

自走マルチによる正弦波PWM変調方式

長尾道彦*・原田耕介**

A Sinusoidal PWM Technique using Multivibrator

by

Michiko NAGAO

(Electrical Engineering)

Koosuke HARADA

(Electronics, Kyushu University)

The sinusoidal PWM inverter has been widely used for various power applications. In many case, a wide range of the frequency variations is requested. For this purpose the so-called subharmonic method is generally used. In this method, the instantaneous amplitudes of the reference signal of sinusoidal shape is compared to a carrier signal of a triangular shape in the control circuit. Therefore, continuous synchronization between the carrier signal and the reference signal can be not easily achieved.

In this paper, a PWM technique using the principles of the relay-mode multivibrator is proposed. In this technique, a comparator with a hysteresis is driven by the error signal between the sinusoidal reference and the negative feedback signal through the low-pass filter, and PWM signal is obtained without the carrier signal. This circuit is simple, of wide range of frequency and of low harmonic content. Harmonic analysis is given on PWM waveform produced by this technique, and relations between the circuit parameters and harmonic components are investigated.

1. まえがき

電源電圧を一定に保ったまま、可変電圧、可変周波数の交流電力を得ることができるパルス幅変調(PWM)インバータが最近多く用いられるようになった。このインバータを駆動するにはPWM信号が必要であり、通常は三角波等のキャリア信号を用い、この信号と正弦波の基準信号とを比較しPWM信号を得ている。このように従来方式ではキャリア信号を使用しているため回路構成が複雑化し、基準信号と出力のPWM信号との同期がとりにくいという問題

がある。基準信号とPWM信号とが非同期の場合には出力電圧には分数調波が表われうなりを生じる。このため一般には、基準信号とキャリア信号との周波数を整数比に保ち入出力の同期をとっているが、さらに回路構成が複雑化し、信頼性低下の原因ともなる。

本稿では以上の問題を解決するため、コンパレータと積分要素による発振現象を利用し、キャリア信号を用いることなく極めて簡単な回路構成でPWM信号を得、入出力信号の同期も簡単にとることができる方を提案し、この方式によって得られるPWM波形の

昭和57年5月6日受理

*電気工学科

**九州大学工学部 福岡市東区箱崎

高調波解析を行ったものである。

2. 回路構成と動作原理

第1図がここで提案するPWM信号を得るための基本原理図である¹⁾。この回路は出力信号 v_o を入力へ負帰還し、発振周波数が一定のマルチバイブレータを構成し、基準信号 v_s により出力のオン・オフ比を制御しPWM信号を得るものである。以下コンパレータが第2図(a)のヒステリシス電圧 $\pm V_h$ をもつ特性を有し、積分器が第2図(b)に示す低域ろ波器で構成されている場合について検討する。なおスイッチ SW_f は入出力の同期をとるためのものでこれについては第4章で述べる。以上の構成において基準信号 v_s が変化する場合の

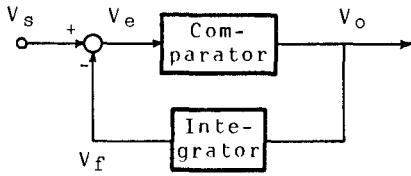


Fig. 1 Basic sinusoidal pulse width modulator.

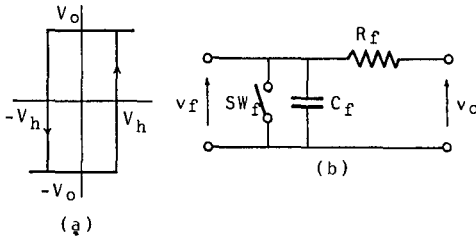


Fig. 2 Characteristics of components. (a) Comparator, (b) Integrator

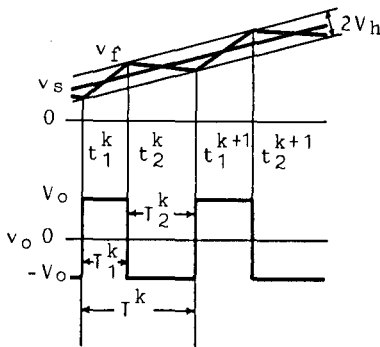


Fig. 3 Waveforms of PWM when $V_s = V_{sm} \sin(\omega_s t + \theta_s)$.

各部の動作波形を示したのが第3図である。基準信号 v_s と帰還信号 v_f との差の信号(偏差信号) v_e の電圧がヒステリシス電圧 V_h に等しくなる時点 t_1^k において出力電圧 v_o が負から正に切り変り V_o となる。この出力 V_o は積分器の入力となり、積分器の出力である帰還信号 V_f の電圧は増加し始め、偏差信号 v_e の電圧がヒステリシス電圧 $-V_h$ に等しくなる時点 t_2^k まで v_f は増加する。この間 $t_2^k - t_1^k = T_1^k$ 、出力には正の電圧 V_o が生じる。時刻 t_2^k では v_e が $-V_h$ に等しくなるため出力電圧 v_o は正から負の電圧 $-V_o$ へ切り変る。以後同様な動作をくり返し出力よりPWM信号を得る。従ってヒステリシス電圧 V_h を小さくすれば偏差信号 v_e の電圧は小さくなり、PWM信号 v_o に含まれる高調波成分は減少する。また基準信号 v_s の大きさを変えることによりPWM信号 v_o に含まれる基本波の大きさ V_{of} を制御できる。この V_{of} は積分器のフィルタ特性を利用すれば v_s は一定のまま、 v_s の周波数を変えることによっても V_{of} を変えることができる。以上の動作の実測波形を第4図に示している。また、このPWM信号 v_o によって単相インバータを制御し、単相モータを駆動した時の電機子電圧 e_m および電機子電流 i_m の波形を第5図に示している。第4、5図において(a)図はヒステリシス電圧 V_h が小さい場合、(b)図は大きい場合の図である。図から帰還方式によってPWM信号が

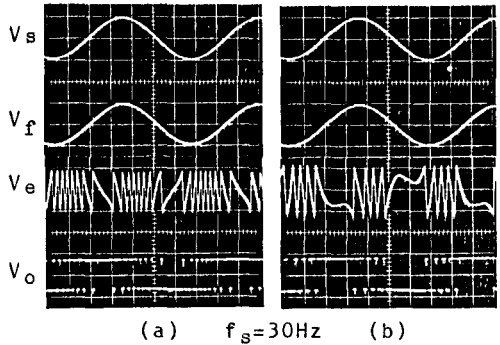


Fig. 4 Experimental waveforms of PWM.

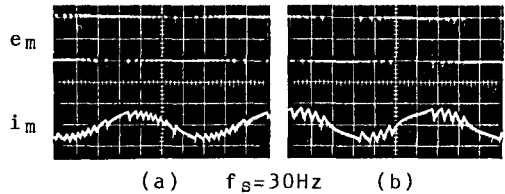


Fig. 5 Experimental waveforms of armature voltage e_m and armature current i_m of motor driven by PWM inverter.

得られ、 V_h が小さい程電機子電流 i_m は正弦波に基づき高調波成分が少なくなることが分る。

なお積分器の入力信号をインバータの出力より得ればパルス幅変調を受けたインバータの出力電圧 e_m は安定化され、この系はレギュレータの機能を有するようになる。

3. 高調波解析^{2), 3)}

第1図の回路において帰還回路の増幅度を K_f とすれば出力信号 v_o と帰還信号 v_f との間に次式が成立する。

$$\tau_f \frac{dv_f}{dt} + v_f = K_f v_o \quad (1)$$

ただし、 $\tau_f = R_f C_f$

また、偏差信号 v_e は増幅度 K_e の増幅器をとおして得られるとすれば次式が成立する。

$$v_e = K_e (v_s - v_f) \quad (2)$$

(1), (2)式から偏差信号 v_e について整理すれば

$$\tau_f \frac{dv_e}{dt} + v_e = K_e \left(\tau_f \frac{dv_s}{dt} + v_s - K_f v_o \right) \quad (3)$$

を得る。

<3・1> 基準信号 v_s が一定の場合 $v_s = V_s$ の場合には出力 v_o は、第6図に示すように期間 T_1, T_2 は $T_1 \neq T_2$ であり、周期 T は一定な矩形波となる。期間 T_1 は $v_o(t_1 < t \leq t_2) = V_o$ 、 $v_e(t_1) = V_h$ および $v_e(t_2) = -V_h$ なる条件より、また期間 T_2 は $v_e(t_2 < t \leq t_3) = -V_o$ 、 $v_e(t_2) = -V_h$ および $v_e(t_3) = V_h$ なる条件より(3)式から

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{T_1} dt &= -\tau_f \int_{V_h}^{-V_h} \frac{dv_e}{K_e K_f V_o - V_s + v_e} \\ \int_0^{T_2} dt &= -\tau_f \int_{-V_h}^{V_h} \frac{dv_e}{K_e K_f V_o - V_s + v_e} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

が成立し、 T_1, T_2 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \tau_f \ell_n \frac{K_e (K_f V_o - V_s) + V_h}{K_e (K_f V_o - V_s) - V_h} \\ T_2 &= \tau_f \ell_n \frac{K_e (K_f V_o - V_s) + V_h}{K_e (K_f V_o + V_s) - V_h} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

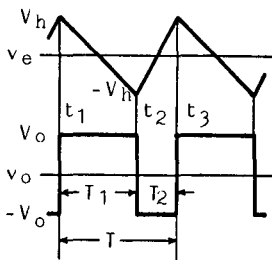


Fig. 6 Waveforms of PWM when $V_s = \text{constant}$.

出力 v_o の周波数 f_c は(5)式より

$$f_c = \frac{1}{T_1 + T_2} = f_0 + 1 / \left\{ \tau_f \ell_n \frac{1 - K_e V_s / (K_e K_f V_o + V_h)}{1 - K_e V_s / (K_e K_f V_o - V_h)} \right\} \quad (6)$$

となる。ただし、

$$f_0 = 1 / 2 \tau_f \ell_n \frac{K_e K_f V_o + V_h}{K_e K_f V_o - V_h} \quad (7)$$

基準信号 v_s が $v_s = 0$ の場合は(5)式より $T_1 = T_2$ となり、正負の半周期が等しい矩形波で、本回路は自走のマルチバイブレータ動作を行う。この時の共振周波数は(7)式で与えられる。

$v_s = V_s$ の場合は(5)式から $T_1 > T_2$ であり、 $v_s = -V_s$ の場合は $T_1 < T_2$ となることが分る。また(5)式から基準信号 v_s が

$$|V_s| < \left| K_f V_o - \frac{V_h}{V_e} \right| \quad (8)$$

を満足すれば出力の波形が矩形波となる。 v_s が(8)式の範囲外であれば出力には V_o あるいは $-V_o$ の直流電圧が生じる。

第6図の出力波形 v_o をフーリエ展開すると次式で与えられる。

$$v_o = \frac{V_o}{\pi} \left[\omega_c T_1 - \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos n \omega_c T_1) \sin n \theta t + \sin n \omega_c T_1 \cos n \theta(t) \right] \quad (9)$$

<3・2> 基準信号 v_s が正弦波の場合 この場合には第3図に示したように期間 T_1^*, T_2^* が v_s によって変調され正弦波 PWM 信号が得られる。従って、この正弦波 PWM 波形のフーリエ展開を求めるために、まず期間 T_1^*, T_2^* および周波数 f_m を時間の関数として求め、次にこれらを第7図に示す基準信号 v_s が一定の場合の出力波形のフーリエ展開である(9)式に代入し、正弦波 PWM 信号のフーリエ展開を求める。

$v_s = V_{sm} \sin(\omega_s t + \theta_s)$ のとき偏差信号 v_e に対し(3)式より次式が成立する。

$$\tau_f \frac{dv_e}{dt} + v_e = K_e \{ a V_{sm} \sin(\omega_s t + \theta) - K_f v_o \} \quad (10)$$

ただし、 $a = \sqrt{1 + (\omega_s \tau_f)^2}$ 、 $\theta = \theta_s + \tan^{-1} \omega_s \tau_f$ (11) (10)式より偏差信号 v_e は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v_e &= K_f v_o(t_i^*) + K_e V_{sm} \sin(\omega_s t + \theta_s) \\ &\quad + \{ v_e(t_i^*) + K_f v_o(t_i^*) \\ &\quad - K_e V_{sm} \sin(\omega_s t_i^* + \theta_s) \} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{t - t_i^*}{\tau_f}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

期間 T_1^* は $v_e(t_1^*) = V_h$ 、 $v_e(t_2^*) = -V_h$ 、 $v_o(t_1^* < t \leq t_2^*) = -V_o$ なる条件、期間 T_2^* は $v_e(t_2^*) = -V_h$ 、 $v_e(t_1^{*+1}) = V_h$ 、 $v_o(t_2^* < t \leq t_1^{*+1}) = -V_o$ なる条件と(12)式より求められる。これを解析的に求めるため

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega_s t^* + \theta_s + \omega_s T^*) &\approx \sin(\omega_s t^* + \theta_s) \\ &+ \cos(\omega_s t^* + \theta_s) \cdot \omega_s T^* \\ \exp(-T^*/\tau_f) &\approx 1 - T^*/\tau_f \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

の1次近似式を用いれば期間 T_1^* , T_2^* は

$$\left. \begin{aligned} T_1^* &= \frac{1}{1 - aM_f \sin(\omega_s t_1^* + \theta)} \cdot \frac{1}{2f_v} \\ T_2^* &= \frac{1}{1 + aM_f \sin(\omega_s t_2^* + \theta)} \cdot \frac{1}{2f_v} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} M_f &= \frac{K_e V_{sm}}{K_e K_f V_o + V_h} \\ f_v &= \frac{K_e K_f V_o + V_h}{4 V_h \tau_f} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(14)式から周期 T^* は次式で与えられる。

$$T^* = \left\{ \frac{1}{1 - aM_f \sin(\omega_s t_1^* + \theta)} + \frac{1}{1 + aM_f \sin(\omega_s t_2^* + \theta)} \right\} \frac{1}{2f_v} \quad (16)$$

(16)式において振幅 aM_f を小さくしていくと周期 T^* と T^{*+1} との比は1に近づいていく。この場合、本方式による正弦波 PWM 波形は周波数が除々に変化する FM 波として近似できる。このとき期間 T_{1m} , T_{2m} , 周期 T_m および瞬時周波数 f_m は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} T_{1m} &= 1 / \{1 - aM_f \sin(\omega_s t + \theta)\} \cdot 2f_v \\ T_{2m} &= 1 / \{1 + aM_f \sin(\omega_s t + \theta)\} \cdot 2f_v \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$T_m = 1 / (T_{1m} + T_{2m}) = 1 / \{ [1 - aM_f \sin(\omega_s t + \theta)] + [1 + aM_f \sin(\omega_s t + \theta)] \} \cdot 2f_v \quad (18)$$

$$f_m = \left\{ 1 - \left(\frac{aM_f}{2} \right)^2 + \left(\frac{aM_f}{2} \right)^2 \cos 2(\omega_s t + \theta) \right\} f_v \quad (19)$$

瞬時角周波数 $\theta(t)$ は(19)式を用いて

$$\theta(t) = \int 2\pi f_m dt = \left\{ 1 - \left(\frac{aM_f}{2} \right)^2 \right\} \omega_v t + \left(\frac{aM_f}{2} \right)^2 \frac{\omega_v}{\omega_s} \sin(\omega_s t + \theta) + \theta_c \quad (20)$$

となる。ただし、

$$\omega_v = 2\pi f_v, \quad \theta_c = \theta_0 + \frac{(aM_f)^2}{2} \frac{\omega_v}{\omega_s} \theta \quad (\theta_0 = \text{積分定数})$$

(18), (19)式から

$$\omega_m T_1 = \{1 + aM_f \sin(\omega_s t + \theta)\} \pi \quad (21)$$

となり、(20)式からベッセル関数 J_n を用いて、公式

$$\sin(\theta_a + x \sin \theta_b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \sin(\theta_a + n\theta_b) \quad (22)$$

を適用すれば

$$\begin{aligned} \sin n\theta(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i \left(n \frac{a^2 M_f^2}{4} \frac{\omega_v}{\omega_s} \right) \\ &\times \sin \left[\left\{ n \left(1 - \frac{a^2 M_f^2}{2} \right) \omega_v + 2l\omega_s \right\} t \right. \end{aligned}$$

$$\left. + n\theta_c + 2l\theta \right] \quad (23)$$

となる。さらに(23)式から次式が求められる。

$$\begin{aligned} \sin n(\theta - \omega_m T_1) &= (-1)^n \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i \left(n \frac{a^2 M_f^2}{4} \frac{\omega_v}{\omega_s} \right) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{2l-m}(naM_f\pi) \times \sin \left[\left\{ n \left(1 - \frac{a^2 M_f^2}{2} \right) \omega_v \right. \right. \\ &\left. \left. + m\omega_s \right\} t + n\theta_c + m\theta \right] \end{aligned} \quad (24)$$

(21)~(24)式を(9)式に代入し整理すれば正弦波 PWM 波形のフーリエ展開である次式を得る。

$$\begin{aligned} v_o &= \left[aM_f \sin(\omega_s t + \theta) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \right. \\ &\left. \varepsilon_{m-2l} J_i \left(n \frac{a^2 M_f^2}{4} \frac{\omega_v}{\omega_s} \right) \right. \\ &\left. \times \sin \left[\left\{ n \left(1 - \frac{a^2 M_f^2}{2} \right) \omega_v + m\omega_s \right\} t \right. \right. \\ &\left. \left. + n\theta_c + m\theta \right] \right] V_o \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、

$$\varepsilon_{m-2l} = \begin{cases} 1 - (-1)^n J_n(naM_f\pi) & : m=2l \\ -(-1)^{n+m-2l} J_{m-2l}(naM_f\pi) & : m \neq 2l \end{cases}$$

$$n=1, 2, 3, \dots; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(25)式から、本方式によって得られる正弦波 PWM 波形の特性は以下ようになる。

1) 基本波成分：基本波 ω_s の成分 v_{oF} は

$$\begin{aligned} v_{oF} &= aM_f V_o \sin(\omega_s t + \theta) = \sqrt{1 + (\omega_s \pi \tau_f)^2} \\ &\times \frac{V_o}{K_e K_f V_o + V_h} V_{sm} \sin(\omega_s t + \theta) \end{aligned} \quad (26)$$

となり、基準信号 v_s の大きさ V_{sm} に比例する。ただし、 V_{sm} は(8)式を満足する必要がある。位相は $\theta = \theta_s + \tan^{-1} \omega_s \tau_f$ であるから出力の基本波成分は基準信号 v_s より $\tan^{-1} \omega_s \tau_f$ 進んでいる。(26)式から分るように v_{oF} は低域フィルタの特性によって変化する。

$\omega_s \tau_f \gg 1$ ($f_s \gg 1/2\pi\tau_f$) の場合は、すなわち低域フィルタが純粋な積分器の場合には v_{oF} の振幅 V_{oF} は

$$V_{oF} \approx \omega_s \tau_f \frac{K_e V_o V_{sm}}{K_e K_f V_o + V_h} \quad (27)$$

となり、変形すると

$$\frac{V_{oF}}{f_s} = 2\pi\tau_f \frac{K_e V_o V_{sm}}{K_e K_f V_o + V_h} \quad (28)$$

となる。この関係は基準信号 v_s の振幅 V_{sm} が一定であれば、周波数 f_s と無関係に出力 v_o の基本波の振幅 V_{oF} と周波数 f_s との比が一定であることを示しており、この特性は電動機を駆動する際に有効である。位相 θ は $\tan^{-1} \omega_s \tau_f = 90^\circ$ となり出力 PWM 信号の基本波は基準信号 v_s より 90° 進む。

一方、 $\omega_s \tau_f \ll 1$ ($f_s \ll 1/2\pi\tau_f$) の場合は、

$$V_{oF} \approx \frac{K_e V_o V_{sm}}{K_e K_f V_o + V_h} \quad (29)$$

となり、 V_{oF} は基準信号 v_s の振幅 V_{sm} に比例し、位相は $\theta = \theta_s$ となり同相となる。

2) 高調波成分；高調波の角周波数 ω_h は

$$\omega_h = n \left(1 - \frac{a^2 M_f^2}{2} \right) \omega_v + m \omega_s \quad (30)$$

で与えられ、振幅 V_{oh} は次式で与えられる。

$$V_{oh} = \frac{2V_o}{n\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \epsilon_{m-2l} J_l \left(n \frac{a^2 M_f^2}{4} \frac{\omega_v}{\omega_s} \right) \quad (31)$$

上式から本方式による変調は、 $m=0$ における周波数(中心周波数)は基準信号の振幅 V_{sm} あるいは周波数 f_s が変れば変化し、中心周波数に対し非対称な側帯波を発生することが分る。

第7図は基準信号 v_s の周波数 f_s に対する出力の PWM 信号 v_o の基本波の振幅 V_{oF} の関係を示したもので、低域フィルタの時定数 τ_f をパラメータとしている。 v_s の大きさは一定であり、 $f_s = 70\text{Hz}$ にて出力の波形が矩形波となるように v_s を設定した。このため周波数 f_s が高くなるに従い aM_f が十分小さいという仮定がずれ、(26)式より求めた計算値と実験値との差が大きくなっている。時定数 τ_f が大きくなるに従い V_{oF}/f_s は一定の特性が向上し、(27)式が成立する領域が広がっているのが分る。第8図は PWM 波形のスペクトルの一例で基本波の周波数 f_s に対する高調波は発生しておらず、非対称の側帯波をもっていること等が分る。

<3・3> 基本波に対する伝達関数 前節で述べたように出力の基本波の位相は基準信号 v_s に対し $\tan^{-1} \omega_s \tau_f$ 進んでいることから、コンパレータの伝達関数

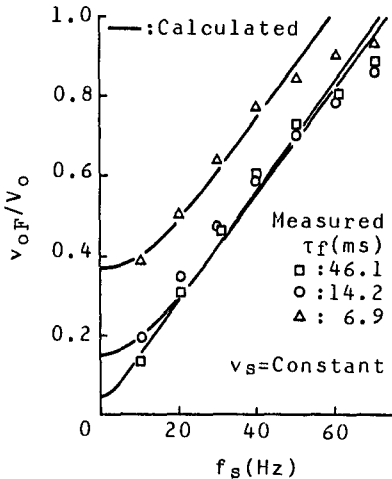


Fig. 7 Fundamental components in PWM waveforms.

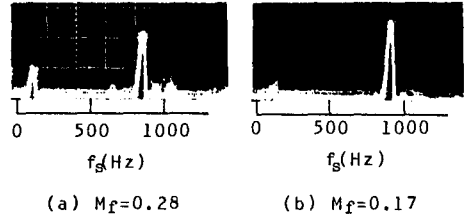


Fig. 8 Harmonic spectrum of PWM waveforms.

$G_c(s)$ を

$$G_c(s) = K_c(1 + \tau_f s) \quad (32)$$

と仮定すれば、低域フィルタの伝達関数は第2図(b)より $K_f/(1 + \tau_f s)$ であり、第1図に示す全伝達関数 $V_o(s)/V_s(s)$ は次式で表わされる。

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{K_e K_c}{1 + K_e K_f K_c} (1 + \tau_f s) \quad (33)$$

このときのゲイン $|V_o(s)/V_s(s)|$ は

$$\left| \frac{V_o(s)}{V_s(s)} \right| = \frac{K_e K_c \sqrt{1 + (\omega_s \tau_f)^2}}{1 + K_e K_f K_c}$$

であり、これが $K_e \sqrt{1 + (\omega_s \tau_f)^2} V_o / (V_h + K_e K_f V_o)$ に等しくなければならないことから、ゲイン K_c が次式のように求められる。

$$K_c = \frac{V_o}{V_h} \quad (34)$$

(32)~(34)式よりコンパレータの基本波に対する伝達関数 $G_c(s)$ は

$$G_c(s) = \frac{V_o}{V_h} (1 + \tau_f s) \quad (35)$$

となる。従って本回路の伝達関数のブロック図は第9図(a)あるいは(b)のように表わされる。

前節で述べた基本波に対する特性は第9図からも理解できる。

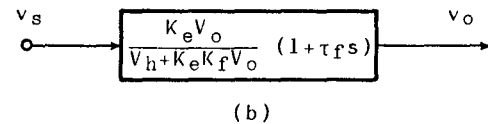
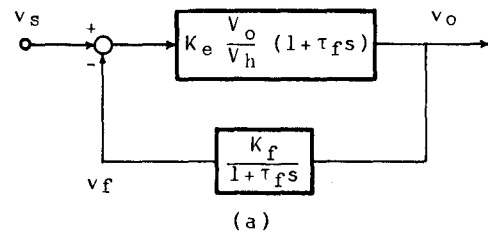


Fig. 9 Transfer function for fundamental component.

4. 入出力の同期について

第1図の回路では基準信号 v_s と PWM 信号 v_o の同期は v_s あるいは周波数 f_s に依存し、常に同期するとは限らない。この同期は第2図(b)に示すスイッチ SW_f によってコンデンサ C_f の電荷を周期的にリセットすれば簡単に達成することができる。このリセットを基準信号 v_s の半周期毎に十分短いパルスによって行った時のスペクトルの一例を第10図に示す。この場合の回路条件は第8図の場合と同一である。これから同期による基本波への影響はなく、高調波へ影響が出ているのが分る。

5. むすび

以上、正弦波 PWM 信号を得るための回路方式を提案し、高調波解析を行った結果以下のことが明らかとなった。

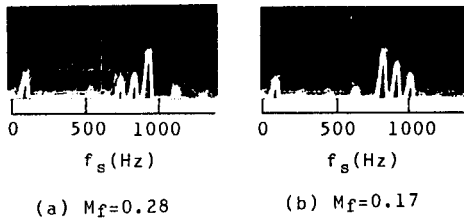


Fig. 10 Harmonic spectrum of PWM waveforms with synchronizing signal.

1) 基本波の振幅は、積分要素の時定数 τ_f が十分大きい場合は、基準信号 v_s が一定の状態 V/f =一定の特性が得られ、位相は 90° 進む。一方 τ_f が十分小さい場合は、出力の基本波は v_s の大きさに比例し、位相は同相となる。

2) 高周波の中心周波は基準信号 v_s 、あるいはその周波数 f_s を変えることにより変化し、非対称の側帯波を生じる。

3) コンパレータの伝達関数 $G_c(s)$ は $G_c(s) = V_o(1 + \tau_f s)/V_n$ で与えられる。

このように本方式によれば極めて簡単な回路で、特別にキャリア信号を必要とすることなく正弦波の PWM 信号が得られ、しかも基準信号 v_s は一定のまま V/f =一定の特性が得られる。このため電動機の制御回路として最適と考えられる。また本回路を三組用いれば三相化も容易である。

同期と高調波の問題は、低次高調波の発生が少い同期方式の確立とともに今後の課題としたい。

文 献

- 1) 長尾・原田：昭和56年電気学会全国大会，No467.
- 2) 長尾・原田：昭和56年電気四学会九州支部連合大会，No203.
- 3) 長尾・原田：昭和57年電子通信学会総合全国大会，No S18-3.