縦方向密度勾配をもつ三角形断面開水路流れの二次流解析

古本勝弘*・武政剛弘**
蔦田廣章***・一ノ瀬和雄*

Analysis of Secondary Flow in Triangular-Section Open Channel Flow with Longitudinal Density Gradient

by

Katsuhiro FURUMOTO*, Takehiro TAKEMASA**
Hiroaki KOMODA*** and Kazuo ICHINOSE*

A secondary flow in triangular-section open channel flow induced by the longitudinal density gradient is studied theoretically. The equations of motion, continuity and conservation of density are solved by using the perturbation method under the conditions which the aspect ratio of the channel is large and eddy viscosity is uniform in depth direction. But, Prandtl's secondary flow of the second kind is ignored in this analysis. It is found that the secoudary flow causes the sectional uniformity of velocity and density disributions.

1　はじめに

河川感潮域の流れには，海水の侵入に起因して縦方向に密度勾配をもつ密度流が存在し，潮汐による往復流も加わって複雑な流況を示す。河川感潮域における塩分や濁質の輸送の解析を必要とすることがしばしばあるが，流れの内部構造を理解することが欠かせない。

海水侵入に起因する密度流は河口密度流と称され，多数の研究[1]がなされて来ているが，理論的研究はその殆どが二次元流れを対象としている。緩混合流れの2次元流れに限れば，縦方向密度勾配による重力循環流が偏差流速・偏差濃度を大きくし，両者の積の断面積分で規定される分散係数を大きくすることが示されている[2]。

一方，河川の流れでは，アスペクト比（河幅／代表水深）が大きく，物質の横断方向の拡散時間が深さ方向のそれに比べて非常に大きいので，河幅方向の速度偏差と濃度偏差が分散係数を規定し，Fischer[3]は河川の分散係数として

$$D=K\frac{W^2\,U^2}{d\,u_*},\qquad K=0.011$$

を提案している。ここに，D は分散係数，W は河幅，U は断面平均流速，d は平均水深，u_* は平均摩擦速度である。

海水侵入により縦密度勾配のある河川感潮域の分散係数は上記のことを考え合わせると，基本的な物理量の関係は上式で与えられ，係数 K が密度流効果の増加とともに増大すると考えられた。しかし，筑後川や川内川の塩分分布から計算された分散係数は密度流効

平成5年9月30日受理
*社会開発工学科（Department of Civil Engineering）
**地域共同研究センター（Joint Research Center）
***大学院海洋生産科学研究科（Graduate School of Marine Science and Engineering）

果（Overall Richardson 数）の増加とともにその係数は減少していた（Furumoto et al.[4]）。そこで考えられる分散現象に関わる密度流効果は，Smith[5] も指摘しているように，横断方向に一様でない移流速度により作り出される横断方向の密度勾配が断面内の循環流を惹起し，断面内の速度と濃度を一様化させて分散係数を減少させると考えられる。このような断面内二次流の生起を説明するために，最も単純なモデルとして，アスペクト比の大きな三角形断面水路を考え，緩混合領域でも強混合状態に近い領域の流れを対象として，摂動法を用いた理論的解析を試みた。ただし，簡単のため，潮汐流は考慮せず，流下方向に密度が増加する流れに解析対象を限定する。

2．流れのモデルと基礎式

流れはアスペクト比（水路幅／水深）の大きな中心線に対して対称な三角形断面水路を流れる定常等流とし，断面平均密度が流下方向に直線的に増加している流れ場を考える。Fig－1に示す座標系および記号を用いると，解析の基礎となる運動方程式，連続式および密度保存式は次のように表わされる。

$$v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g\sin\alpha-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1}$$

$$v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{2}$$

$$v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=g\cos\alpha-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{4}$$

$$(u-U)\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e_y\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(e_z\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) \tag{5}$$

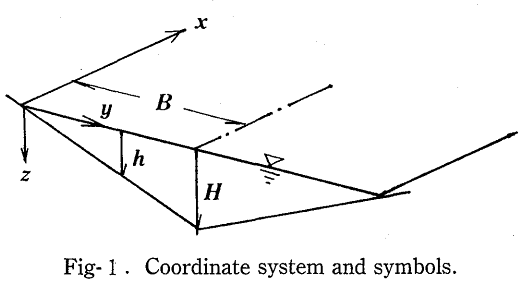

Fig-1．Coordinate system and symbols.

ここに，u, v, w, U はそれぞれ x, y, z 軸方向の流速成分および断面平均流速，ρ, g, p, α はそれぞれ流体密度，重力加速度，圧力および x 軸の水平との傾斜角，ε，e は渦動粘性係数，渦拡散係数であり，添字はその方向の量を示す。

(5)式において、密度は断面平均流速 U とともに移動する座標 $x_1=x-Ut$ に対して定常に保たれる流れを考え，また，x 方向の密度拡散は y, z 方向のそれに比較して微小として省略している。

ここで，密度は次式のように表わされるものとする。

$$\rho=\rho_0+\langle\rho\rangle\{1+\nu(\frac{x_1}{H}+\theta(y,z))\} \tag{6}$$

ここに，ρ_0，$\langle\rho\rangle$，ν はそれぞれ淡水密度，$x_1=0$ における断面平均超過密度および無次元密度勾配を表し，$\theta(y,\ z)$ は断面平均密度からの無次元偏差密度である。

中心線に対して左右対称な流れとしているので，解析は片側の半断面のみを考える。

今，摩擦速度を $U_*=\sqrt{gH\sin\alpha}$, $u_*=\sqrt{gh\sin\alpha}$, とおき，次の無次元量

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\dfrac{B}{H},\ \tilde{x}=\dfrac{x}{H},\ \eta=\dfrac{y}{B},\ \zeta=\dfrac{z}{h},\ \tilde{h}=\dfrac{h}{H},\\[2ex] \tilde{u}=\dfrac{u}{U_*},\ \tilde{v}=\dfrac{v}{U_*},\ \tilde{w}=\dfrac{w}{U_*},\ \tilde{U}=\dfrac{U}{U_*},\ \tilde{p}=\dfrac{p}{\rho_0U_*^2}\end{array}\right\} \tag{7}$$

を導入し，(1)～(5)式を整理すると次式を得る。ただし，アスペクト比の大きな流れを考えているため，w は小さく，静水圧分布を仮定できるとして，(3)式から w を含む項を省略している。

$$\frac{\tilde v}{\beta}\frac{\partial\tilde u}{\partial\eta}+\frac{\tilde w}{\tilde h}\frac{\partial\tilde u}{\partial\zeta}=1-\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde x}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\tilde\varepsilon_y\tilde h^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tilde\varepsilon_z\tilde h^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\tilde u}{\partial\zeta}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\tilde v}{\beta}\frac{\partial\tilde v}{\partial\eta}+\frac{\tilde w}{\tilde h}\frac{\partial\tilde v}{\partial\zeta}=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tilde p}{\partial\eta}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\tilde\varepsilon_y\tilde h^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde v}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tilde\varepsilon_z\tilde h^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\tilde v}{\partial\zeta}\right) \tag{9}$$

$$0=\frac{\rho}{\rho_0}\cot\alpha-\frac{1}{\tilde h}\frac{\partial\tilde p}{\partial\zeta} \tag{10}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tilde v}{\partial\eta}+\frac{1}{\tilde h}\frac{\partial\tilde w}{\partial\zeta}=0 \tag{11}$$

$$(\tilde u-\tilde U)+\frac{\tilde v}{\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\frac{\tilde w}{\tilde h}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\tilde e_y\tilde h^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tilde e_z\tilde h^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\right) \tag{12}$$

ここに，渦動粘性係数 ε と渦拡散性係数 e は鉛直方向

には変化しないものと仮定して，

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon/h\,u_*,\qquad \tilde{e}=e/h\,u_* \tag{13}$$

は一定値をとるものとする。

(8)～(12)式の解を求めるにあたり，境界条件は，水表面において剪断応力が0である，底面において slip velocity を許容する，水表面，底面における密度 flux が0であること等から，

$$\text{水面}:\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\zeta}=0\,,\ \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\zeta}=0\,,\ \tilde{w}=\frac{\tilde{v}}{\beta}\frac{\partial\xi}{\partial\eta},\ \tilde{p}=0\,,\ \frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=0 \tag{14}$$

$$\text{底面}:\tilde{u}=\chi_b\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\zeta},\ \tilde{v}=\chi_b\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\zeta},\ \tilde{w}=\frac{\tilde{v}}{\beta},\ \frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=0 \tag{15}$$

$$\text{中心}:\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=0\,,\ \tilde{v}=0\,,\ \frac{\partial\theta}{\partial\eta}=0 \tag{16}$$

ここに，ξは無次元水位（z_s/H）であり，χ_b は，$\tilde{\varepsilon}$=Const. とおくために，ζ に関する2次式となる $\tilde{u}$ の鉛直分布が対数則分布と平均的に一致するように slip velocity を決めるための係数で，$-\frac{1}{3}\sim-\frac{2}{3}$程度の値をとる[6]。

3．摂動法による解析

(1)　基礎式の摂動展開

流れはx方向の密度勾配，すなわち基礎式ではx方向の圧力勾配に影響されて均一流体とは少し異る流れを形成する。圧力項のみを整理すると，(10)式と(6)式から

$$\tilde{p}=\int_{\tilde{z}_s}^{\tilde{z}}\frac{\rho}{\rho_0}\cot\alpha\,d\tilde{z} \tag{17}$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}=\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\nu\cot\alpha\ (\tilde{z}-\tilde{z}_s)=2\,\sigma\,(\tilde{z}-\tilde{z}_s) \tag{18}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\eta}=\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\nu\cot\alpha\int_{\tilde{z}_s}^{\tilde{z}}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\tilde{z}-\frac{\rho_s}{\rho_0}\cot\alpha\frac{d\tilde{z}_s}{d\eta}\right\}$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{\beta}\left\{2\,\sigma\int_{\tilde{z}_s}^{\tilde{z}}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\tilde{z}-\cot\alpha\frac{d\tilde{z}_s}{d\eta}\right\} \tag{19}$$

ここに，

$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{\langle\rho\rangle\nu g H\cos\alpha}{\rho_0\,U_*^2}=\frac{1}{2}\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\nu\cot\alpha \tag{20}$$

となり，流れを支配する密度効果のパラメータσを得る。ここに，z_s は水表面の z で，$\tilde{z}_s=z_s/H$ である。σの物理的意味は，流心における密度勾配による底面応力と水面勾配による底面応力との比であり，σが増加するに伴い密度流効果が大きくなることを示す。

断面内で乱れ強度の不均一が存在すると，均一流体の流れにおいても2次流（Prandtl の第2種2次流）が生づることは知られているが，ここでは簡単のため，この2次流は無視して、密度不均一のために生づる2次流のみを解析対象とする。

σが比較的小さい流れは，$\sigma=0$の0次解を均一流体における解とする摂動展開の形で表現できるであろう。前記のことから基礎式(8)～(12)では，圧力の項のみにσが現れ，その指数が1であることから，各未知量は以下のように摂動展開できると考えられる。

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\tilde{u} & = & \tilde{u}_0 & + & \sigma\tilde{u}_1 & + & \cdots\cdots\\
\tilde{v} & = & 0 & + & \sigma\tilde{v}_1 & + & \cdots\cdots\\
\tilde{w} & = & 0 & + & \sigma\tilde{w}_1 & + & \cdots\cdots\\
\tilde{U} & = & \tilde{U}_0 & + & \sigma\tilde{U}_1 & + & \cdots\cdots\\
\tilde{z}_s & = & 0 & + & \sigma\xi_1 & + & \cdots\cdots\\
\tilde{\varepsilon} & = & \tilde{\varepsilon}_0 & + & \sigma\tilde{\varepsilon}_1 & + & \cdots\cdots\\
\tilde{e} & = & \tilde{e}_0 & + & \sigma\tilde{e}_1 & + & \cdots\cdots
\end{array}\right\} \tag{21}$$

ここに，均一流体における Prandtl の第2種2次流は無視するので，$\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{z}_s$, の0次量は存在せず，θ_0 は，$\tilde{u}_0$によって形成される密度分布を示す。

(18), (19), (21)式を(8)～(12)式に代入し，σのオーダごとに整理すると次式を得る。

σ の0次：

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\tilde{\varepsilon}_{y0}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta})+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\tilde{\varepsilon}_{z0}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\zeta})=-1 \tag{22}$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\tilde{e}_{y0}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta})+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\tilde{e}_{z0}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\zeta})=\tilde{u}_0-\tilde{U}_0 \tag{23}$$

σの1次：

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\tilde{\varepsilon}_{y1}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta}+\tilde{\varepsilon}_{y0}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\eta})+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\tilde{\varepsilon}_{z1}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\zeta}$$
$$+\tilde{\varepsilon}_{z0}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\zeta})-2\,\tilde{h}\zeta=\frac{\tilde{v}_1}{\beta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta}+\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{h}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\zeta} \tag{24}$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\tilde{\varepsilon}_{y0}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\eta})+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\tilde{\varepsilon}_{z0}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\zeta})$$
$$=\frac{1}{\beta}\left(2\int_0^{\tilde{z}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\tilde{z}-cot\alpha\frac{d\xi_1}{d\eta}\right) \tag{25}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\eta}+\frac{1}{\tilde{h}}\frac{\partial\tilde{w}_1}{\partial\zeta}=0 \tag{26}$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\tilde{e}_{y1}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}+\tilde{e}_{y0}\,\tilde{h}^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta})+\frac{\partial}{\partial\zeta}(\tilde{e}_{z1}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\zeta}$$
$$+\tilde{e}_{z0}\,\tilde{h}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\theta_1}{\partial\zeta})=(\tilde{u}_1-\tilde{U}_1)+\frac{\tilde{v}_1}{\beta}\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}+\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{h}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\zeta} \tag{27}$$

σが比較的小さい流れを解析対象としており，更に高次のオーダーまでの解を得ることも困難であるので，本研究ではσの1次オーダーまでの解析に止める。

(2)　0次解：$\tilde{u}_0$，θ_0

$\tilde{u}_0$ は三角形断面水路の均一流体の流れに対応する。三角形水路の片側半断面を解析領域としており，

$\tilde{h}=\eta$ と表わされ，$\tilde{u}_0$ の基礎式(22)は線形の微分方程式であるので，同次式

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_{00}}{\partial\eta}\right)+\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}+\frac{\partial^2\tilde{u}_{00}}{\partial\zeta^2}=0 \tag{28}$$

の解 $\tilde{u}_{00}$ と非同次式

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_{01}}{\partial\zeta^2}=-1 \tag{29}$$

の解 $\tilde{u}_{01}$の和，$\tilde{u}_0$（$=\tilde{u}_{00}+\tilde{u}_{01}$）が(22)式を満足することは明らかである。境界条件(14)，(15)式を満足する(28)(29)の解を求めると，

$$\tilde{u}_{00}=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\eta^{\lambda_i}\cos k_i\zeta \tag{30}$$

ただし

$$\begin{cases} k_i\tan k_i=-1/\chi_b & (31)\\ \lambda_i=\dfrac{1}{4}\left(-1+\sqrt{1+16\dfrac{\beta^2k_i^2}{\tilde{\varepsilon}_{y0}/\tilde{\varepsilon}_{z0}}}\right) & (32)\end{cases}$$

$$\tilde{u}_{01}=\frac{\eta^{1/2}}{\tilde{\varepsilon}_{z0}}\left(\frac{1}{2}-\chi_b-\frac{\zeta^2}{2}\right) \tag{33}$$

(30)式中の係数 A_i は，$\tilde{u}_0=\tilde{u}_{00}+\tilde{u}_{01}$ が流心（$\eta=1$）における任意の深さ ζ で境界条件(16)を満足するように決定しなければならない。しかし，このためには多くの項数をとることが必要であるが，$\tilde{u}_0$ の関数形を複雑にすると，$\tilde{u}_0$ を基に解析される θ_0 および高次解（$\tilde{u}_1$，$\tilde{v}_1$，$\tilde{w}_1$，θ_1）の解析が困難になる。そこで，$\tilde{u}_0$主要第1項のみを採用して次式で近似する。

$$\tilde{u}_{00}=A\eta^{\lambda}\cos k\zeta \tag{34}$$

ここに，kは，$k\tan k=-1/\chi_b$ を満足するkのうちの最小値をとり，λ はこの k に対する(32)式の値である。このような近似では$\eta=1$でζの全ての深さで $\partial\tilde{u}_0/\partial\eta=0$ を満足させることはできないため，$\tilde{u}_0$が最も大きな値となる水表面$\zeta=0$においてのみ $\partial\tilde{u}_0/\partial\eta=0$ を満すように係数 A を決定することとした。このような近似による解は(33)，(34)式から，

$$\tilde{u}_0=\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{z0}}\left\{\eta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\chi_b-\frac{\zeta^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\chi_b-\frac{1}{2}\right)\frac{\eta^{\lambda}}{\lambda}\cos k\zeta\right\} \tag{35}$$

鉛直線平均流速 $\bar{\tilde{u}}_0$ と断面平均速流 $\tilde{U}_0$は，

$$\bar{\tilde{u}}_0=\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{z0}}\left\{\eta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-\chi_b\right)+\frac{1}{2}\left(\chi_b-\frac{1}{2}\right)\frac{\eta^{\lambda}}{\lambda}\frac{\sin k}{k}\right\} \tag{36}$$

$$\tilde{U}_0=\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{z0}}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}-\chi_b\right)+\frac{\left(\chi_b-\frac{1}{2}\right)}{\lambda(\lambda+2)}\cdot\frac{\sin k}{k}\right\} \tag{37}$$

θ_0 は，$\tilde{u}_0$の移流速度と渦拡散によって断面内に形成される密度分布を表す。基礎式は(23)式であるが，右辺の断面平均がらの偏差流速を $\tilde{u}_0-\tilde{U}_0=(\tilde{u}_0-\bar{\tilde{u}}_0)+(\bar{\tilde{u}}_0-\tilde{U}_0)$ のように，任意点流速の鉛直線平均流速からの偏差流速（$\tilde{u}_0-\bar{\tilde{u}}_0$）と鉛直線平均流速の断面平均流速からの偏差流速（$\bar{\tilde{u}}_0-\tilde{U}_0$）とに分け，前者の偏差流速による移流と鉛直方向拡散との釣合いで密度の鉛直分布が形成され，後者の偏差流速による移流と横断方向渦拡散により横方向密度分布が主として形成される筈であるので，それぞれの機構で形成される分布の和として θ_0 を求める。すなわち，

$$\frac{\tilde{e}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_{00}}{\partial\eta}\right)+\frac{\tilde{e}_{z0}}{\eta^{1/2}}\cdot\frac{\partial^2\theta_{00}}{\partial\zeta^2}=0 \tag{38}$$

$$\frac{\tilde{e}_{z0}}{\eta^{1/2}}\cdot\frac{\partial^2\theta_{01}}{\partial\zeta^2}=\tilde{u}_0-\bar{\tilde{u}}_0 \tag{39}$$

$$\frac{\tilde{e}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_{02}}{\partial\eta}\right)=\bar{\tilde{u}}_0-\tilde{U}_0 \tag{40}$$

ここに，$\theta_0=\theta_{00}+\theta_{01}+\theta_{02}$ である。

θ_{00}は，$\tilde{u}_{00}$の式形(28)と同じであり，変数分離法で解くことができ，境界条件(14)，(15)式を満す解は，

$$\theta_{00}=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\,\eta^{\kappa_i}\cos n_i\zeta \tag{41}$$

ただし，$\begin{cases} n_i=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots\\ \kappa_i=\dfrac{1}{4}\left(-1+\sqrt{1+16\dfrac{\beta^2n_i^2}{\tilde{e}_{y0}/\tilde{e}_{z0}}}\right)\end{cases}$ (42)

係数 C_i は，境界条件である流心$\eta=1$において全ゆるζで η 方向 flux$=0$ すなわち $\partial\theta_0/\partial\eta=0$ が満たされるように決められるべきであるが，$\tilde{u}_{00}$と同じく，高次解の解析を複雑にしないため，第1項のみを採り

$$\theta_{00}=C\eta^{\kappa}\cos\pi\zeta \tag{43}$$

ただし，$\kappa=\dfrac{1}{4}\left(-1+\sqrt{1+16\dfrac{\beta^2\pi^2}{\tilde{e}_{y0}/\tilde{e}_{z0}}}\right)$

と表す。(39)式の解は，積分定数 $C_i(\eta)$を条件$\int_0^1\theta_{01}\,d\zeta=0$から決めて，

$$\begin{aligned}\theta_{01}&=\frac{\eta^{1/2}}{\tilde{e}_{z0}}\int_0^{\zeta}\int_0^{\zeta}(\tilde{u}_0-\bar{\tilde{u}}_0)d\zeta d\zeta+C_1(\eta)\\&=\frac{1}{\tilde{e}_{z0}\,\tilde{\varepsilon}_{z0}}\left[\eta\left(\frac{\zeta^2}{12}-\frac{\zeta^4}{24}-\frac{7}{360}\right)-\frac{1}{2}\left(\chi_b-\frac{1}{2}\right)\frac{\eta^{\lambda+1/2}}{\lambda}\right.\\&\quad\left.\times\left\{\frac{\cos k\zeta}{k^2}+\frac{\sin k}{k}\left(\frac{\zeta^2}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{k^2}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{44}$$

(40)式の解は，積分定数 C_2 を θ_{02} の断面平均を0とするように決めて，

$$\begin{aligned}\theta_{02}&=\frac{\beta^2}{\tilde{e}_{y0}}\int_0^{\eta}\eta^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\eta}(\bar{\tilde{u}}_0-\tilde{U}_0)d\eta d\eta+C_2\\&=\frac{\beta^2}{\tilde{e}_{y0}\,\tilde{\varepsilon}_{z0}}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}-\chi_b\right)\left(\frac{14}{15}-2\eta^{\frac{1}{2}}+\eta\right)+\frac{1}{2}\frac{\left(\chi_b-\frac{1}{2}\right)}{\lambda(\lambda+2)}\right.\\&\quad\left.\times\frac{\sin k}{k}\left\{\frac{1}{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\eta^{\lambda+\frac{1}{2}}-\frac{2}{\lambda+\frac{5}{2}}\right)-2\left(\eta^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{5}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{45}$$

θ_0 はθ_{00}，θ_{01}，θ_{02} の和で与えられるが，アスペクト比 β が大きい流れを対象としているので，その3者

の中では θ_{02} すなわち鉛直線平均流速 $\bar{\tilde{u}}_0$ の断面平均流速からの偏差で形成される密度分布が主要な項となる。

また，(43)式の係数 C は，θ_0 が $\eta=1$，$\zeta=0$ において $\partial\theta_0/\partial\eta=0$ を満すように決められ，

$$C=\frac{1}{\kappa\tilde{\varepsilon}_{z0}\,\tilde{\varepsilon}_{z0}}\Big[\frac{7}{360}-\frac{1}{2}(\chi_b-\frac{1}{2})\frac{\lambda+\frac{1}{2}}{\lambda}\frac{\sin k}{k}\times(\frac{1}{6}+\frac{1}{k^2})\Big\{-\frac{1}{k^2}+\frac{\sin k}{k}(\frac{1}{6}+\frac{1}{k^2})\Big\}\Big] \quad (46)$$

(3)　1次解

a．2次流速 $\tilde{v}_1$ および横断方向水面勾配 $d\xi_1/d\eta$

1次解は先づ(25)式により $\tilde{v}_1$ の解析が可能である。次にはこの $\tilde{v}_1$ に(26)式を用いて $\tilde{w}_1$ を求めることができる。$\tilde{u}_0$，$\tilde{v}_1$，$\tilde{w}_1$ が既知となった段階で $\tilde{u}_1$ が(24)式で解析できて，最終的には(27)式にそれまでに求められた流速とθ_0 の情報を用いてθ_1 を求めることができる。原理的には一連の未知量が連鎖的に解析可能となって行くが、厳密解を得ることは殆ど困難である。そこで，アスペクト比 β が大きな値をもつことを条件に近似解を求める。

$\tilde{v}_1$ の支配方程式は(25)式で与えられる。

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\eta})+\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{\beta}\Big\{2\eta\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta-\cot\alpha\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta}\Big\} \quad (25)$$

$\beta\gg1$ であることから，左辺では第2項が主要であるから，同式方程式の解 $\tilde{v}_{10}$ と左辺第1項を省略した非同次方程式の解 $\tilde{v}_{11}$ の和として $\tilde{v}_1(=\tilde{v}_{10}+\tilde{v}_{11})$ が与えられるとして

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{v}_{10}}{\partial\eta})+\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{v}_{10}}{\partial\zeta^2}=0 \quad (47)$$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{v}_{11}}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{\beta}\{2\eta\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta-\cot\alpha\frac{d\xi_1}{d\eta}\} \quad (48)$$

境界条件(14)，(15)式を満足する(47)式の解は，(30)式の $\tilde{u}_{00}$ と同じく級数和として得られるが，$\tilde{u}_{00}$ の近似と同様に主要項の1項のみをとり

$$\tilde{v}_{10}=G\,\eta^\mu\cos l\zeta \quad (49)$$

ただし，
$$\begin{cases} l\tan l=-1/\chi_b \\ \mu=\dfrac{1}{4}(-1+\sqrt{1+16\dfrac{\beta^2 l^2}{\tilde{\varepsilon}_{y0}/\tilde{\varepsilon}_{z0}}}) \end{cases} \quad (50)$$

により近似する。(50)を満す ℓ は無数に存在するが，そのうち小さい方から2番目のものを採用する。これは，$\tilde{v}_1$ が表層と底層で流向が逆になることを考慮すると，$\pi<\ell<3\pi$ の範囲にあることが必要との理由からである。

(49)式の $\tilde{v}_{10}$ は水面･底面での境界条件を満しているので，(48)式の解 $\tilde{v}_{11}$ も独立に水面･底面で境界条件(14)，(15)式を満足する必要がある。この境界条件を満す(48)式の解は，ζ によらない関数 $C_3(\eta)$ を含んで

$$\tilde{v}_{11}=\frac{\eta^{1/2}}{\beta\tilde{\varepsilon}_{z0}}\Big\{2\eta\int_0^\zeta\int_0^\zeta\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta d\zeta d\zeta-\cot\alpha\frac{d\xi_1}{d\eta}\cdot\frac{\zeta^2}{2}+C_3(\eta)\Big\} \quad (51)$$

ただし，

$$C_3(\eta)=2\eta\Big\{\chi_b\int_0^1\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta d\zeta-\int_0^1\int_0^\zeta\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta\,d\zeta\,d\zeta\Big\}-\frac{1}{2}\cot\alpha\frac{d\xi_1}{d\eta} \quad (52)$$

(49)式の未定の係数 G は，$\eta=1$，$\zeta=0$ において $\tilde{v}_1=0$ を満すように決める。$\tilde{v}_{10}$を級数和で与えるべきところ，(49)式のように1項のみによる近似を用いているため，$\eta=1$ で全ての深さ ζ で $\tilde{v}_1=0$ を満し得ないが，$\tilde{v}_1$ が最も大きな水面（$\zeta=0$）で $\tilde{v}_1=0$ を満させれば，他の深さでは充分の精度で $\tilde{v}_1=0$ を満し得るであろう。ところで，流心 $\eta=1$ において，$d\xi_1/d\eta=0$，$\partial\theta_0/\partial\eta=0$ であるから，(51)式で $\eta=1$，$\zeta=0$ において $\tilde{v}_{11}=0$，従って，同じ点で $\tilde{v}_{10}=0$ でなければならず，結局 $G=0$ となる。よって，$\tilde{v}_1=\tilde{v}_{11}$ となる。

(51)式中の横断方向水面勾配 $d\xi_1/d\eta$ は未知であるが，鉛直線を横切る正味の流量が0であるので $\int_0^1\tilde{v}_1\,d\zeta=0$ から決められ，

$$\frac{d\xi_1}{d\eta}=3\eta\tan\alpha\Big\{\int_0^1\int_0^\zeta\int_0^\zeta\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta\,d\zeta\,d\zeta\,d\zeta+\chi_b\int_0^1\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta\,d\zeta-\int_0^1\int_0^\zeta\int_0^\zeta\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}d\zeta\,d\zeta\,d\zeta\Big\} \quad (53)$$

によって与えられる。

b．鉛直流速 $\tilde{w}_1$ および主流速 $\tilde{v}_1$

鉛直流速の支配方程式は z 方向の運動方程式であるが，静水圧分布を仮定して(3)から w を省略したので運動方程式は用い得ない。上記のように $\tilde{v}_1$ が得られるので鉛直流速 $\tilde{w}_1$ は連続の式(26)を積分して求められる。

$$\frac{\partial\tilde{w}_1}{\partial\zeta}=-\frac{\eta}{\beta}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\eta} \quad (26)$$

水面の位置は厳密には ξ_1，そこにおける鉛直流速は $\tilde{w}_1=(\tilde{v}_1/\beta)(d\xi_1/d\eta)$ であるが，その値はいづれも微小であるので，簡単のため $\zeta=0$ で $\tilde{w}_1=0$ とし，(51)～(53)式の表示を用いて

$$\tilde{w}_1=-\frac{\eta}{\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^{\zeta}\tilde{v}_1\,d\zeta$$

$$=-\frac{\eta}{\beta}\Big\{2\eta\int_0^{\zeta}\iiint\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}\,d\zeta\,d\zeta\,d\zeta\,d\zeta$$

$$-\cot\alpha\frac{d\xi_1}{d\eta}\frac{\zeta^3}{6}+C_3(\eta)\zeta\Big\} \tag{54}$$

により与えられるものとする。従って，底面($\zeta=1$)においても $\tilde{w}_1=0$ となる。

次に，$\tilde{v}_0$，$\tilde{v}_1$，$\tilde{w}_1$ が得られたので(24)式より $\tilde{u}_1$ を求める。

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\eta})+\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\zeta^2}$$

$$=2\eta\zeta+\frac{\tilde{v}_1}{\beta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta}+\frac{\tilde{w}_1}{\eta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\zeta}$$

$$-\frac{\tilde{\varepsilon}_{y1}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta})-\frac{\tilde{\varepsilon}_{z1}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial\zeta^2} \tag{24}$$

上式の右辺は既知量であるので原理的には解析可能であるが，右辺が相当複雑であるので，このまま解析解を得ることは困難である。そこで前と同様に，同次式の解 $\tilde{u}_{10}$ と左辺第1項を省略した非同次式の解 $\tilde{u}_{11}$ の和で $\tilde{u}_1$ ($=\tilde{u}_{10}+\tilde{u}_{11}$) を求めることにして，

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_{10}}{\partial\eta})+\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_{10}}{\partial\zeta^2}=0 \tag{55}$$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_{11}}{\partial\zeta^2}=2\eta\zeta+\frac{\tilde{v}_1}{\beta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta}+\frac{\partial\tilde{w}_1}{\eta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\zeta}$$

$$-\frac{\tilde{\varepsilon}_{y1}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta})-\frac{\tilde{\varepsilon}_{z1}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial\zeta^2}=0 \tag{56}$$

を解く。(55)式は $\tilde{u}_{00}$ の(28)式と同形であり，その解は級数和で与えられるが，その中の主要第1項をとり

$$\tilde{u}_{10}=A_1\,\eta^{\lambda_1}\cos k_1\zeta \tag{57}$$

ただし，$\lambda_1=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{1+16\frac{\beta^2k_i^2}{\tilde{\varepsilon}_{y0}/\tilde{\varepsilon}_{z0}}})$

ここに，k_1 は，$k_1\tan k_1=-1/\chi_b$ を満たす k_1 のうち最小のものをとる。

$\tilde{u}_{11}$ は(56)式の2回の積分と，水面·底面での境界条件を用いて，

$$\tilde{u}_{11}=\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{z0}}\Big[\eta^{\frac{1}{2}}\Big\{\int_0^{\zeta}\int_0^{\zeta}F\,d\zeta d\zeta$$

$$+\chi_b\int_0^1F\,d\zeta-\int_0^1\int_0^{\zeta}F\,d\zeta\,d\zeta\Big\}$$

$$+\eta^{\frac{3}{2}}(\frac{\zeta^3}{3}+\chi_b-\frac{1}{3})-\tilde{\varepsilon}_{z1}\tilde{u}_0\Big] \tag{58}$$

ただし，$F=\frac{\tilde{v}_1}{\beta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\eta}+\frac{\tilde{w}_1}{\eta}\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\zeta}$

(57)式の未定の係数 A_1 は流心 $\eta=1$ での境界条件 $\partial\tilde{u}_1/\partial\eta=0$ から決められるが，$\tilde{u}_0$ と同じ理由で，$\zeta=0$ においてこの条件を成立させると，

$$A_1=-\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{z0}\,\lambda_1}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\Big\{\chi_b\,\eta^{\frac{1}{2}}\int_0^1F\,d\zeta$$

$$-\eta^{\frac{1}{2}}\int_0^1\int_0^{\zeta}F\,d\zeta\,d\zeta\Big\}_{\eta=1}-\frac{3}{2}(\chi_b-\frac{1}{3})\Big] \tag{59}$$

となり，$\tilde{u}_1$ が決まる。非常に長い式になるため記述は省くが，2次流の鉛直線平均流速 $\bar{\tilde{u}}_1$ と断面平均流速 $\tilde{U}_1$ は次式で計算される。

$$\bar{\tilde{u}}_1=\int_0^1\tilde{u}_1\,d\zeta,\quad \tilde{U}_1=\int_0^1\bar{\tilde{u}}_1\,d\eta\Big/\int_0^1\eta\,d\eta \tag{60}$$

ただし，$\tilde{u}_{11}$ の誘導過程において $\tilde{\varepsilon}_{y1}=0$ とおいている。これは密度流効果により成層化された流れでは，鉛直方向の渦動粘性係数は抑制され減少するが，水平方向のそれは変化がなくσの影響を受けないと仮定しているからである。

c. 2次流により形成される密度分布 θ_1

θ_1 の支配方程式は(27)式で与えられる。右辺の2，3項の流速を連続の式を用いて微分の中に含ませて記述すると，

$$\frac{\tilde{e}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta})+\frac{\tilde{e}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_1}{\partial\zeta^2}$$

$$=(\tilde{u}_1-\tilde{U}_1)+\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tilde{v}_1\,\theta_0}{\partial\eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\tilde{w}_1\,\theta_0}{\partial\zeta}$$

$$-\frac{\tilde{e}_{y1}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta})-\frac{\tilde{e}_{z1}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_0}{\partial\zeta^2} \tag{27}$$

上式を次のように分解して近似的に解く。

$$\frac{\tilde{e}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_{10}}{\partial\eta})+\frac{\tilde{e}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_{10}}{\partial\zeta^2}=0 \tag{61}$$

$$\frac{\tilde{e}_{y0}}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\theta_{11}}{\partial\eta})=(\bar{\tilde{u}}_1\quad\tilde{U}_1)+\frac{1}{\beta}\frac{\bar{\tilde{v}}_1\,\theta_0}{\partial\eta} \tag{62}$$

$$\frac{\tilde{e}_{z0}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\,\theta_{12}}{\partial\zeta^2}=(\tilde{u}_1-\bar{\tilde{u}}_1)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\tilde{w}_1\,\theta_0}{\partial\zeta}-\frac{\tilde{e}_{z1}}{\eta^{1/2}}\frac{\partial^2\,\theta_0}{\partial\zeta^2} \tag{63}$$

すなわち，同次方程式の解 θ_{10} と非同次方程式の解は，主流の偏差流速($\bar{\tilde{u}}_1-\tilde{U}_1$)による移流と η 方向の移流と η 方向渦拡散の3者により形成される分布 θ_{11} および鉛直線偏差流速($\tilde{u}_1-\bar{\tilde{u}}_1$)による移流と ζ 方向移流と ζ 方向渦拡散との3者による分布 θ_{12} との和で θ_1 ($=\theta_{10}+\theta_{11}+\theta_{12}$)が求められるとする。ただし，$\tilde{e}_{y1}$ は，前記の $\tilde{e}_{y1}=0$ とした同じ理由で0とした。前出の記号を用いてこれらの解を記述すると，

$$\theta_{10}=C_1\,\eta^{\kappa_1}\cos\pi\zeta \tag{64}$$

ただし，$\kappa_1=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{1+16\frac{\beta^2\pi^2}{\tilde{e}_{y0}/\tilde{e}_{z0}}})$

$$\theta_{11}=\frac{1}{\tilde{e}_{y0}}\Big\{\beta^2\int_0^{\eta}\eta^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\eta}(\bar{\tilde{u}}_1-\tilde{U}_1)d\eta d\eta$$

$$+\beta\int_0^{\eta}\tilde{v}_1\,\theta_0\,d\eta+C_3\Big\} \qquad (65)$$

ここに，C_3は，$\int_0^1\eta\theta_{11}\,d\eta=0$ となるように決める。

$$\theta_{12}=\frac{1}{\tilde{e}_0}\Big\{\int_0^{\zeta}\int_0^{\zeta}\eta^{\frac{1}{2}}(\tilde{u}_1-\bar{\tilde{u}}_1)\,d\zeta d\zeta$$

$$+\int_0^{\zeta}\eta^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{w}_1\,\theta_0\,d\zeta\Big\}+\frac{\tilde{e}_{z1}}{\tilde{e}_{z0}}(\theta_0(\zeta)-\theta_0(0))+C_4 \qquad (67)$$

ここに，C_4 は，$\int_0^1\theta_{12}\,d\zeta=0$ となるように決める。

4．計算結果と考察

導出した諸式の数値計算を実行するためには，いくつかの係数を決める必要がある。基本的には，実際の流れに対応する数値を用いなければならないが，ここでは実験との比較はしないので，一般に使用されている値を採用して計算する。

先づ，χ_b の物理的意味とその数値を検討しておく。2次元開水路の水深 h の等流において，水面から下向きに z 軸をとると，流れ方向の運動方程式は，

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=-g\sin\alpha \qquad (68)$$

ε=const.，$u_*^2=gh\sin\alpha$として水面($z=0$)で $du/dz=0$の境界条件で積分すると，

$$\frac{du/u_*}{dz/h}=-\frac{h\,u_*}{\varepsilon}\Big(\frac{z}{h}\Big),\ \frac{u}{u_*}=\frac{h\,u_*}{\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{z}{h}\Big)^2+C\Big\} \qquad (69)$$

C に$-1/2$により小さい値を与えると，底面（$z=h$）で ship velocity を許すことになる。上記2式から底面においては次の関係がある。

$$\frac{u}{u_*}=\Big(\frac{1}{2}+C\Big)\frac{du/u_*}{dz/h} \qquad (70)$$

ここで，$\chi_b=1/2+C$ とおくと，境界条件(15)式 $\tilde{u}=\chi_b(d\tilde{u}/d\zeta)$を得る。

ところで，流速係数（$\bar{u}/u_*$)は，(69)式から

$$\frac{\bar{u}}{u_*}=-\frac{h\,u_*}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{6}+C\Big) \qquad (71)$$

で与えられる。($\bar{u}/u_*$）は水路抵抗により8～25，一般には15程度の値をとる。また，渦動粘性係数を $\varepsilon=ahu_*$ とおくとき，対数流速分布を与える平均の渦動粘性係数から求められる a は$\kappa/6$（κ：Kármán 定数，0.41）である。そこで，$\bar{u}/u_*=15$，$\alpha=1/15$とおくと，$C=-7/6$，$\chi_b=-2/3$ となるので，この χ_b の値を使用する。

次に，渦動粘性係数と渦拡散係数は等しいと仮定し，鉛直方向の値は，対数則から得られる$\tilde{\varepsilon}_{z0}=\tilde{e}_{z0}=1/15$，横断方向のものは，Fischer[3] がまとめた値，$\tilde{\varepsilon}_{y0}=\tilde{e}_{y0}=0.15$を用いる。また，$\sigma$による渦動粘性係数の減衰に関しては，Fujisakiら[2] が k～ε モデルで計算した結果の断面平均近似値 $\tilde{\varepsilon}_{z1}=\tilde{e}_{z1}=-2.3$を用いる。

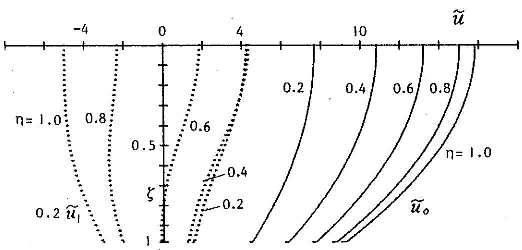

Fig-2．Vertical prifiles of longitudinal primary velocity $\tilde{u}_0$ and secondary velocity $\tilde{u}_1$.

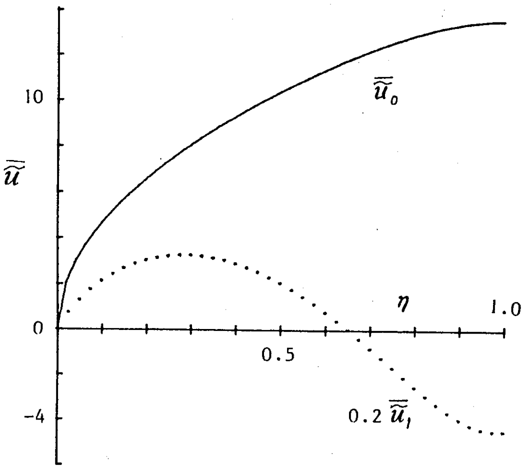

Fig-3．Lateral distributions of longitudinal velocity averaged vertically, $\bar{\tilde{u}}_0$ and $\bar{\tilde{u}}_1$.

β は計算結果に大いに関わるが，ここでは $\beta=10$とした計算例を示す。

Fig－2は主流速 $\tilde{u}_0$ と $\tilde{u}_1$ の鉛直分布を位置 η をパラメータに示している。また，Fig－3は鉛直方向に平均化された主流速 $\bar{\tilde{u}}_0$ と $\bar{\tilde{u}}_1$ の横断方向分布を示している。η が小さい浅い側の $\bar{\tilde{u}}_0$ は小さく，深い側に大きくなることは当然のことであるが，密度流効果から生れる $\bar{\tilde{u}}_1$ は逆に浅い側の $\bar{\tilde{u}}_1$ が正，深い側で負となっており，密度勾配のある流れの流速が $\bar{\tilde{u}}_1=\bar{\tilde{u}}_0+\sigma\bar{\tilde{u}}_1$ で与えられることを考えると，σ の存在により主流速は断面内で一様化されることが分る。

Fig－4は無次元密度分布 θ_0，θ_1 の鉛直分布を位置ηをパラメータに示している。Fig－5は鉛直方向に平均化された密度 $\bar{\theta}_0$，$\bar{\theta}_1$ の横断方向分布を示している。θ_0 は鉛直方向には殆んど変化なく，横断方向に分布し，浅い側の密度が高く(正)，深い側に低い(負)。これは，流速の深い側には密度の低い上流水の移流があり，流速の遅い浅い側には密度の高い水が残ること

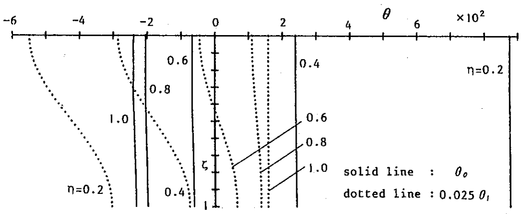

Fig- 4 . Vertical distributions of density, θ_0 and θ_1 .

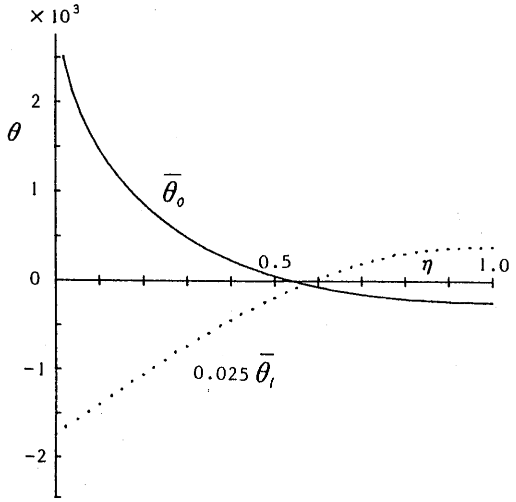

Fig- 5 . Lateral distributions of density averaged vertically, $\overline{\theta}_0$ and $\overline{\theta}_1$.

による。密度流効果で生ずる密度 θ_1 は η の小さな浅い側で負，深い側で正となり，σ の存在する流れの密度が $\theta=\theta_0+\sigma\theta_1$ で与えられることを考えれば，σ の存在は，密度に関しても横断方向に一様化させる効果をもつ。ただし，鉛直方向には浅い側で θ の変化をもたらすことが分る。

Fig－6には水平方向2次流 $\tilde{v}_1$ の，Fig－7には鉛直方向2次流のそれぞれ鉛直分布を位置 η ごとに示している。$\tilde{v}_1$ はいづれの位置 η でも底層で正，表層で負となる。すなわち，底層で浅い側から深い側に，表層で深い側から浅い側に向う流れが生じる。$\tilde{w}_1$ は浅い側で正，すなわち下向きの流れが，深い側で負，すなわち上向きの流れが生ずる。$\tilde{v}_1$，$\tilde{w}_1$ から三角形水路の片側半断面の中で1つの循環流が形成されることが理解される。

5．おわりに

流れ方向に一定の密度勾配をもつ流れを三角形断面水路について理論的に解析した。一定密度勾配の流れで横断方向に移流速度の違いが存在すると，横断方向にも密度勾配を生じ，これが断面内に重力循環流を生む。更には，断面内循環流は，断面内の運動量および

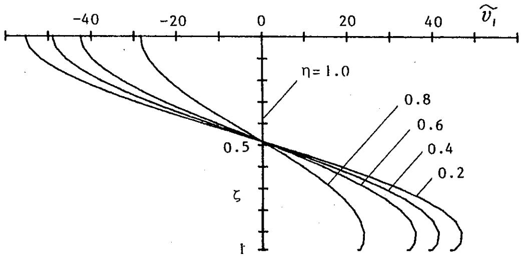

Fig- 6 . Vertical profiles of secondary lateral velocity $\tilde{v}_0$.

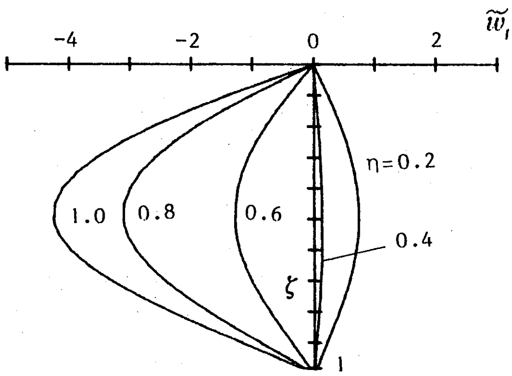

Fig- 7 . Vertidal profiles of secondary vertical velocity $\tilde{w}_1$.

物質の輸送により主流速 $\tilde{u}$ と密度 θ の断面内一様化をもたらす。このことは1．にも述べたが，感潮域における分散係数が密度効果の増加とともに減少する事象の説明にもつながるものと考える。

本論文では理論解析のみを述べたが，実験による検証が残されている。別の機会に公表する予定である。

参　考　文　献

1）土木学会：水理公式集，土木学会，pp.57－62，1985.

2）Fujisaki, K., Yoshitake, N. and Hayashi, H.: Longitudinal dispersion of buoyant matter in Turbulent open channel flow, J. of Hydro. and Hydraulic Eng., Vol. 10, No. 2 , pp. 27－37, 1992.

3）Fischer, H. B. et al.: Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press, pp.136, pp. 107, 1979.

4）Furumoto, K. and Awaya, Y.: Estimation of salinity intrusion in tidal estuaries, J of Hydro. and Hydraulic Eng., Vol. 5 , No. 2 , pp. 39－52, 1988.

5）Smith, R: Long-term dispersion of contaminants in small estuaries, J. Fluid Mech., Vol. 82, Part 1 , pp. 129－146, 1977.

6）山坂，池田，酒寄：一様湾曲流路の流れの三次元解析，土木学会論文集，第411号／Ⅱ－12，1989.