特異性を有する問題における特殊要素剛性行列の収束判定法（2次元き裂）

河　角　省　治*

On the Convergence of the Super-Element Stiffness Matrix for Problems with Singularity (Two-dimensional cracks)

by

Shoji KAWAKADO

(Department of Structual Engineering)

There is an singularity at the tip of crack, the edge of notch, etc. In this case, it is need to use a special finite element to obtain stress distribution at exactly by the finite element technique. Many authors[1)2)3)4)] have discussed the applicability of stress intensity factors for plane cracks. Tong[4)] has adopted the hybrid-element concept and the complex variable technique for constructing a special super-element to be joinning with conventional finite element for the analysis of elastic stress intensity factors for plane cracks.

The super-element stiffness matrix has been developed for the crack-tip region based on the hybrid model, which is assuming the stress and displacement by use of analytical values near the crack-tip. In this analysis, some complex polynomials are employed as the interpolating function of super-element formulation, so that the convergence of the super-element stiffness matrix cannot be obtained accurately. Therefore the eigen-values or the norm of the stiffness matrix are used for decision of the convergence, and some results of the stress intensity factors for centeral crack in the rectangular plates are shown in this paper.

1．はじめに

き裂や切り欠きのある平面板や，集中荷重を受ける平面板などのように，応力場に特異性のある問題を有限要素法により解析しようとする場合，変位や応力を精度よく求めるためには有限要素解析に種々の工夫が必要とされる．特に2次元き裂については，有限要素法を用いたき裂先端の応力拡大係数の解析に関する研究が，すでに多くの著者によりなされている[1)2)3)4)]ここでは精度面と実際の構造物への適用における汎用性の面において有利であると考えられる，Tongら[4)]の提案する方法によるき裂先端の特殊要素剛性行列について論じ，その収束性についていくつかの計算例により考察する．

Tongらの方法はき裂先端を含む領域を特異要素とし，特異要素の形状関数にはき裂近傍の変位および応力の級数解析解を用い，変分原理により剛性行列を求めている．この剛性行列は形状関数の項数を任意に選べるが，たとえばPian[5)]の応力混合型四角形要素のよ

昭和57年5月6日受理
*構造工学科

うに形状関数の適当な項数により剛性行列が一定値に収束するような，明確な収束性を示さない．そこで剛性行列の固有値やノルムを求め剛性行列の収束を判定する方法について検討を行い，さらに特異要素境界上の節点数が有限要素解の精度に与える影響について調べる．

2．汎関数

連続体の2次元問題において，応力境界 S_σ 上の作用力を $\overline{T_i}$，変位境界 S_u 上の変位を $\overline{u_i}$ とし，Reissner の汎関数に有限要素の要素境界 S_m 上の変位 $\tilde{u}_i$ を Lagrange の未定乗数として導入することにより，次の汎関数を得る．

$$\pi_R = t\sum_m \pi_m \tag{1}$$

$$\pi_m = \int_{S_m}(\tilde{u}_i - u_i)T_i ds - \int_{S\sigma m}\tilde{u}_i \overline{T}_i ds + \frac{1}{2}\int_{A_m}[\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i}) - b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}]dA \tag{2}$$

ここに，t は板厚，A_m は要素面積，$S_{\sigma m}$ は応力境界と重なる要素境界，b_{ijkl} は弾性コンプライアンス成分，σ_{ij} は要素内の応力テンソル成分，u_i は要素内の変位成分，T_i は要素境界上の作用力を示す．また Σ はすべての要素についての総和を意味する．

ここで(1)式の付帯条件は，隣接する要素Aおよび要素Bの共通境界において $\tilde{u}_i^{(A)} = \tilde{u}_i^{(B)}$ であり，また変位境界 S_u 上で $\tilde{u}_i = \overline{u_i}$ である．

さらに(1)式の停留条件は，

各要素において

$$(u_{i,j}+u_{j,i}) = 2b_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{3}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{4}$$

要素境界 S_m 上で，方向余弦を n_i として

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \tag{5}$$

$$u_i = \tilde{u}_i \tag{6}$$

応力境界 $S_{\sigma m}$ 上で

$$T_i = \overline{T}_i \tag{7}$$

である．

また，変分を受ける独立関数は σ_{ij}，T_i，u_i，$\tilde{u}_i$ であり，これらを各要素の一般化座標の適当な関数として表わすことにより要素剛性行列を得る．

特に(3)，(4)，(5)，(7)式を満足する独立関数，たとえば変位や応力の一般解を用いることにより(2)式は変形されて，次式のように線積分だけよりなる汎関数となり，剛性行列の定式は簡単なものとなる．

$$\pi_m = \int_{S_m}\tilde{u}_i\sigma_{ij}n_j ds - \frac{1}{2}\int_{S_m}u_i\sigma_{ij}n_j ds \tag{8}$$

3．特異要素剛性行列

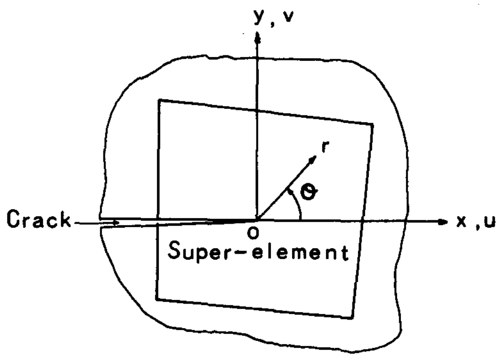

Fig. 1　Local coordinate of a super-element at the crack tip.

き裂を含む特異要素の座標を Fig. 1 に示す．き裂先端の座標原点において応力分布は特異性を示し，r の十分小さな範囲において応力は $1/\sqrt{r}$ に比例する．等方弾性およびき裂縁自由境界を仮定すると，き裂先端近傍の一般解として次の級数が考えられる．

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_{j=1}^{N}(f_j\beta_j + f_j^N\beta_{N+j})\\
\sigma_y &= \sum_{j=1}^{N}(g_j\beta_j + g_j^N\beta_{N+j})\\
\tau_{xy} &= \sum_{j=1}^{N}(h_j\beta_j + h_j^N\beta_{N+j})\\
u &= \sum_{j=1}^{N}(u_j\beta_j + u_j^N\beta_{N+j})\\
v &= \sum_{j=1}^{N}(v_j\beta_j + v_j^N\beta_{N+j})
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
f_j &= \frac{j}{2}r^{(\frac{j}{2}-1)}\Big[\{2+(-1)^j+\frac{j}{2}\}\cos(\frac{j}{2}-1)\theta - (\frac{j}{2}-1)\cos(\frac{j}{2}-3)\theta\Big]\\
f_j^N &= \frac{-j}{2}r^{(\frac{j}{2}-1)}\Big[\{2-(-1)^j+\frac{j}{2}\}\sin(\frac{j}{2}-1)\theta - (\frac{j}{2}-1)\sin(\frac{j}{2}-3)\theta\Big]\\
g_j &= \frac{j}{2}r^{(\frac{j}{2}-1)}\Big[\{2-(-1)^j-\frac{j}{2}\}\cos(\frac{j}{2}-1)\theta + (\frac{j}{2}-1)\cos(\frac{j}{2}-3)\theta\Big]\\
g_j^N &= \frac{-j}{2}r^{(\frac{j}{2}-1)}\Big[\{2+(-1)^j-\frac{j}{2}\}\sin(\frac{j}{2}-1)\theta + (\frac{j}{2}-1)\sin(\frac{j}{2}-3)\theta\Big]\\
h_j &= \frac{j}{2}r^{(\frac{j}{2}-1)}\Big[-\{(-1)^j+\frac{j}{2}\}\sin(\frac{j}{2}-1)\theta + (\frac{j}{2}-1)\sin(\frac{j}{2}-3)\theta\Big]
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$h_j^{\mathrm{N}}=\frac{-j}{2}r^{(\frac{j}{2}-1)}\Big[-\{(-1)^j-\frac{j}{2}\}\cos(\frac{j}{2}-1)\theta$$
$$-(\frac{j}{2}-1)\cos(\frac{j}{2}-3)\theta\Big]$$
$$u_j=\frac{1}{2\mathrm{G}}r^{\frac{j}{2}}\Big[\{\kappa+(-1)^j\}\cos\frac{j}{2}\theta$$
$$-j\sin\theta\sin(\frac{j}{2}-1)\theta\Big]$$
$$u_j^{\mathrm{N}}=\frac{1}{2\mathrm{G}}r^{\frac{j}{2}}\Big[-\{\kappa-(-1)^j\}\sin\frac{j}{2}\theta$$
$$-j\sin\theta\cos(\frac{j}{2}-1)\theta\Big]$$
$$v_j=\frac{1}{2\mathrm{G}}r^{\frac{j}{2}}\Big[\{\kappa-(-1)^j\}\sin\frac{j}{2}\theta$$
$$-j\sin\theta\cos(\frac{j}{2}-1)\theta\Big]$$
$$v_j^{\mathrm{N}}=\frac{1}{2\mathrm{G}}r^{\frac{j}{2}}\Big[\{\kappa+(-1)^j\}\cos\frac{j}{2}\theta$$
$$+j\sin\theta\sin(\frac{j}{2}-1)\theta\Big]$$

ただし　G：せん断弾性係数

$$\kappa=3-4\mu$$

$$\mu=\begin{cases}\nu & ：平面ひずみ\\ \nu/(1+\nu) & ：平面応力\end{cases}$$

ν：ポアソン比

また，β_j，$\beta_{\mathrm{N}+j}$ は境界条件で決定される未知係数である．ここに $\beta_{\mathrm{N}+2}=0$ であり，応力拡大係数と未知係数との間には

$$\mathrm{K}\ =\sqrt{2\pi}\beta_1,\qquad \mathrm{K}\ =\sqrt{2\pi}\beta_{\mathrm{N}+1} \tag{11}$$

の関係がある．

(5)式および(9)式を特異要素の形状関数として用いることにより汎関数(8)式の付帯条件(3)，(4)，(5)，(7)式は満足される．(8)式に(5)，(9)式を代入しこれを行列表示すると

$$\pi_m=\int_{S_m}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{u}}ds-\frac{1}{2}\int_{S_m}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}ds \tag{12}$$

となり，ここに

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{T}&=\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{u}&=\mathbf{U}\boldsymbol{\beta}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

であり，$\boldsymbol{\beta}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{U}$は次式である．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}&=[\beta_1,\ \cdots\cdots\cdots,\ \beta_{\mathrm{N}+1},\ \cdots\cdots\cdots]\\ \mathbf{R}&=\begin{bmatrix}f_1n_x+h_1n_y, & \cdots\cdots, & f_1^{\mathrm{N}}n_x+h_1^{\mathrm{N}}n_y, & \cdots\cdots\\ h_1n_x+g_1n_y, & \cdots\cdots, & h_1^{\mathrm{N}}n_x+g_1^{\mathrm{N}}n_y, & \cdots\cdots\end{bmatrix}\\ \mathbf{U}&=\begin{bmatrix}u_1, & \cdots\cdots\cdots, & u_1^{\mathrm{N}}, & \cdots\cdots\cdots\\ v_1, & \cdots\cdots\cdots, & v_1^{\mathrm{N}}, & \cdots\cdots\cdots\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

さらに，境界上の変位 $\tilde{u}_i$ については一般化変位ベクトル $\boldsymbol{q}$ を用いて

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=\mathbf{L}\boldsymbol{q} \tag{15}$$

のように表わされる．ただし$\mathbf{L}$は境界上の変位を表わす形状関数の行列表示であるが，ここでは隣接２節点間の直線境界辺の変位が線座標の１次関数により表わされるものとする．たとえばFig. 2(a)の特異要素の１－２辺においては

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{1-2}=\begin{bmatrix}1-\frac{s}{d} & 0 & \frac{s}{d} & 0\\ 0 & 1-\frac{s}{d} & 0 & \frac{s}{d}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}=\mathbf{L}_{1-2}\boldsymbol{q}_{1-2} \tag{16}$$

となり，これを要素の全境界辺について重ね合せることにより$\mathbf{L}$を得る．

(13)，(15)式を(12)式に代入すると

$$\pi_m=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} \tag{17}$$

ここに

$$\mathbf{G}=\int_{S_m}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}ds \tag{18}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}\int_{S_m}(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}+\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R})ds \tag{19}$$

となるが，(17)式より$\boldsymbol{\beta}$に関して$\delta\pi_m=0$として

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{G}\boldsymbol{q} \tag{20}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\boldsymbol{q} \tag{21}$$

のように未定係数$\boldsymbol{\beta}$と一般変位$\boldsymbol{q}$が関係づけられる．

さらに(17)式に(21)式を代入すると

$$\pi_m=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\boldsymbol{q} \tag{22}$$

となり，したがって剛性行列$\mathbf{K}$を次式のように得る．

$$\mathbf{K}=t\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G} \tag{23}$$

４．剛性行列の収束判定

４－１　特異要素モデル

特異要素の形状は任意の多角形が考えられるが，ここではFig. 2に示すようなx軸に関しての対称性を考慮した(a)５節点要素，(b)９節点要素，(c)８節点要素について考察する．これらの特異要素はき裂軸に関して対称な問題に用いられるものであり，非対称問題においてはこれらの要素をx軸回りに回転した要素を用いることで解析を行うことができるが，その要素特性は対称性を考慮した要素に準じるものであり，ここでは検討対象から除くこととした．

x軸に関しての対称性を有する問題においては，応力σ_x，σ_yおよび変位uはθの偶関数となり，応力τ_{xy}および変位vはθの奇関数となる．このことにより，(9)式における$\beta_{\mathrm{N}+j}$はすべて０，またx軸上において$\tilde{u}_i\mathrm{T}_i=u_i\mathrm{T}_i=0$となる．したがって，未知係数として$\beta_j(j=1\sim\mathrm{N})$，一般化変位として各節点における$u_p$，$v_p$

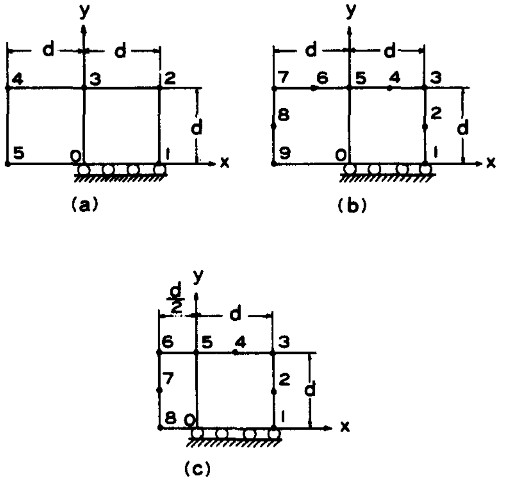

Fig. 2　Super-element for the symmetric deformation with respect to x-axis ; (a) five-node super-element,, (b) nine-node super-element, (c) eight-node super-element

（p は節点番号）を用い，また(18)式および(19)式の線積分は x 軸を除く境界について行うことにより剛性行列を得る．

ところで(17)式および(18)式の被積分関数はかなり複雑なものであり，この積分を解析的に求めることは多大の困難を伴う．そこで Gauss の数値積分を用いることとし，数値積分の誤差が最小となるように各積分区間における被積分関数の極点数を2倍したものを Gauss の分点数とすることとする．このことについては，電子計算機の倍精度(64 bits)演算により(17)式および(18)式を数値的に求めた結果より最適な分点数といえることを確認している．

4—2　収束判定

5節点要素について未知係数 β_j の項数Nを変化させた場合の剛性行列を求め，その対角要素 k_{66}，k_{22} および最大固有値 λ_{max} の値を Fig. 3 に示す．これより剛性行列は一定値に収束していないことが分り，β_j の項数Nをどのように決定するか問題となる．

Pian[6] は級数型の形状関数を用いる有限要素法について，級数の項数をN，一般化変位の数を n，要素の剛体自由度を ℓ とするとき $N \geqq (n-\ell)$ において剛性行列が安定したものとなることを

$$\mathrm{rank}(\mathbf{K}) = \min(N,\ n-\ell) \tag{24}$$

ここに　rank($\mathbf{A}$) は行列 $\mathbf{A}$ の階数

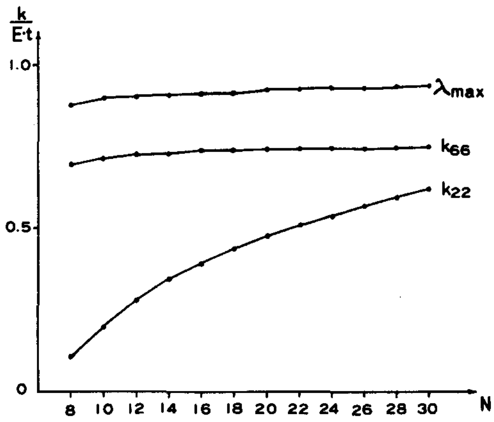

Fig. 3　Some values on five-node super-element stiffness matrix and eigen-values of them under various β's number, $\nu=0.3$

の関係より，すなわち rank($\mathbf{K}$)$=(n-\ell)$ となれば剛性行列の収束がいえることより明らかにしている．そこで5節点要素の剛性行列について，階数を非0の固有値の数として求めてみると $N \geqq 9$ において階数は9となり，$N \geqq (n-\ell)=9$ において剛性行列が収束していると判断される．

ところが，特異要素は複雑な級数を形状関数としており特異要素の形状に種々の多角形を考える場合，数値積分などの数値誤差により(24)式が成立しない場合が考えられる．そこで剛性行列のノルムを用いて剛性行列の階数の安定すなわち rank($\mathbf{K}$)$=(n-\ell)$ となることを判定する方法を検討する．

行列 $\mathbf{A}$ のノルムは一般には次式

$$\|\mathbf{A}\| = \max(\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|) \tag{25}$$

ここに $\boldsymbol{x}$ は任意のベクトル

によって定義されるが，これを求めることは困難であり固有値を求めることの方がより簡易であることから，次の3式を簡略化したノルムとして用いる．

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \Big(\sum_i\sum_j a_{ij}^2/n\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_i \lambda_i^2/n\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max\Big(\sum_j |a_{ij}|\Big)\quad (i=1\sim n)$$

$$\|\mathbf{A}\|_3 = \max\Big(\sum_j a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\quad (i=1\sim n) \tag{26}$$

ここに，a_{ij} は行列 $\mathbf{A}$ の要素，n は元数，λ_i は固有値，これらの式はいずれも単位行列 $\mathbf{E}$ に対して $\|\mathbf{E}\|=1$ となるように正規化されている．

Fig. 4 に5節点要素および Fig. 5 に9節点要素における剛性行列のノルムと級数の項数Nの関係を示す．これらより，ノルム $\|\mathbf{K}\|_3$ の収束を判定することにより階数の安定を判断できると考えられる．

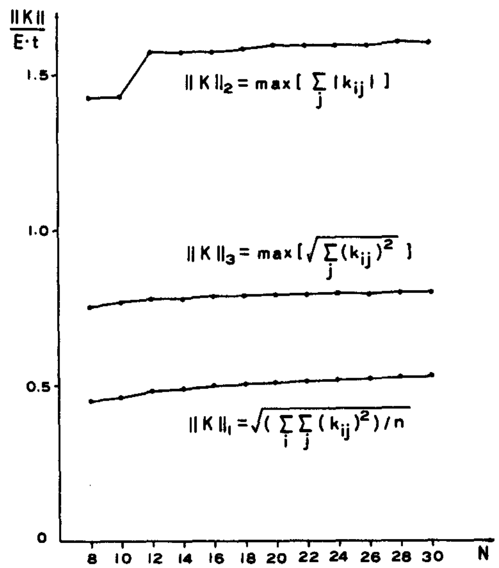

Fig. 4　Norms of five-node super-element stiffness matrix under various β's number, $\nu=0.3$

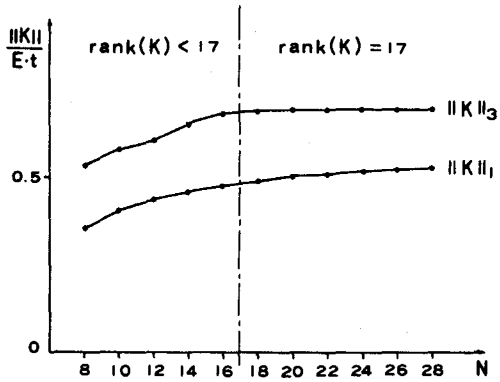

Fig. 5　Norms of nine-node super-element stiffness marix under various β's number, $\nu=0.3$

8 節点要素および 9 節点要素について，級数の項数 N とノルム $\|\mathbf{K}\|_3$ との関係を図示すると Fig. 6 のようになり，ノルム $\|\mathbf{K}\|_3$ の収束状況により 8 節点要素は N＝16，9 節点要素は N＝18 において剛性行列の階数は安定していると判定できる．そこで剛性行列の固有値より階数を算定すると 8 節点要素は N＝16 において rank(**K**)＝15＝$(n-\ell)$，N＜16 において rank(**K**)＜15 となり，9 節点要素は N≧18 において rank(**K**)＝17＝$(n-\ell)$，N＜18 において rank(**K**)＜17 となることよりノルム $\|\mathbf{K}\|_3$ を用いた判定法が妥当なものであると分る．

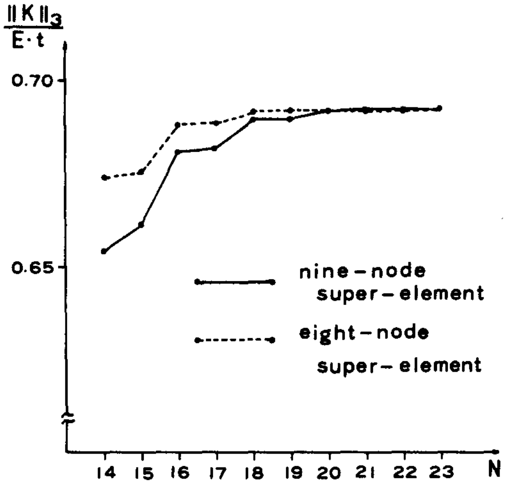

Fig. 6　A norm of super-element stiffness matrix under various β's number, $\nu=0.3$

5．応力拡大係数

ここでは前節で考察した剛性行列の収束判定をもとにして，引張を受ける正方形板の中央き裂の応力拡大係数を有限要素解析により求め，石田[7] の解との比較により解析精度について考察する．

Fig. 7 に示すような等分布引張を受ける正方形板において中央き裂のき裂長さを種々変化させた場合についてモデルA，モデルB，モデルC，モデルDの 4 種類の有限要素分割を用いて有限要素解析を行う．特異要素剛性行列は 5 節点要素には N＝9，9 節点要素には N＝18，8 節点要素には N＝16 の級数項数を用いるものとする．また周辺要素には Pian の応力混合型四角形要素を用いる．さらに特異要素剛性行列は倍精度 (64 bits) 演算，有限要素解析は単精度 (32 bits) 演算によるものとする．

Table 1 はモデルBの有限要素分割において 9 節点特異要素そして周辺要素には Pian の四角形または等ひずみ三角形要素を用いた場合の有限要素解析より得る種々のき裂長さにおける応力拡大係数である．ここで三角形要素を用いる場合は各正方形を対角線により 4 分割したものを分割モデルとしている．Table 1 より Pian の四角形要素を周辺要素として用いる方が精度のよい解を得ることが明らかであり，周辺要素には応力についての解析精度の高い要素を用いることで高精度の解が得られることが分る．

有限要素分割および特異要素節点数が解析精度にどのような影響を及ぼすかを調べると Table 2 ような

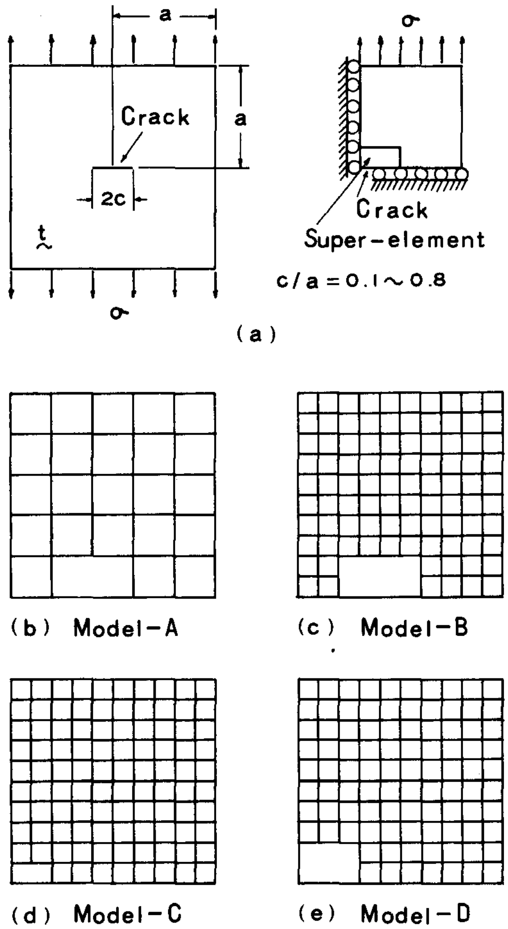

Fig. 7. Finite element meshes for upper quarter of a plate in tension with center crack ; (a) a qlate with symmetric center crack under uniform tension, (b) (5×5) mesh, (c) (10×10) mesh for nine-node super-element, (d) (10×10) mesh for five-node super-element, (e) (10×10) mesh for eight-node super-element

結果となり，5節点要素を用いた場合は有限要素分割を細かくしても解の精度の向上は少なく，9節点要素を用いる場合はモデルBの有限要素分割において高精度の解を得ることが分る．さらにき裂長さの短い $c/a=0.1$ の場合についてモデルBの分割に8節点要素を用いると $K_0=K_1/\sigma\sqrt{\pi c}=1.010$（誤差0.4%）の解を得る，これに対してモデルCの分割に5節点要素を用いると $K_0=0.994$（誤差2.0%）の解となり，要素節点数の多い特異要素を用いることにより高精度の応力拡大係数を得るということが分る．

Table 1　A plate with center crack in uniform tension, comparison of $K_0=K_1/\sigma\sqrt{\pi c}$ values with respect to surrouding elements, $\nu=0.3$

	Isida[7]	rectangular element	triangular element
0.2	1.055	1.052	1.050
0.3	1.123	1.121	1.120
0.4	1.216	1.213	1.211
0.5	1.334	1.330	1.328
0.6	1.481	1.477	1.475
0.7	1.68	1.673	1.670
0.8	—	1.989	1.986

Table 2　A plate with center crack in uniform tension, comparison of K_0 values with respect to mesh sizes, $\nu=0.3$

	0.2	0.4
Model A	1.032	1.195
Model B	1.052	1.213
Model C	1.044	1.205
Icida	1.055	1.216

Fig. 8に9節点要素または8節点要素を用いた場合の有限要素解と石田の解との比較を示しているが，両者のよい一致が分る．

ここで，特異要素剛性行列における級数項数と有限要素解析による応力拡大係数の値との関係について考察を試みると，それぞれの有限要素モデルにおいて特異要素の級数項数が前節で求めた項数以上の場合には応力拡大係数の値はTable 1，2に示したものであり，項数Nが減少すると応力拡大係数の精度は低下し，極端に項数Nが少ない場合においては有限要素解析ができなくなるという結果を得る．

6．まとめ

Tongらの提案する特異要素について考察を行い，次の結論を得た．

1）剛性行列の収束判定は形状関数が複雑な級数であるため困難なものとなるが，行列のノルムを用いる方法により剛性行列の階数の安定を判定できることより剛性行列の収束を決定できる．

2）き裂の応力拡大係数の解析においては，特異要素の節点数が多い程また周辺に応力の解析精度が高い有限要素を用いる程，高精度の解を得る．

なお，Tongらの提案する方法は広く応用できるも

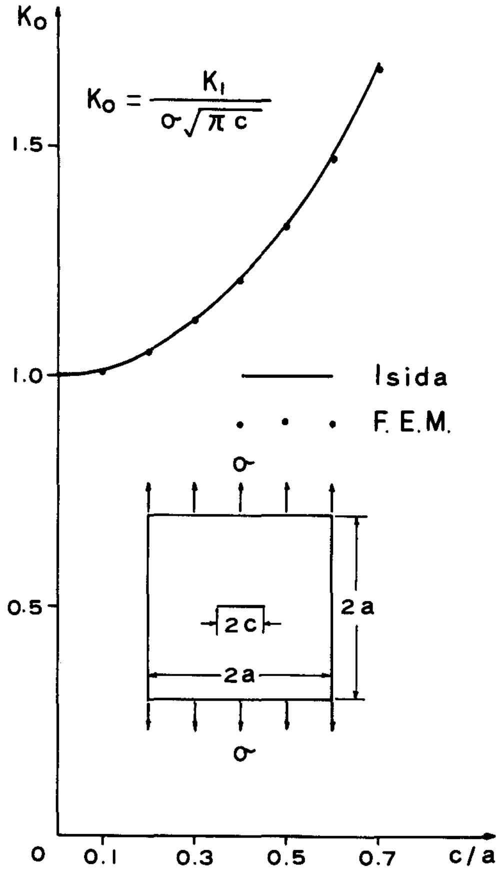

Fig. 8　Stress intensity factors for center crack in the rectangular tensile sheet, $\nu=0.3$

のであり，今後3次元き裂の問題などへの応用を試みる．また本研究において提案した行列のノルムを用いて剛性行列の収束判定を行う方法については，種々の級数型形状関数を用いる有限要素への適用を試みる所存である．

終りに，本研究に当って本学工学部福地信義助教授の御指導をいただいたことに謝辞を申しあげる．また本論文をまとめるに際しデータ作成等に協力頂いた本学卒業生高山雅史氏に感謝する．なお数値計算には長崎大学情報処理センター—FACOM—180 II AD を使用したことを付記する．

参考文献

1）山本善之，徳田直明，板構造中のクラックの応力拡大係数の有限要素法による解析法，日本造船学会論文集，第130号（1971）

2）P. F. Walsh ; 'The Computation of Stress Intensity Factors by a Special Finite Element Techniqe', Int. J. Solids Structures, Vol. 7 (1971)

3）樋口道之助，川原正言，近藤潔；特異性を含むサブストラクチャーによる応力拡大係数の解析，日本造船学会論文集，第135号（1974）

4）Pin Tong, T. H. H. Pian, S. J. Lasry, 'A Hybrid —Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity', Int. J. Numerical Method in Engineering, Vol. 7 (1973)

5）T. H. H. Pian ; 'Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution, AIAA J., Vol. 2 (1964)

6）Pin Tong, T. H. H. Pian, 'A Variational Principle and the Convergence of a Finite Element Method Based on the Assumed Stress Distribution', Int. J. Solids Structures, Vol. 5 (1969)

7）石田誠；き裂の弾性解析と応力拡大係数，培風館（1976）