

一般曲線座標を用いた堰のまわりの流れの数値解析

薦田 廣章*・森元 賢哉**

Numerical Simulation for Flows around Weir in General Curvilinear Coordinates.

by

Hiroaki KOMODA*, Kenya MORIMOTO**

In this study, we present a numerical procedure to solve unsteady incompressible turbulent flows in arbitrary shapes. The basic equations are continuity and two-dimensional time dependent Reynolds averaged Navier-stokes equations in general curvilinear coordinates. Moreover, to describe the turbulent flows, we use a standard $k-\varepsilon$ model which consists of transport equations for the kinetic energy k and its dissipation rate ε .

The numerical calculation results are in fine agreement with the experiments in velocity and kinetic energy profiles.

1. はじめに

本論文は様々な形状の流れ場を計算する手法を提示するものである。基礎方程式は連続方程式と2次元レイノルズ方程式である。まず、物理領域を任意の形状格子網に分割する。その際、水路床の格子間隔を密に設定することも可能である。まず最初に、基礎方程式（連続式およびレイノルズ方程式）を一般曲線座標で表示する必要がある。また同時に、高レイノルズ数の流れ場の乱流諸量を評価するために標準的な $k-\varepsilon$ モデルを採用する。この乱流モデルは乱流エネルギー k とその散逸率 ε についての輸送方程式から構成される。計算プログラムは以下の点を考慮して作成した。

- ① 基礎式を一般曲線座標で展開しコントロールボリューム法を用いている。したがって、任意の形状の格子網が計算可能である。
- ② 移流項の差分化に際し3次精度の上流差分スキ-

ムの QUICK スキームを用いているので、計算中に生じる非物理的振動を防ぐことができる。

- ③ 自由表面は free-slip の固定形状と仮定しているが、運動学的条件、連続条件は満足している。
 - ④ 高レイノルズ数の乱流場が解析できるように標準的な $k-\varepsilon$ モデルを組み込んでいる。
 - ⑤ 流速の時間積分において2段階ステップの陰解法を適用している。
 - ⑥ 乱流エネルギー k , エネルギー散逸率 ε の時間積分においても同様の陰解法を適用している。
- さらに、計算結果と実験結果の比較・検討もおこなった。

2. 基礎方程式

2.1 連続方程式およびレイノルズ方程式

2次元非圧縮性粘性流体の連続式およびレイノルズ

平成5年9月30日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**大学院修士過程土木工学専攻 (Graduate School of Engineering, Division of Civil Engineering)

方程式は直角座標 (x, y) においては以下ようになる。

$$u_x + v_y = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_t + (uu)_x + (uv)_y \\ = -\hat{p}_x + [2(1/Re + \nu_t)u_x]_x \\ + [(1/Re + \nu_t)(u_y + v_x)]_y + g_x \\ u_t + (uv)_x + (vv)_y \\ = -\hat{p}_y + [(1/Re + \nu_t)(v_x + u_y)]_x \\ + [2(1/Re + \nu_t)v_y]_y + g_y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに, u, v はそれぞれ x, y 方向の平均流速成分, \hat{p} は圧力 ($\hat{p} = p + 2/3k$), Re はレイノルズ数, そして g_x, g_y はそれぞれ x, y 方向の重力加速度成分である。また, ν_t は渦動粘性係数であり,

$$\nu_t = C_\mu k^2 \varepsilon^{-1} \quad (3)$$

とおくことができる。ただし, 移流項は保存形式で表現しており, 右下の添字は偏微分記号を示している。

つきに, 次式の関係を用いて上記の基礎方程式を直角座標 (x, y) から一般曲線座標 (ξ, η) へ変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

変換した結果を以下に示す¹⁾。

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{E}_\xi + \mathbf{F}_\eta = [(1/Re + \nu_t)\mathbf{R}]_\xi + [(1/Re + \nu_t)\mathbf{S}]_\eta + \mathbf{T} \quad (5)$$

ここに, 各ベクトル成分は以下の式で示される。

$$\mathbf{q} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{E} = J^{-1} \begin{pmatrix} U \\ uU + \xi_x \hat{p} \\ vV + \xi_y \hat{p} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{F} = J^{-1} \begin{pmatrix} V \\ uV + \eta_x \hat{p} \\ vV + \eta_y \hat{p} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{R} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ (2\xi_x^2 + \xi_y^2)u_\xi + (2\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)u_\eta \\ + \xi_y(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) \\ (\xi_x^2 + 2\xi_y^2)v_\xi + (\xi_x\eta_x + 2\xi_y\eta_y)v_\eta \\ + \xi_x(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{S} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ (2\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)u_\xi + (2\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta \\ + \eta_y(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) \\ (\xi_x\eta_x + 2\xi_y\eta_y)v_\xi + (\eta_x^2 + 2\eta_y^2)v_\eta \\ + \eta_x(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{T} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g_x \\ g_y \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

(6)式の U, V および J は変換後の ξ, η 座標の流速成分 (反変流速成分) およびヤコビアン (Jacobian) で以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (8)$$

2. 2 乱流エネルギー k

およびエネルギー散逸率 ε の輸送方程式

2次元直角座標 (x, y) における k および ε の輸送方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned} k_t + (ku)_x + (kv)_y \\ = [(1/Re + \nu_t/\sigma_k)k_x]_x \\ + [(1/Re + \nu_t/\sigma_k)k_y]_y + \nu_t E_p - \varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t + (\varepsilon u)_x + (\varepsilon v)_y \\ = [(1/Re + \nu_t/\sigma_\varepsilon)\varepsilon_x]_x \\ + [(1/Re + \nu_t/\sigma_\varepsilon)\varepsilon_y]_y \\ + C_1 \nu_t (\varepsilon/k) E_p - C_2 (\varepsilon^2/k) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに, E_p は乱流エネルギー生産項のうち ν_t を除いた成分であり, 次式で示される。

$$E_p = 2[(u_x)^2 + (v_y)^2] + (u_y + v_x)^2 \quad (11)$$

(9)~(11)式は一般曲線座標 (ξ, η) を用いると以下

のように変換される。

$$\begin{aligned} & (J^{-1}k)_i + (J^{-1}kU)_\xi + (J^{-1}kV)_\eta \\ &= [J^{-1}\{(\xi_x^2 + \xi_y^2)k_\xi + (\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)k_\eta\} \\ &\quad \times (1/Re + \nu_t/\sigma_k)]_\xi \\ &+ [J^{-1}\{(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)k_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2)k_\eta\} \\ &\quad \times (1/Re + \nu_t/\sigma_k)]_\eta \\ &+ J^{-1}\nu_t E_p - J^{-1}\epsilon \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & (J^{-1}\epsilon)_i + (J^{-1}\epsilon U)_\xi + (J^{-1}\epsilon V)_\eta \\ &= [J^{-1}\{(\xi_x^2 + \xi_y^2)\epsilon_\xi + (\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)\epsilon_\eta\} \\ &\quad \times (1/Re + \nu_t/\sigma_\epsilon)]_\xi \\ &+ [J^{-1}\{(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)\epsilon_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2)\epsilon_\eta\} \\ &\quad \times (1/Re + \nu_t/\sigma_\epsilon)]_\eta \\ &+ J^{-1}C_1\nu_t E_p \epsilon k^{-1} - J^{-1}C_2\epsilon^2 k^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 ν_t は式(3)で表される。

$$\begin{aligned} E_p &= 2 [J\{(J^{-1}\xi_x u)_\xi + (J^{-1}\eta_x u)_\eta\}]^2 \\ &+ 2 [J\{(J^{-1}\xi_y v)_\xi + (J^{-1}\eta_y v)_\eta\}]^2 \\ &+ [J\{(J^{-1}\xi_x u)_\xi + (J^{-1}\eta_x u)_\eta \\ &\quad + (J^{-1}\xi_y v)_\xi + (J^{-1}\eta_y v)_\eta\}]^2 \end{aligned} \quad (14)$$

また、上記のモデルの定数は標準的な以下の値を用いる。

$$\left. \begin{aligned} C_\mu &= 0.09 \\ C_1 &= 1.44 \\ C_2 &= 1.92 \\ \sigma_k &= 1.00 \\ \sigma_\epsilon &= 1.30 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

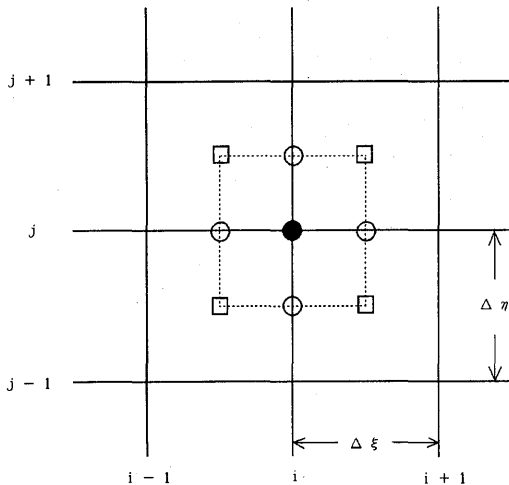


Fig. 1 Regular Grid

2. 3 離散化

離散化においては、流速 u, v と圧力 p を同一点で定義する Regular Grid を用いる。Fig. 1 に示す節点(●印)において u, v および p を定義し、節点の中間を通境界面に囲まれたコントロール・ボリュームで各支配方程式(5), (12)および(13)を積分する。

2. 4 QUICK スキーム

従来のスキームで用いる 2 次精度の中央差分による移流項近似は、3 階の打ち切り誤差を含んでおり、高いレイノルズ数流れにおいて移流項の非物理的振動が生じる。よって、本研究は QUICK 法 (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics algorithm)^{2) 3)} を用いた。これは、コントロール・ボリュームの境界面に分離させた移流項を求めるために、2 次の上流補間 (曲率項) を用いる方法である。この方法によって、コントロール・ボリュームの境界面での移流項は 3 階の打ち切り誤差を含み、これを積分して求める移流項は 4 階の打ち切り誤差を含むことになる。

前述の QUICK 法を一般曲線座標に適用した GQ (Generalized QUICK) 法⁴⁾ の適用例を以下に示す。

$$\begin{aligned} & (J^{-1}uU)_{i+1/2, j} \\ &= (J^{-1}U)_{i+1/2, j} \{ (1/2)(u_{i+1, j} + u_{i, j}) \\ &\quad - (\delta\xi^2/8) CURV u_{i+1/2, j}^\xi \\ &\quad + (\delta\eta^2/24) CURV u_{i+1/2, j}^\eta \} \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)の CURV 項は $J^{-1}U$ の風向きによって以下のように分けられる。

if $J^{-1}U_{i+1/2, j} > 0$:

$$\begin{aligned} & CURV u_{i+1/2, j}^\xi \\ &= (u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j})/\delta\xi^2 \end{aligned} \quad (17.1)$$

$$\begin{aligned} & CURV u_{i+1/2, j}^\eta \\ &= (u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1})/\delta\eta^2 \end{aligned} \quad (17.2)$$

if $J^{-1}U_{i+1/2, j} < 0$:

$$\begin{aligned} & CURV u_{i+1/2, j}^\xi \\ &= (u_{i+2, j} - 2u_{i+1, j} + u_{i, j})/\delta\xi^2 \end{aligned} \quad (17.3)$$

$$\begin{aligned} & CURV u_{i+1/2, j}^\eta \\ &= (u_{i+1, j+1} - 2u_{i+1, j} + u_{i+1, j-1})/\delta\eta^2 \end{aligned} \quad (17.4)$$

ただし、移流項を除くすべての空間微分は2次精度の中心差分で近似した。

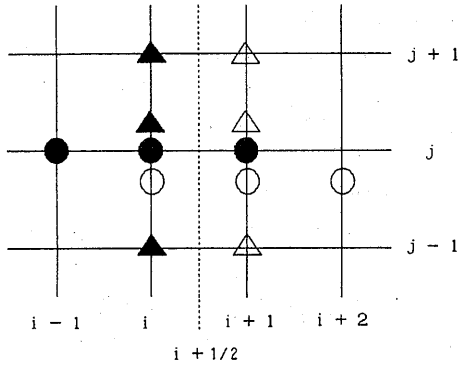


Fig. 2 Generalized QUICK Scheme

3. 時間積分

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に関して時間積分を施した結果を以下に示す。

(Explicit 1st step)

$$\frac{V^{n+1/2} - V^n}{\Delta t} + \frac{3H^n - H^{n-1}}{2} = \frac{1}{2}I^n \quad (18)$$

(Implicit 1st step)

$$\frac{V^{n+1/2} - V^n}{\Delta t} + H^{n+1/2} = \frac{1}{2}I^n \quad (19)$$

(Pressure Iteration)

$$\nabla^2 p^{n+1/2} = \frac{D^{n+1/2}}{\Delta t} \quad (20)$$

(Implicit 2nd step)

$$\frac{V^{n+1} - V^{n+1/2}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1/2} + \frac{1}{2}I^{n+1} \quad (21)$$

$$D^{n+1} = 0 \quad (22)$$

ここに、 H は移流項、 I は粘性項で、 ξ 成分は

$$H_\xi = (J^{-1}uU)_\xi + (J^{-1}uV)_\eta \quad (23)$$

$$\begin{aligned} I_\xi = & [J^{-1}\{(2\xi_x^2 + \xi_y^2)u_\xi + (2\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)u_\eta \\ & + \xi_y(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta)\}(1/Re + \nu_t)]_\xi \\ & + [J^{-1}\{(2\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)u_\xi + (2\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta \\ & + \eta_y(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta)\}(1/Re + \nu_t)]_\eta \end{aligned} \quad (24)$$

で表される。また、 D は連続式であり、次式によって表される。

$$D = J(y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta + x_\xi v_\eta - x_\eta v_\xi) \quad (25)$$

従来の2段階スキームでは、最初のステップで Adam-Bashforth の陽解法を用いている。この方法は、レイノルズ数が中程度 ($10^4 \sim 10^6$) の場合は良い結果が得られているが、高レイノルズ数 (10^6 以上) の場合移流項の変動が激しくなり、計算結果に発散が生じたり、真の値から外れてしまう。

そこで、最初に Adam-Bashforth 法によって $V^{n+1/2}$ を陽的に求め、その後式(19)によって $V^{n+1/2}$ を真の値に近づける。その後、(20)および(21)を反復させることにより V^{n+1} と $p^{n+1/2}$ を収束させる。真の値が求めれば、 V^{n+1} は式(22)を満足する。 k および ε も同様に Implicit 法により処理し、安定化させた。

4. 数値計算

4.1 計算領域

全長130cm、高さ20cmの矩形内部に上辺50cm、底辺90cm、高さ10cmの台形堰を領域の中央部に設置した水路を仮想した。物理面は130cm×20cmの領域で、この領域の左端面(流入面)から平均流速100cm/sで流入するときの堰のまわりの流れを解析する。計算領域は Fig. 3 のような130×40の不等間隔のメッシュで示される。この図は、 x 方向は等間隔であるが、 y 方向の平均間隔は x 方向の1/2である。しかも、水路床近傍を密に、自由表面近傍を粗に分割した。基礎方程式は流入部水深 $L_0 = 20$ cm、平均流入速度 $U_0 = 100$ cm/s で無次元化する。また、動粘性係数 $\nu = 0.01$ cm²/s とする。これらの値を用いてレイノルズ数と無次元化した重力加速度を求めると式(26)および(27)ようになる。

$$\text{レイノルズ数: } Re = 2 \times 10^5 \quad (26)$$

$$\text{重力加速度: } g = 1.96 \quad (27)$$

4.2 境界条件

流速についての境界条件は対数分布則によって流速分布を求め、この流れが左端面(流入面)から流入するものと仮定した。これを無次元化したものを式(28)で表す。また、対数分布則から摩擦速度を求めた結果 $u_* = 0.051$ が得られた。

$$u_{in} = 0.1297 \ln \frac{y}{0.000165} \quad (28)$$

つぎに、乱流エネルギーおよびエネルギー散逸率の境界条件は、式(29)～(31)に示した欄津らの半理論式を流

入面で与えた。

$$k = 4.78 u_*^2 \exp(-2y) \tag{29}$$

$$\varepsilon = 9.76 u_*^3 \exp(-3y) / \sqrt{y} \tag{30}$$

$$\nu_t = C_\mu k^2 \varepsilon^{-1} \quad (C_\mu = 0.09) \tag{31}$$

ここで計算領域上面では、 $\partial k / \partial y = 0$ 、 $\partial \varepsilon / \partial y = 0$ 、 $\partial \nu_t / \partial y = 0$ とする。また流出面では、 $\partial k / \partial x = 0$ 、 $\partial \varepsilon / \partial x = 0$ 、 $\partial \nu_t / \partial x = 0$ とする。また底壁面では、壁面近傍子点で $k = u_*^2 / 0.3$ 、 $\varepsilon = u_*^3 / \kappa y$ 、 $\nu_t = C k^2 \varepsilon^{-1}$ とした。ただし、摩擦速度は次式より求める。

$$u_* = \sqrt{(\tau_w / \rho)} = \sqrt{\{\nu (\partial u / \partial y)_{y=0}\}} \tag{32}$$

4. 3 計算手順

計算の手順を以下に簡単に示す。

- ① メトリック量の計算を行う (ξ_x 、 ξ_y 、 η_x 、 η_y および 諸幾何学量の計算)。
- ② 式(18)により $u^{n+1/2}$ および $v^{n+1/2}$ を求める。
- ③ 式(29)により $D^{n+1/2}$ を求める。
- ④ 式(20) Poisson 方程式を解く。

- ⑤ ②~④を繰り返すことにより収束させる。
- ⑥ 式(21)を implicit に解くことにより、 u^{n+1} および v^{n+1} が求められる。
- ⑦ 式(22)により⑥の収束判定をおこなう。
- ⑧ 同様に、2段階ステップの陰解法を用いて k^{n+1} および ε^{n+1} を求める。
- ⑨ ⑧の収束判定をおこなう。
- ⑩ サイクルを1つ進め、②に戻す。

4. 4 計算例

4. 4. 1 水平および鉛直方向流速成分

領域全体における流速分布を Fig. 4 に示す。その特徴を以下に簡単に述べる。

- ① 堰の左側斜面では、水粒子が堰の斜面に沿って上昇し、左上角近傍で最大流速となる。
- ② 堰の頂部では、中央に近づくにつれて鉛直方向の流速成分は水平方向の流速成分に比べて無視でき、ほぼ一様な速度分布となっている。
- ③ 中央部を過ぎると底面近傍における水平方向流速成分がしだいに大きくなって右上角で最大となる。
- ④ 堰の右側斜面では、斜面の近傍で水平および鉛直方向流速成分がともに小さくなっている。また、堰

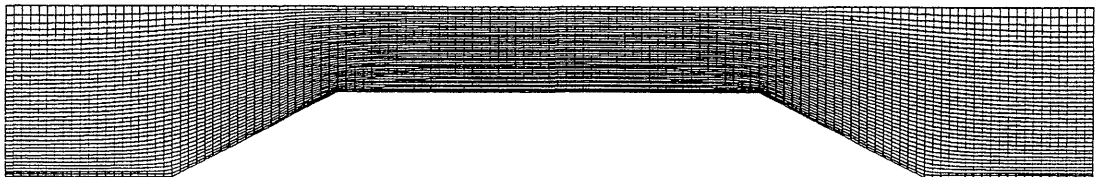


Fig. 3 Computational grid.

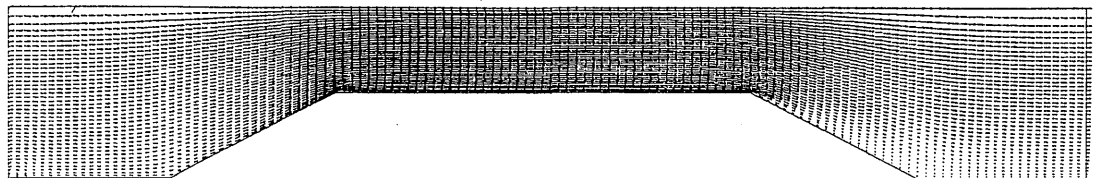


Fig. 4 Velocity profiles.

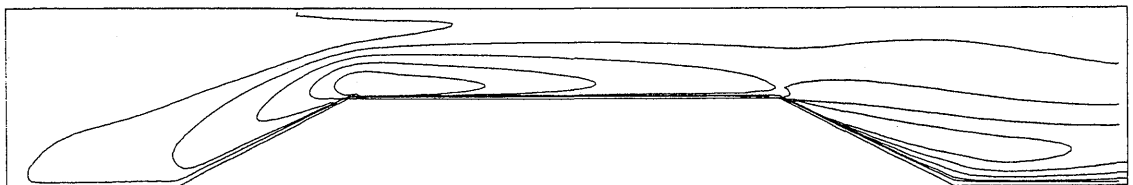


Fig. 5 Contour of turbulent energy.

の背後で緩やかな時計回りの渦が見られる。

4. 4. 2 乱流エネルギー

乱流エネルギーのコンターを Fig. 5 に示す。領域全体を見ると、堰の各コーナー付近の壁面近傍で大きいことが分かる。また、堰の最右端の断面において数値計算値と実験値との比較をおこなった⁵⁾。その結果を Fig. 6 に示す。なお、乱流エネルギー k は流入部断面の断面平均流速 U_m で、水路床から計測点までの距離 y は計測断面の水深 h で無次元化した。

5. 結 論

- ① 流速分布図より、堰のまわりの詳細な流れを知ることができる。また堰の背後で渦が観察された。
- ② 乱流エネルギーの分布に関しては、底壁面近傍で非常に大きい曲線となる。なお、 k の分布については境界条件の与え方に大きく依存している。
- ③ スキームのベクトル化により演算時間の短縮を計った⁶⁾。
- ④ QUICK スキームで計算を安定化することができた。
- ⑤ 時間積分についても陰解法により、比較的大きな時間間隔でも計算可能となった。

参 考 文 献

- 1) 武本行正, 山辺春雄, 城之内忠正: 一般化座標 $k-\epsilon$ 乱流モデルによるキャビティ流れの非定常計算, 核融合, 第61巻, 第6号, 1989年6月, pp.394-404.
- 2) Y. Nakamura and Y. Takemoto: Solutions of Incompressible Flows Using a Generalized Quick Method, Proceedings of the International Symposium on computational Fluid Dynamics-Tokyo, edited by Oshima, vol. 2, 1986, pp. 285-296.
- 3) Y. Takemoto and Y. Nakamura: Three-Dimensional Incompressible Flow Solver, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, No. 264, 1986, pp. 594-599.
- 4) B. P. Leonard: A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 19 (1979), pp. 59-98.
- 5) 薦田廣章, 森元賢哉: レーザー流速計による堰のまわりの流れの計測, 長崎大学工学部研究報告, 第23巻, 第40号, 1992, pp. 117-122.
- 6) 前田繁房, 森元賢哉, 薦田廣章: 一般曲線座標による堰のまわりの流れの数値計算, 土木学会西部支部研究発表会講演概要集, 1992, pp. 330-331.

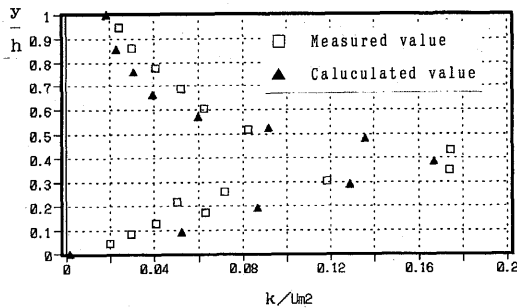


Fig. 6 Measured and calculated values of turbulent energy.