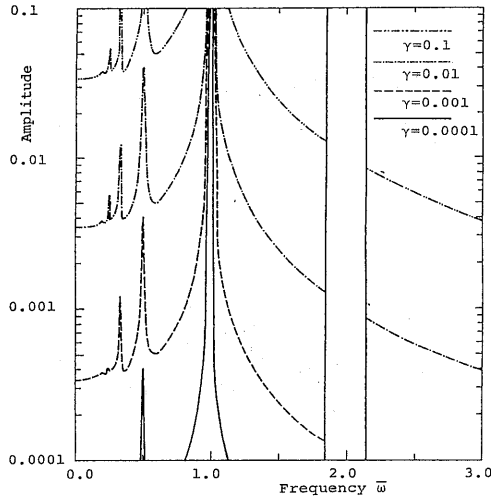


Fig. 6 Amplitudes of a cable with  $\bar{H}_t=0.3$  and  $h=0.005$ .

数  $\omega_1$  および固有振動数の2倍  $2\omega_1$  (Table 1 参照) 付近の加振振動のみ発散振動が生じ、それら以外の振動数領域では振動は発散しない。 $\bar{\omega} = 2\omega_1$  付近で係数励振振動の主不安定領域が発生し、 $\bar{\omega} = \omega_1$  付近に副不安定領域が発生している<sup>7)</sup>。なお、支点が拘束された場合では、これらの主不安定領域および、副不安定領域は、サグ比、縦波-横波伝播速度比  $k$  によって発生振動数に変化し、発生する領域の幅も変動する<sup>7)</sup>。

Fig. 5 に、支点が動きうる場合の応答と係数励振振動の項 (式(1)の第3項) を無視した応答と強制振動の項 (式(1)の第4項) を無視した応答の比較を示す。係数励振振動の項 (式(1)の第3項) を無視した応答は固有振動数1.0付近で応答振幅が大きくなる。強制振動の項 (式(1)の第4項) を無視した応答は、 $\bar{\omega}$  が固有振動数1.0および固有振動数の2倍、2.0付近でのみ発散振動が生じ、それら以外の振動数領域では振動は発散しない。支点が動きうる場合の全応答は、係数励振振動と強制振動の両方の特性を合わせた結果が現われる。さらに、 $\bar{\omega} = 2/3$  付近の第2副不安定領域および  $\bar{\omega} = 1/2$  付近の第3副不安定領域も現われる。

## (2) サグ比の影響

Fig. 6 に、励振力  $\bar{H}_t=0.3$ 、減衰定数  $h=0.005$  の場合について応答振幅と無次元加振振動数との関係をサグ比をパラメータ ( $\gamma=0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$ ) に示す。サグ比が極めて小さい場合は、固有振動数の2倍2.0付近の加振振動数  $\bar{\omega}$  で発散振動が生じ、固有

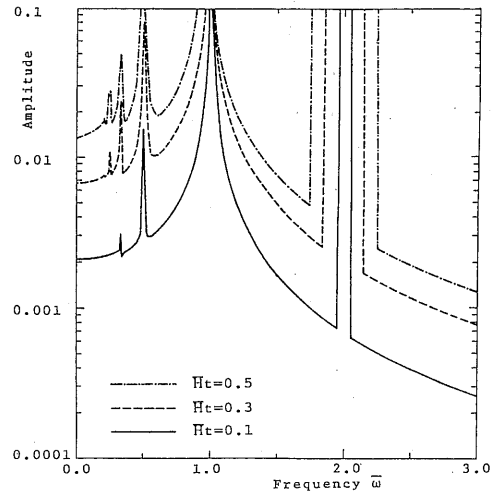


Fig. 7 Amplitudes of a cable with  $\gamma=0.02$  and  $h=0.005$ .

振動数1.0付近の加振振動数  $\bar{\omega}$  でも発散振動が生じる。また、 $\bar{\omega} = 1/2$  付近にも副不安定領域も生じるが、それら以外の無次元加振振動数では応答振動は極めて小さい。サグ比が大きい場合は、 $\bar{\omega}$  が固有振動数の2倍2.0付近で発散振動が生じ、固有振動数1.0付近でも発散振動が生じるのに加え、それら以外の加振振動数においても応答振幅が大きくなる。特に固有振動数近傍での応答振幅が大きくなる。サグ比が変化しても固有振動数の2倍2.0付近の発散振動が発生する振動数領域は変化しない。サグ比が大きくなると強制振動による応答振幅が大きくなる。この原因は支点が動きうる偏平ケーブルの運動方程式にサグに比例した強制力の項が含まれているためである。支点が拘束されている場合の対称振動では、固有振動数の2倍2.0付近の主不安定領域の幅にサグ比が大きく影響することが知られている<sup>4)</sup>。

## (3) 励振力の影響

Fig. 7 に、サグ比  $\gamma=0.02$ 、減衰定数  $h=0.005$  の場合について応答振幅と無次元加振振動数  $\bar{\omega}$  との関係励振力  $\bar{H}_t$  をパラメータ ( $\bar{H}_t=0.1, 0.3, 0.5$ ) に示す。励振力  $\bar{H}_t$  が大きくなると、主不安定領域の幅が広がる。共振点近傍の応答振幅も大きくなる。そして、加振振動数  $\bar{\omega}$  が固有振動数1.0の近傍では、励振力  $\bar{H}_t$  が小さいときほど応答振幅に大きな変化が見られる。係数励振振動の両方に大きく励振力の影響が現われる。

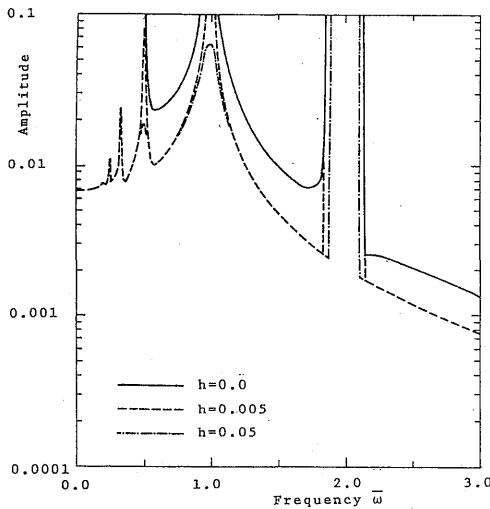


Fig. 8 Amplitudes of a cable  
with  $\gamma=0.02$  and  $\bar{H}_t=0.3$ .

#### (4) 減衰力の影響

Fig. 8に、サグ比  $\gamma=0.02$ 、励振力  $\bar{H}_t=0.3$  について応答振幅と加振振動数の関係を減衰定数  $h$  をパラメータ ( $h=0.0, 0.005, 0.05$ ) に示す。減衰力の効果は加振振動数  $\bar{\omega}$  が固有振動数1.0の付近の強制振動の振幅に現われる。しかし、固有振動数の2倍2.0付近の主不安定領域の振幅にはあまり減衰力の効果は現われない。

Fig. 9には、サグ比  $\gamma=0.02$ 、励振力  $\bar{H}_t=0.3$ 、減衰定数  $h=0.0, 0.005$ 、加振振動数  $\bar{\omega}=1.5$  の場合の時間応答波形である。減衰力を考慮すると、時間応答波形からうなりが消え、定常振動となる。

#### 5. まとめ

本研究では、支点が軸方向に変位することを考慮した偏平ケーブルの動的安定を微小変形の範囲で解析を行った。支点の変位が拘束された場合の応答とについて比較を行い、支点が動きうる場合についてサグ比、励振力および減衰力の影響を明らかにした。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

1. サグがある偏平ケーブルでは軸方向の励振力によって強制振動と係数励振振動が同時に起こる。このため、あらゆる振動数領域で振動が生じる。
2. 係数励振振動と強制振動により、固有振動数の2倍の整数分の1付近の主不安定領域、副不安定領域において発散振動が発生し、固有振動数付近には共振により応答振幅が大きくなる。
3. サグ比が変化しても不安定振動が発生する振動数は変わらない。この結果は支点が動かない場合の不安

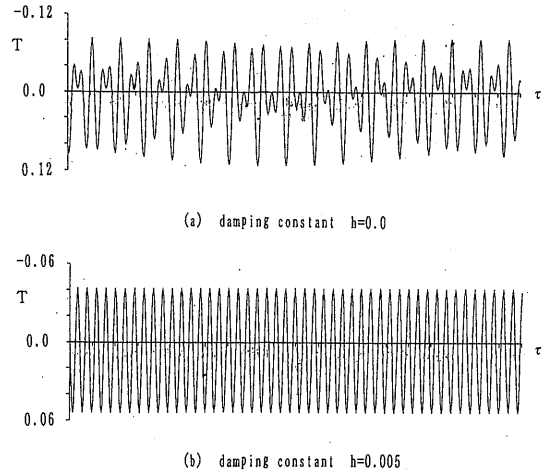


Fig. 9 Time histories of a cable  
with  $\gamma=0.02$  and  $\bar{H}_t=0.3$ .

定領域の位置や幅がサグ比によって変動する現象と著しく異なる。サグ比が大きくなると強制振動による応答振幅が大きくなる。

4. 励振力が大きくなると、不安定領域の幅が広がる。共振点近傍の応答振幅も増大する。
5. 減衰力を考慮すると、固有振動数付近の応答振幅にその効果が大きく現われる。しかし、主不安定領域の幅には、あまり減衰力の効果が現われない。

ケーブルの力学特性は、本質的に非線形性を有することである。したがって今後の課題は、支点が動きうる偏平ケーブルの場合にも安定を失った後の応答を明らかにするために、たわみによる非線形性を考慮して解析する必要がある。

なお、数値計算には長崎大学情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

#### 参考文献

- 1) Langsoe, H. E. and Larsen, O. D.: Generating Mechanics for Cable Stay Oscillations at the Faro Bridges, International Conference on Cable Stayed Bridges, Bangkok, November, pp. 18~20, 1987.
- 2) 藤野・Warnitchai, P. Pacheco, B. M.: ケーブルはりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析, 土木学会論文集, No.432/I-16, pp. 109~118, 1991.
- 3) 長井・川畑・岸本・奥井・菊池: ケーブルにモード座標を用いた桁・ケーブル系の固有値および応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp.63~72,

- 1992.
- 4) 高橋・一ノ瀬・町田・夏秋: 変動軸力を受けるケーブルの動的安定性, 構造工学論文集, Vol. 37 A, pp.921~928, 1992.
  - 5) Irvine, H.M. and Cinghey, T.K.: The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable, Proc.R.Soc.Lond. A. 341, pp.299~315, 1974.
  - 6) Perkins, N. C.: Discussion of Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Load, Journal of Sound and Vibration, Vol. 156, No. 2, pp. 363~365, 1992.
  - 7) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-Uniform Damping: Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, No. 2, pp. 257~262, 1982.