片持ち積層長方形板の振動，座屈および動的安定性

高橋和雄*・瀬戸真樹**
佐藤栄司***・古谷寿章***

Vibration, Buckling and Dynamic Stability of a Laminated Cantilever Rectangular Plate

by

Kazuo TAKAHASHI*, Masaki SETO**, Eiji SATO***
and Hisaaki FURUTANI***

Vibration, buckling and dynamic stability of a cantilever laminated rectangular plate are reported for various fiver orientations of laminates, configration of a laminate and influence of coupling in this papar. This problem is solved by using the Hamilton method to drive time variables. The trial functions are assumed by beam functions which satisfy the geometric boundary conditions.

At first, vibration and buckling properties are shown for three type of materials, fiber orientations and influence of coupling. Then, dynamic unstable regions are obtained.

1．まえがき

積層板は力学的に異方性を示し，各層の材質，積層数，および繊維角度を変化させることによって，利用目的にあったさまざまな材料を得ることができる．このため，近年，積層板に関する研究は盛んに行われ，その力学特性もかなり明らかにされてきた[1),2),3)]．しかし，積層板の支配方程式には，異方性板の特性と曲げモーメントとねじりモーメントの連成項が含まれるため，等方性板と比べて解析が複雑となる．そのため，動的安定性まで取り扱った研究はきわめて少なく，単純共振のみ取り扱ったBertらの研究[4)]が見受けられるが，結合共振まで取り扱った研究はないようである．

そこで，著者らは単純共振と結合共振が同時に得られる動的安定解析の厳密な解析方法[5)]を用いて，片持ち積層長方形板の動的安定特性を明らかにしたものである．解析においては，まず振動解析，座屈解析を行い，次いで動的安定特性を明らかにする．振動および座屈解析には，はりの曲げ振動の固有関数を用い，Rayleigh-Ritz法により解析を行う．次いで，動的安定解析には，Hamiltonの原理によって，動的安定問題の時間に関する運動方程式を誘導する．得られた運動方程式に，著者等によって提案された固有値問題に変換する方法[5)]により2倍サイズの行列の固有値問題に変換して解析を行う．

数値解析において，異方性の異なる3つの材料を用い，中央面に対称に積層した片持ち長方形板の固有振動特性，座屈特性および動的不安定領域に及ぼす異方性の影響，繊維角度および曲げ－ねじりカップリングの影響を検討し明らかにしたものである．

2．変形によるエネルギーおよび解法

(a)　固有振動解析および座屈解析

Fig. 1に示すように，中央面対称に積層され，x＝0の辺が固定された片持ち積層長方形板のx方向に一

平成6年4月28日受理
* 社会開発工学科（Department of Civil Engineering）
** ㈱エイトコンサルタント（Eito Consultant Co., Ldt.）
*** 大学院修士課程土木工学専攻（Graduate Student, Department of Civil Engineering）

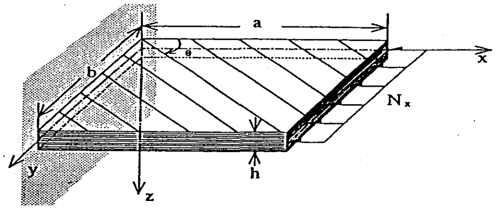

Fig. 1 Geometry of a laminated cantilever plate.

様分布の静的面内力 N_xが作用する場合を考える．面外せん断変形を無視した中央面対称積層長方形板の，曲げひずみによるエネルギー$V(w)$は，次式のようになる[6]．

$$V(w)=\frac{1}{2}\iint_A[D_{11}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2+2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_{22}(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2+4D_{16}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})+4D_{26}(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})+4D_{66}(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^2]dA \quad (1)$$

ここに，D_{11}，D_{12}，D_{22}，D_{16}，D_{26}，D_{66}：板剛度，w：たわみ，x，y：平板中央面の座標系

次に，運動エネルギー$T(w)$およびｘ軸方向の面内力がなす仕事$U(w)$は次式のように与えられる．

$$T(w)=\frac{1}{2}\rho h\iint_A(\frac{\partial w}{\partial t})^2 dA \quad (2)$$

$$U(w)=\frac{1}{2}N_x\iint_A(\frac{\partial w}{\partial x})^2 dA \quad (3)$$

ここに，ρ：板の密度，h：板厚

たわみを次式のように仮定する．

$$w(x, y, t)=\sum_{m=1}\sum_{n=1}A_{mn}h_m(x)\bar{h}_n(y)\exp(i\omega t) \quad (4)$$

ここに，h_m，$\bar{h}_n$：幾何学的境界条件を満足する関数，ここでは，はりの固有振動形を用いる．$h_m(x)$：片持ちばりの固有振動形，$\bar{h}_n(y)$：両端自由ばりの固有振動形（Appendix A 参照），A_{mn}：未定定数，ω：固有円振動数

Rayleigh-Ritz 法を適用すると

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}}(V-T-U)=0 \quad (5)$$

$$(r=1, 2, 3\cdots, L, s=1, 2, 3\cdots, L)$$

式(5)に式(1)，(2)，(3)を代入し，偏微分を実行した後，積分をしてまとめると，次式のように行列表示される[7]．

$$([E]-\lambda^4[F]-\lambda_b[G])\{A\}=\{O\} \quad (6)$$

ここに，

$$\lambda^4=\rho h\omega^2\frac{b^4}{D_1{}^0},\quad \lambda_b=N_x\frac{b^2}{D_1{}^0}$$

$[E]$：$E(s+(r-1)L, n+(m-1)L)=E_{mrns}$,

$[F]$：$F(s+(r-1)L, n+(m-1)L)=F_{mrns}$,

$[G]$：$G(s+(r-1)L, n+(m-1)L)=G_{mrns}$,

$\{A\}$：$\{A_{11}A_{12}\cdots A_{1L}A_{21}A_{22}\cdots A_{LL}\}^T$

（Appendix B 参照）

式(6)で$\lambda_b=0$とおけば，自由振動の固有値λが得られ，$\lambda=0$とおけば座屈固有値λ_bが得られる．数値計算においては，式(6)を行列の固有値問題として解くことができる．

(b) 動的安定解析

一定面内力 N_xの代わりに変動面内力 $N_{x0}+N_{xt}\cos\Omega t$が作用する場合を考える．

運動エネルギー$T(w)$および面内力のなす仕事$U(w)$は，

$$T(w)=\frac{1}{2}\rho h\iint_A(\frac{\partial w}{\partial t})^2 dA \quad (7)$$

$$U(w)=\frac{1}{2}(N_{x0}+N_{xt}\cos\Omega t)\iint_A(\frac{\partial w}{\partial x})^2 dA \quad (8)$$

ここに，N_{x0}：静的面内力，N_{xt}：変動面内力の振幅，t：時間，Ω：変動面内力の円振動数

たわみを次式のように仮定する．

$$w(x, y, t)=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\bar{T}_{mn}(t)W_{mn}(x, y) \quad (9)$$

ここに，$\bar{T}_{mn}(t)$：時間に関する未知の関数，$W_{mn}(x, y)$：幾何学的境界条件を満足する座標関数で，固有振動解析で得られた固有振動形を用いる．

ここで，運動方程式を誘導するために Hamilton の原理を適用する．

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\{T-(V-U)\}dt=0 \quad (10)$$

ここに，$t=t_1$，t_2で$\delta w(t_1)=\delta w(t_2)=0$

式(10)の変分を行いまとめると，

$$\sum_{m=1}\sum_{n=1}[\bar{A}^{kl}_{mn}\ddot{\bar{T}}_{mn}+\{\frac{1}{\lambda^0_{v1}{}^4}\bar{B}^{kl}_{mn}-\frac{\lambda^0{}_b}{\lambda^0_{v1}{}^4}(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)\bar{C}^{kl}_{mn}\}\bar{T}_{mn}]=0 \quad (11)$$

ここに，$\tau=\omega^0_{11}t$，$\bar{\omega}=\Omega/\omega^0_{11}$，$\bar{N}_{x0}=N_{x0}/N_{cr}$，$\bar{N}_{xt}=N_{xt}/N_{cr}$，$\lambda^0{}_{cr}=N_{cr}b^2/D_1{}^0\pi^2$，$N_{cr}$：座屈面内力，$\lambda^0{}_{v1}{}^4=\rho hb^4\omega^{02}_1/D_1{}^0$：$\theta=0^\circ$の1次の振動固有値，$\omega^0_{11}$：$\theta=0^\circ$

の1次の固有円振動数

式(11)を行列表示すると次式が得られる．

$$[A]\{\ddot{\mathbf{T}}\}+[B]\{\mathbf{T}\}+(\overline{N}_{x0}+\overline{N}_{xt}\cos\overline{\omega}\tau)[C]\{\mathbf{T}\}=\{0\} \qquad (12)$$

ここに，$\{\mathbf{T}\}=\{\overline{T}_{11}\overline{T}_{12}\cdots\overline{T}_{1L}\overline{T}_{21}\overline{T}_{22}\cdots\overline{T}_{2L}\cdots\overline{T}_{LL}\}^T$

$[A]:A\{k+(\ell-1)L,\ n+(m-1)L\}=A^{kl}_{mn}$,

$[B]:B\{k+(\ell-1)L,\ n+(m-1)L\}=B^{kl}_{mn}/\lambda^{0}{}_{v1}{}^{4}$

$[C]:C\{k+(\ell-1)L,\ n+(m-1)L\}=-C^{kl}_{mn}\lambda^{0}{}_{cr}/\lambda^{0}{}_{v1}{}^{4}$

$(k,\ \ell,\ m,\ n=1,\ \cdots,\ L)$

式(12)は連立のMathieuの方程式であり，その一般解を次式のように仮定する[5]．

$$\{\mathbf{T}\}=\exp(\lambda\overline{\tau})[\frac{1}{2}\mathbf{b}_0+\sum_{n=1}\{\mathbf{a}_n\sin(n\overline{\tau})+\mathbf{b}_n\cos(n\overline{\tau})\}] \qquad (13)$$

ここに，$\overline{\tau}=\overline{\omega}\tau$，$\lambda$：未定係数，$\mathbf{b}_0$，$\mathbf{a}_n$，$\mathbf{b}_n$：未知のベクトル

式(13)を式(12)に代入して，調和バランス法を適用することにより2倍サイズの固有値問題に変換して系の安定の判別を行う．

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \qquad (14)$$

ここに，

$\{Y\}=\lambda\{X\}$, $\{X\}=\{\mathbf{b}_0\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\cdots\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\cdots\}^T$,

$[M_0]$, $[M_1]$, $[M_2]$：係数行列

式(14)は，非対称行列の固有値問題の基礎式である．つまり，与えられた加振振動数$\overline{\omega}$と変動面内力の振幅$\overline{N}_{xt}$の組み合わせに対して，得られた固有値λの値がすべて負ならば一般解中の$\exp(\lambda\overline{\tau})$が時間とともに収束するため安定，逆に一つでも正ならば発散してしまうために不安定であるという条件から安定性が評価される．

3．材料定数および曲げ剛性

本研究では，異方性の異なる3種類の材料について解析を行う．各材料定数の値は，Table 1に示す文献1)で使用されている値を用いる．E_2/E_1の値から分かるように，異方性の度合いは，(1)EGLASS/EP，(2)

Table 1 Constants of material

Material	E_1(GPa)	E_2(GPa)	G_{12}(GPa)	ν_{12}
(1) EGLASS/EP ($E_2/E_1=0.41$)	60.7	24.8	11.99	0.23
(2) BORON/EP ($E_2/E_1=0.09$)	209	19	6.4	0.21
(3) GRAPHITE/EP ($E_2/E_1=0.06$)	138	8.96	7.1	0.30

Table 2 Bending rigidty of laminated composite plate：L=3

Bending stiffness	Material	$\theta=0°$	$\theta=15°$	$\theta=30°$	$\theta=45°$	$\theta=60°$	$\theta=75°$	$\theta=90°$
D_1*	(1) EGLASS/EP	1.0000	0.9324	0.7682	0.5924	0.4725	0.4202	0.4086
	(2) BORON/EP	1.0000	0.8809	0.5982	0.3128	0.1437	0.0936	0.0909
	(3) GRAPHITE/EP	1.0000	0.8860	0.6122	0.3271	0.1447	0.0762	0.0649
D_2*	(1) EGLASS/EP	0.4086	0.4202	0.4725	0.5924	0.7682	0.9324	1.0000
	(2) BORON/EP	0.0909	0.0936	0.1437	0.3128	0.5982	0.8809	1.0000
	(3) GRAPHITE/EP	0.0649	0.0762	0.1447	0.3271	0.6122	0.8860	1.0000
D_3*	(1) EGLASS/EP	0.0940	0.1219	0.1779	0.2059	0.1779	0.1219	0.0940
	(2) BORON/EP	0.0191	0.0722	0.1936	0.2518	0.1936	0.0773	0.0191
	(3) GRAPHITE/EP	0.0195	0.0708	0.1734	0.2248	0.1735	0.0708	0.0145
D_4*	(1) EGLASS/EP	0.0000	0.1133	0.1634	0.1369	0.0737	0.0236	0.0000
	(2) BORON/EP	0.0000	0.1985	0.2755	0.2104	0.0890	0.0119	0.0000
	(3) GRAPHITE/EP	0.0000	0.1906	0.2698	0.2165	0.1051	0.0259	0.0000
D_5*	(1) EGLASS/EP	0.0000	0.0236	0.0737	0.1369	0.1634	0.1133	0.0000
	(2) BORON/EP	0.0000	0.0119	0.0890	0.2104	0.2755	0.1985	0.0000
	(3) GRAPHITE/EP	0.0000	0.0259	0.1051	0.2165	0.2698	0.1906	0.0000
D_6*	(1) EGLASS/EP	0.1933	0.2212	0.2772	0.3052	0.2772	0.2212	0.1933
	(2) BORON/EP	0.0305	0.0887	0.2050	0.2632	0.2050	0.0887	0.0305
	(3) GRAPHITE/EP	0.0511	0.1025	0.2052	0.2565	0.2052	0.1025	0.0511

BORON/EP, (3) GRAPHITE/EP の順に強くなる.

Table 2 は, Table 1 で示した 3 つの材料を用い, 中央面対称に 3 層積層した板の曲げ剛性を文献 7)の計算式を用い求めたものである. 各材料とも, 繊維角度 $\theta=0^\circ$ の時の曲げ剛性 D_{11} で無次元化している.

4. 固有振動特性

本研究では, 比較的異方性の度合いの小さい EGLASS/EP と異方性の度合いの大きい GRAPHITE/EP および BORON/EP の 3 種類の材料を使用して, 積層数 L=3 (中央面対称 3 層積層) および L=5 (中央面対称 5 層積層) の積層板の数値計算を行う.

Fig. 2 に, L=3の材料 GRAPHITE/EP, 繊維角度 ($\theta=0^\circ$, $\theta=45^\circ$)の固有振動数の収束状況を示す. 縦軸 ω^* には, 板剛度 D_{11} の等方性板の 1 次の固有振動数で無次元化した無次元固有振動数, 横軸には一般解の級数項 M, N をとり, 10項までの解の収束性を調べた. 繊維角度 $\theta=0^\circ$ の方が $\theta=45^\circ$ よりも収束性はよい. いずれの繊維角度でも項数が 3 ～ 4 項で速い収束を示すため, 本研究では, 計算精度および計算時間を考慮し, 10項を採用して計算を行う.

Fig. 3 に, L=5の正方形板の 1 次から 4 次の固有振動曲線を示す. 図中の縦軸 ω^* には, 板剛度 D_{11} の等方性板の 1 次の固有振動数で無次元化した無次元固有振動数, 横軸 θ にはラミナの繊維角度をとる.

異方性の小さい EGLASS/EP が異方性の大きい GRAPHITE/EP および BORON/EP よりも固有振動数は大きくなる. これは, 振動数の無次元化を各材料の繊維角度 $\theta=0^\circ$ の強い繊維方向の板剛度 D_{11} の等方性板で行っているためであり, このため異方性の大きな材料ほど固有振動数は低く示される. この差は, 次数が高次で繊維角度が90°に近くなるほど顕著に表われる. また繊維角度の変化が固有振動数にあたえる

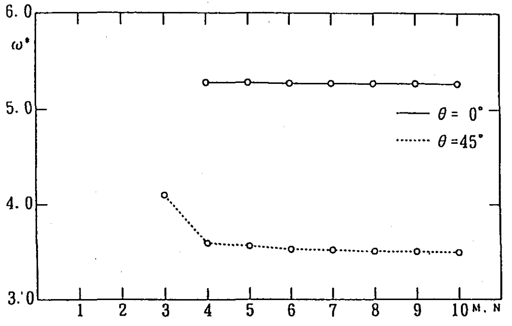

Fig. 2 Convergences of frequency : $\beta=1.0$, L=3, GRAPHITE/EP, 4th mode.

影響は, 異方性の大きい材料が異方性の小さい材料より顕著に表われ, 積層数が多くなるほど著しい.

次に, Fig. 4, 5 に L=3 の材料 EGLASS/EP, GRAPHITE/EP を用いた正方形板の曲げ-ねじりカップリングの有無による固有振動曲線を示す. 図中の縦軸 ω^* には, 無次元固有振動数, 横軸 θ にはラミナの

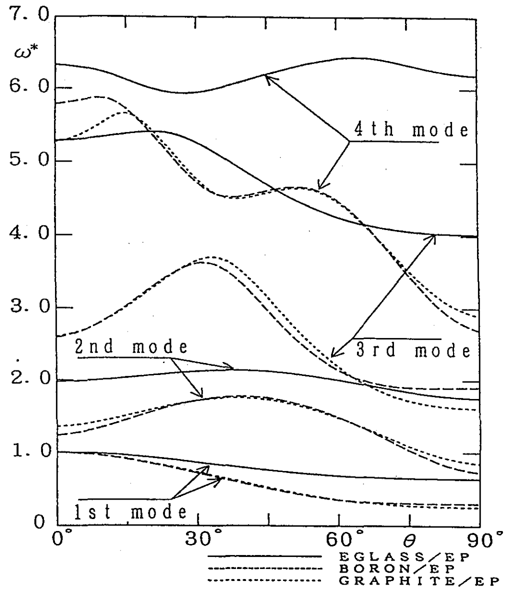

Fig. 3 Natural frequencies of laminated plates with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, L=5.

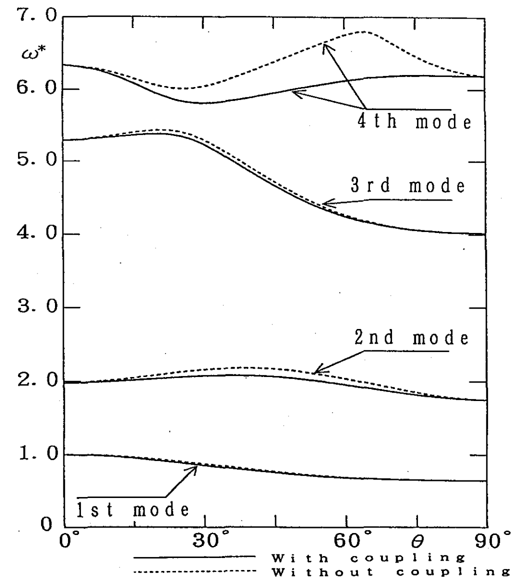

Fig. 4 Natural frequencies of laminated plates with various fiber angle θ : $\beta=1.0$, L=3, EGLASS/EP.

繊維角度をとる．カップリングを考慮すると，固有振動数は小さくなる．この影響は，異方性の大きな材料で，高次の振動数ほど顕著に表わる．これは，繊維角度45°付近で最も影響が著しい．

5．座屈特性

Fig. 6, 7 に，L=3の EGLASS/EP，GRAPHITE/EP, Fig. 8, 9 に，L=5の EGLASS/EP, GRAPHITE/EP の座屈曲線を示す．図中の縦軸λ_bには座屈固有値，横軸βには縦横比をとる．

縦横比の増大とともに，座屈固有値は減少し一定となる．異方性の大きな材料で繊維角度が90°に近づくほど，小さい縦横比で一定となる．また，異方性の大きい材料が小さい材料より，座屈固有値は小さくなる．これは，座屈固有値の無次元化を各材料の繊維角度θ

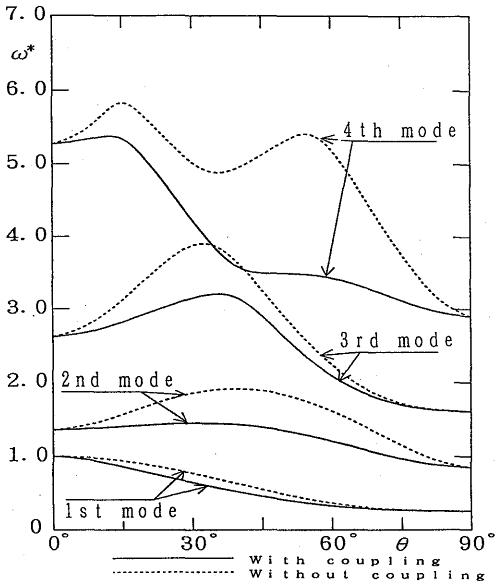

Fig. 5 Natural frequencies of laminated plates with various fiber angle θ: β=1.0, L=3, GRAPHITE/EP.

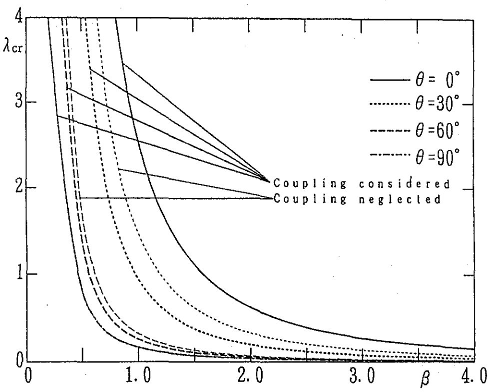

Fig. 7 Buckling curves of a laminated composite plate: L=3, GRAPHITE/EP.

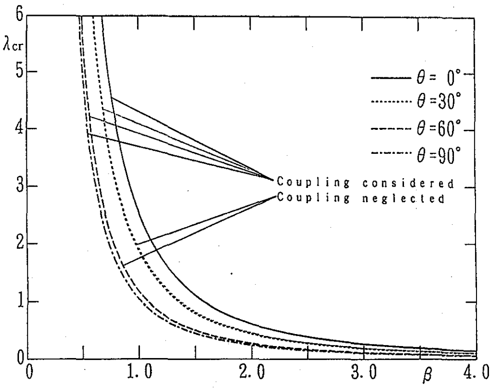

Fig. 8 Buckling curves of a laminated composite plate: L=5, EGLASS/EP.

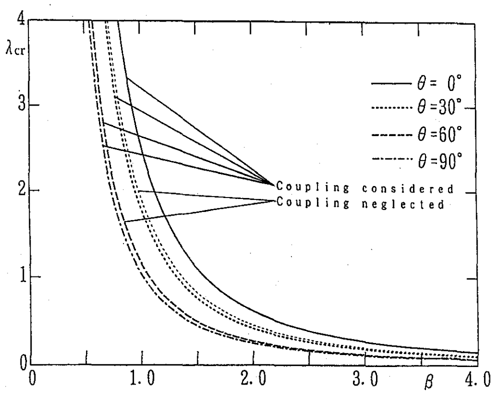

Fig. 6 Buckling curves of a laminated composite plate: L=3, EGLASS/EP.

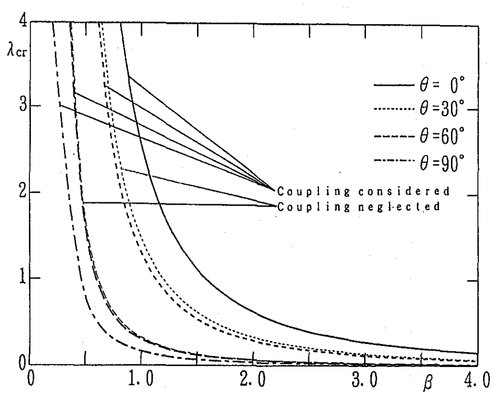

Fig. 9 Buckling curves of a laminated composite plate: L=5, GRAPHITE/EP.

$=0^{\circ}$の強い繊維方向の板剛度 D_{11}で行っているためである．このため，繊維方向と繊維に垂直な方向の板剛度の比(E_2/E_1)が小さい材料ほど座屈固有値の減少は著しい．

繊維角度θを 0°から90°に変化させると，座屈固有値は小さくなる．これは，x 軸と強い繊維方向のなす角をθとしているためであり，異方性の大きな材料ほど著しく，繊維角度60°付近までは，層数が少ないほど顕著に表われる．

繊維角度 0°と90°では，曲げ－ねじりカップリングの影響はないが，繊維角度30°および60°では，材料や積層数に関係なく，カップリングの影響が表われ，考慮しない場合より座屈固有値は小さくなる．この割合は，異方性の大きい材料で，積層数の少ない場合が大きい．

6．動的不安定領域

Fig. 10～13 に，L =3 の 材 料 EGLASS/EP, GRAPHITE/EP を用いた正方形板の変動面内力の振幅を変化させたときの動的不安定領域を示す．縦軸$\overline{N}_{xt}$は，変動面内力 N_{xt}の振幅を$\theta=0^{\circ}$の座屈面内力 N_{cr}で無次元化した無次元変動面内力，横軸$\overline{\omega}$は励振振動数を$\theta=0^{\circ}$の 1 次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数である．図中では，右上がりの斜線部が単純共振，右下がりの斜線部が結合共振を意味する．ここで，単純共振 $2\omega_{ij}/k(k=1, 2, \cdots)$と結合共振$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k(k=1, 2, \cdots)$のうち k=1を主不安定領域，k ≧2を副不安定領域と呼ぶ[5]．

EGLASS/EP, GRAPHITE/EP ともに繊維角度$\theta=0^{\circ}$では，主不安定領域のみで副不安定領域は現われない．また，$\theta=0^{\circ}$では結合共振もほとんど現われないが，$\theta=75^{\circ}$では副不安定領域の発生が見られ，多くの結合共振が現われる．

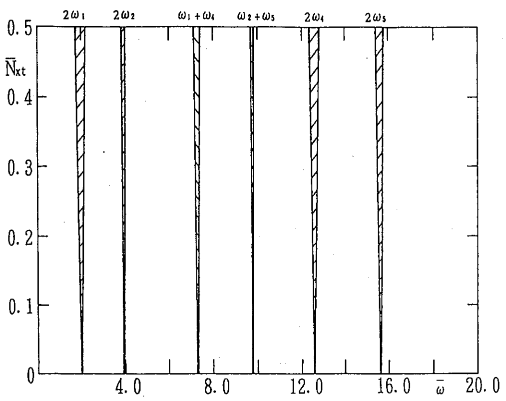

Fig. 10 Dynamic unstable regions: $\beta=1.0$, L=3, EGLASS/EP, $\theta=0^{\circ}$.

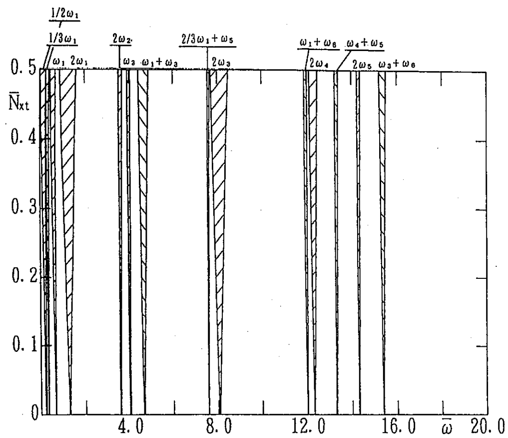

Fig. 12 Dynamic unstable regions: $\beta=1.0$, L=3, EGLASS/EP, $\theta=75^{\circ}$.

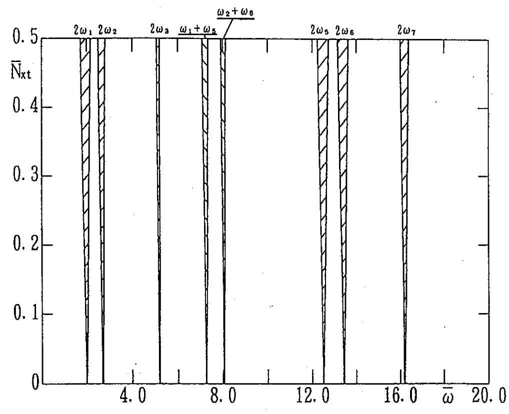

Fig. 11 Dynamic unstable regions: $\beta=1.0$, L=3, GRAPHITE/EP, $\theta=0^{\circ}$.

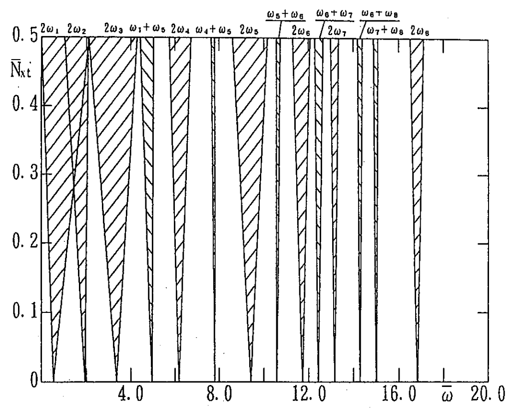

Fig. 13 Dynamic unstable regions: $\beta=1.0$, L=3, GRAPHITE/EP, $\theta=75^{\circ}$.

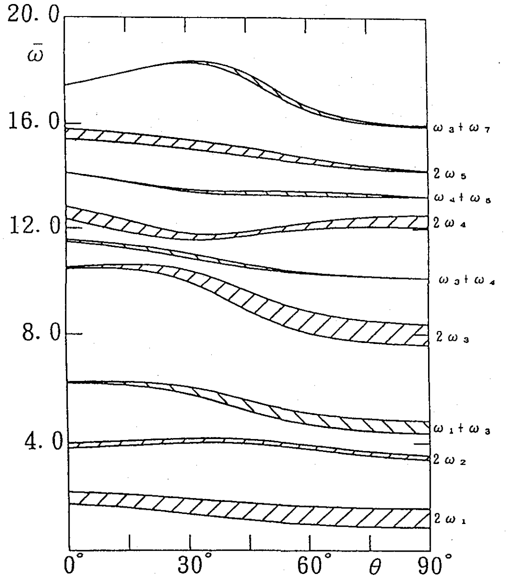

Fig. 14 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : β=1.0, L=3, EGLASS/EP.

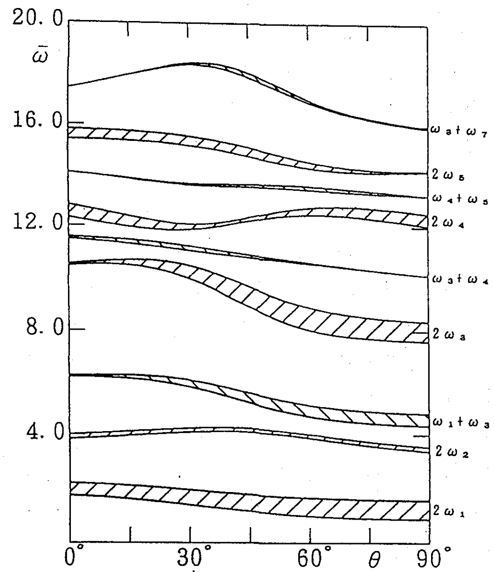

Fig. 16 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : β=1.0, L=5, EGLASS/EP.

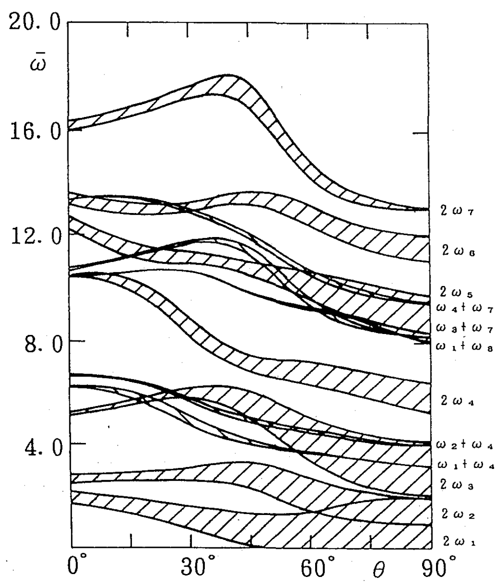

Fig. 15 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : β=1.0, L=3, GRAPHITE/EP.

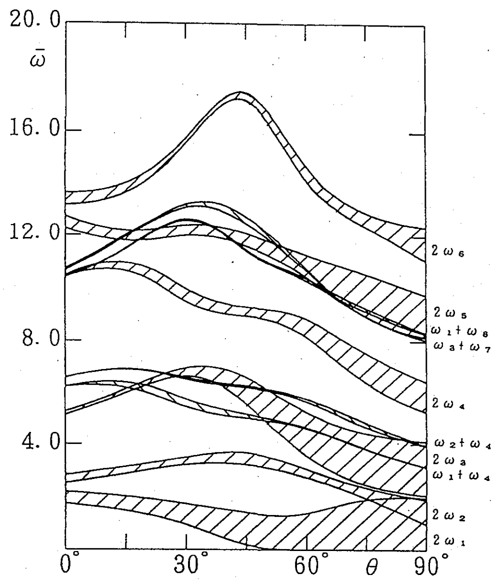

Fig. 17 Dynamic unstable regions with various fiber angle θ : β=1.0, L=5, GRAPHITE/EP.

次に，Fig. 14～17 に，L=3, 5の材料 EGLASS/EP, GRAPHITE/EP を用いた正方形板の繊維角度の変化による動的不安定領域の変動を示す．縦軸$\bar{\omega}$は励振振動数をθ=0°の１次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数，横軸θは繊維角度である．変動面内力の振幅には，繊維角度がθ=0°における$\overline{N}_{xt}$=0.5の値を用いている．繊維角度を変化させると，動的不安定領域の発生位置およびその幅が変動する．この変動は固有振動解析と同様に異方性の度合いの大きな材料ほど大きく，積層数が多いほど著しい．繊維角度が 0°から90°に変化するにつれて，動的不安定領域が広くなる．これは，低次の主不安定領域において顕著であり，異方

性の大きい材料ほど著しい．しかし，各繊維角度での動的不安定領域の広さに関しては，層数の影響はあまり見られない．また，繊維角度を変化させることにより数多く現われる結合共振の動的不安定領域は，繊維角度45°付近で最も広くなる．

7．ま と め

本研究では，異方性の異なる3種類の材料を用い，中央面対称に3層および5層に積層した片持ち長方形板を対象に，繊維角度および縦横比をパラメーターとして，固有振動特性，座屈特性および動的安定特性に及ぼす異方性の影響，積層数の影響等を明らかにした．

(1) 異方性が大きい材料は，異方性が小さい材料より，固有振動数および座屈固有値は小さく，繊維角度の変化によるカップリングの影響および固有振動数の変動は大きくなる．

(2) カップリング項を考慮すると，固有振動数および座屈固有値は考慮しない場合よりも小さくなる．この影響は繊維角度が30°～60°で最も大きくなる．

(3) 縦横比が大きくなると，座屈固有値が一定になる．これは，異方性が大きい材料で繊維角度が大きいほど小さい縦横比で一定となる．

(4) 繊維角度が0°では，主不安定領域のみで副不安定領域は現われず，結合共振もほとんど現われないが，繊維角度がある場合に副不安定領域の発生が見られ，多くの結合共振が現われる．

(5) 繊維角度が0°から90°に変化するにつれて，動的不安定領域が大部分において広くなる．これは，高次よりも低次の主不安定領域において顕著である．

なお，解析にあたっては，長崎大学総合情報処理センターのVP-1200を使用した．

参 考 文 献

1) 一ノ宮・成田・丸山：FRP積層された片持ち長方形板の定常応答，日本機械学会論文集(C編)，55-516, pp. 1897-1902, 1989. 8.
2) 福田：異方性の積極利用(I)，日本複合材料学会誌，14-1, pp. 20-25, 1988.
3) 松本・鈴木：対称積層構造材の振動特性解析法の研究，56-532, pp. 7-13, 1990. 12.
4) C. W. Bert and V. Birman: Dynamic Instability of Shear Deformable Antisymmetric Angle-Ply Plates, Int. J. Solids Struct., Vol. 23, No. 7, pp. 1053-1061, 1987.
5) 夏秋・高橋・小西：構造物の動的安定性－そのアプローチ手法と橋梁構造への応用－，片山技報，Vol. 8, pp. 1-6, 1988.
6) 福田・野村・武田：複合材料の構造力学，日刊工業新聞社，pp. 23-105, 1987.
7) 高橋・佐藤・江島：構造工学における数値解析シンポジウム論文集，第17巻，pp. 197-202. 1993.

Appendix A 片持ちばりおよび両端自由ばりの固有振動形

$$h_m(\xi)=\cos\lambda_m a\xi-\cosh\lambda_m a\xi+\alpha_m(\sin\lambda_m a\xi-\sinh\lambda_m a\xi)$$

$$\bar{h}_1(\eta)=1 \qquad \bar{h}_2(\eta)=\sqrt{3}(1-2\eta)$$

$$\bar{h}_n(\eta)=\cosh\mu_n b\eta+\cos\mu_n b\eta-\beta_n(\sinh\mu_n b\eta+\sin\mu_n b\eta) \qquad (n\geqq 3)$$

$$\alpha_m=\frac{\sin\lambda_m a-\sinh\lambda_m a}{\cos\lambda_m a+\cos\lambda_m a} \qquad \beta_n=\frac{\cosh\mu_n b-\cos\mu_n b}{\sinh\mu_n b-\sin\mu_n b}$$

Appendix B

$$E_{mrns}=\frac{D_1^*}{\beta^4}I^{22}_{mr}I^{00}_{ns}+\frac{D_3^*}{\beta^2}\{I^{02}_{mr}I^{20}_{ns}+I^{20}_{mr}I^{02}_{ns}\}+D_2^*I^{00}_{mr}I^{22}_{ns}+2\frac{D_4^*}{\beta^3}\{I^{12}_{mr}I^{10}_{ns}+I^{21}_{mr}I^{01}_{ns}\}+2\frac{D_5^*}{\beta}\{I^{10}_{mr}I^{12}_{ns}+I^{01}_{mr}I^{21}_{ns}\}+4\frac{D_6^*}{\beta^2}I^{11}_{mr}I^{11}_{ns}$$

$$F_{mrns}=I^{00}_{mr}I^{00}_{ns}, \quad \lambda^4=\rho h\omega^2\frac{b^4}{D_1^0}$$

$$G_{mrns}=\frac{1}{\beta^2}I^{11}_{mr}I^{00}_{ns}, \quad \lambda_{cr}=N_x\frac{b^2}{D_1^0}$$

$$(m, n, r, s=1, 2, \cdots, N)$$

ここに，$\xi=x/a$, $\eta=y/b$, $\beta=a/b$（縦横比），$D_1^*=D_{11}/D_1^0$, $D_2^*=D_{22}/D_1^0$, $D_3^*=D_{12}/D_1^0$, $D_4^*=D_{16}/D_1^0$, $D_5^*=D_{26}/D_1^0$, $D_6^*=D_{66}/D_1^0$（D_1^0：すべての層のθが$\theta=0^\circ$の時の板剛性）

$I^{00}_{mr}, I^{00}_{ns}, \cdots$：$h_m, h_r, \bar{h}_n, \bar{h}_s$およびその微分からなる定積分

$$I^{00}_{mr}=\int_0^1 h_m h_r d\xi, \quad I^{01}_{mr}=\int_0^1 h_m h_{1r} d\xi,$$

$$I^{02}_{mr}=\int_0^1 h_m h_{2r} d\xi, \quad I^{10}_{mr}=\int_0^1 h_{1m} h_r d\xi,$$

$$I^{11}_{mr}=\int_0^1 h_{1m} h_{1r} d\xi, \quad I^{12}_{mr}=\int_0^1 h_{1m} h_{2r} d\xi,$$

$$I^{20}_{mr}=\int_0^1 h_{2m} h_r d\xi, \quad I^{21}_{mr}=\int_0^1 h_{2m} h_{1r} d\xi,$$

$$I^{22}_{mr}=\int_0^1 h_{2m} h_{2r} d\xi$$

$$I^{00}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_n\bar{h}_s d\eta,\quad I^{01}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_n\bar{h}_{1s} d\eta,$$

$$I^{02}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_n\bar{h}_{2s} d\eta,\quad I^{10}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_{1n}\bar{h}_s d\eta,$$

$$I^{11}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_{1n}\bar{h}_{1s} d\eta,\quad I^{12}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_{1n}\bar{h}_{2s} d\eta,$$

$$I^{20}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_{2n}\bar{h}_s d\eta,\quad I^{21}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_{2n}\bar{h}_{1s} d\eta,$$

$$I^{22}{}_{ns}=\int_0^1 \bar{h}_{2n}\bar{h}_{2s} d\eta$$

$$h_{1m}(\xi)=\lambda_m a\{-\sin\lambda_m a\xi-\sinh\lambda_m a\xi$$
$$+\alpha_m(\cos\lambda_m a\xi-\cosh\lambda_m a\xi)\}$$

$$h_{2m}(\xi)=(\lambda_m a)^2\{-\cos\lambda_m a\xi-\cosh\lambda_m a\xi$$
$$+\alpha_m(-\sin\lambda_m a\xi-\sinh\lambda_m a\xi)\}$$

$$\bar{h}_{11}(\eta)=0\qquad \bar{h}_{12}(\eta)=-2\sqrt{3}$$

$$\bar{h}_{1n}(\eta)=\mu_n b\{\sinh\mu_n b\eta+\sin\mu_n b\eta$$
$$-\beta_n(\cosh\mu_n b\eta+\cos\mu_n b\eta)\}\qquad (n\geqq 3)$$

$$\bar{h}_{21}(\eta)=0\qquad \bar{h}_{22}(\eta)=0$$

$$\bar{h}_{2n}(\eta)=(\mu_n b)^2\{\cosh\mu_n b\eta+\cos\mu_n b\eta$$
$$-\beta_n(\sinh\mu_n b\eta-\sin\mu_n b\eta)\}\qquad (n\geqq 3)$$