

ケーブルの面外非線形自由振動

高橋 和雄*・田川 賢**

Nonlinear Out-of-Plane Free Vibrations of Cables

by

Kazuo TAKAHASHI

(Department of Civil Engineering)

and

Masaru TAGAWA

(Graduate Student of Nagasaki University)

Abstract

Nonlinear free vibrations of cables in three dimensions are reported. This problem is analyzed by a Galerkin method and harmonic balance method.

Numerical results are presented for out-of-plane free vibrations of cables with various sag-to-span ratios and inclined angles. Corresponding inplane vibrations which are excited through nonlinear coupling terms are significant for the particular sag-to-span ratio.

1. まえがき

ケーブルの運動方程式には、幾何学的非線形項を介してすべての変位成分（面内水平変位、面内鉛直変位、面外変位）が連成項として含まれるために、ケーブルの運動は一般に面内・面外振動が連成する三次元振動となることが知られている。面外加振によって特定のサグ比のケーブルでは、有意な面内応答が生ずる面内・面外連成応答は山口ら¹⁾によって解析されている。また、著者らは面内加振によって面外応答が特定の振動数領域で分岐する面外非線形分岐応答と面外線形係数励振振動解析の2つの立場から取り扱うことができることを示した²⁾。

しかし、これらの研究はいずれも動的外力が作用す

る場合の三次元応答特性を明らかにしたものであるために、ケーブルの三次元非線形固有振動特性を十分に把握するには至っていない。そこで、本研究は調和バランス法を用いてケーブルの面外非線形自由振動と付随する面内振動を各種のサグ比をパラメーターに解析するものである。これにより、ケーブルの面外非線形自由振動特性を明らかにしたものである。

2. ケーブルの運動方程式³⁾

Fig. 1 に示す座標系を導入すれば、完全可撓性、伸長性を仮定したケーブルの三次元非線形運動方程式は、次式で与えられる。

昭和57年 5月 6日受理

*土木工学科

**長崎大学大学院学生

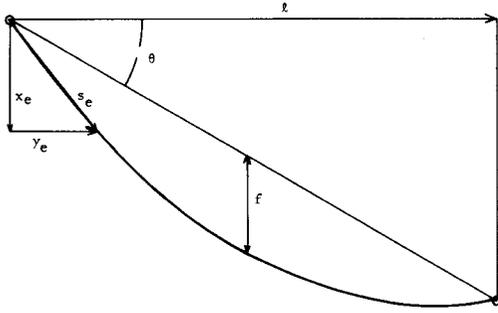


Fig. 1 Geometry of a cable.

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e} + c_1^2 x_e^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1^2 x_e y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_x \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e} + c_1^2 y_e' \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1^2 x_e y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_y \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (2)$$

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0^2 \frac{1}{x_e} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \right] - \frac{p_z \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (3)$$

ここで、 u, v : ケーブルの面内水平および鉛直変位、 w : ケーブルの面外変位、 t : 時間、 s_e : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 $c_0 = \sqrt{H_e/\rho_0}$: ケーブルの横波伝播速度、 H_e : ケーブルの初期水平張力、 ρ_0 : ケーブルの単位長さ当たりの質量、 $c_1 = \sqrt{EA/\rho_0}$: ケーブルの縦波伝播速度、 E : ヤング率、 A : 断面積、 p_x, p_y, p_z : 荷重強度、 Ω : 荷重の円振動数、 x_e, y_e : 初期形状の s_e による常微分を示すものとする。また、Fig. 1において、 θ : 支点間傾斜角、 f : ケーブルサグ ($= (y_e - x_e \tan \theta) \max$)、 l : 支点間水平距離とする。

3. 解法

(1) Galerkin法による時間に関する非線形連立常微分方程式の誘導

式(1)、(2)および(3)の解を直接求めることは不可能であるから、Galerkin法を用いて基準座標に関する多自由度系の運動方程式に変換する解法を採用する。

$$\begin{aligned} u &= \ell \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) U_i(s_e) \\ v &= \ell \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) V_i(s_e) \\ w &= \ell \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) W_i(s_e) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 P_i, Q_i : 未知の時間関数

$$\begin{aligned} U_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m^i \sin \frac{m\pi s_e}{\ell^*} && \left. \begin{array}{l} \text{面内線形振動の} \\ \text{第 } i \text{ 次固有振動形} \end{array} \right\} \\ V_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m^i \sin \frac{m\pi s_e}{\ell^*} && \left. \begin{array}{l} \text{面内線形振動の} \\ \text{第 } i \text{ 次固有振動形} \end{array} \right\} \\ W_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m^i \sin \frac{m\pi s_e}{\ell^*} && \left. \begin{array}{l} \text{面外線形振動の} \\ \text{第 } i \text{ 次固有振動形} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ℓ^* : 初期ケーブル長

式(4)を式(1)、(2)および(3)に代入して、Galerkin法を適用すると基準座標 P_i, Q_i に関する連立非線形常微分方程式群が得られる。

$$\begin{aligned} m_n^i \ddot{P}_n + k_n^i P_n + k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jm}^i P_j P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{qr}^i Q_q Q_r \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jm}^i P_j P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{jr}^i P_j Q_r Q_r \\ = 8\gamma^* f_n^i \cos \omega t \\ m_n^o \ddot{Q}_n + k_n^o Q_n + k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{pm}^o P_p P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{pm}^o Q_p P_m \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{pr}^o Q_p Q_r Q_r = 8\gamma^* f_n^o \cos \omega t \end{aligned}$$

ここに、 $n=1, 2, \dots, k=c_1/c_0$: ケーブルの縦波-横波伝播速度比、 $\gamma^* = \rho_0 g \ell / 8H_e$: ケーブルの初期形状を放物線で近似した場合のサグ比、 g : 重力の加速度、 $m_n^i, k_n^i, k_{jm}^i, \dots, m_n^o, \dots, f_n^i$: Galerkin法による積分項で、初期形状と面内・面外の固有振動形からなる定数、suffix I は面内を、suffix O は面外を表わす。上式において、時間関数 P_n, Q_n についてはケーブルのサグ比 $\gamma = f/\ell$ と同様に、ケーブルの支点間水平距離 ℓ で無次元化されている。また、時間については対応する弦 (サグ比 $\gamma=0$ の場合) の1次の固有円振動数 ω_1 の逆数 $\ell / (\pi c_0 \sqrt{\cos \theta})$ で無次元化されている。無次元固有円振動数 ω は加振円振動数 Ω を ω_1 で無次元化したものである。

なお、ケーブルの非線形振動を支配するパラメータは、形状パラメータとしてのサグ比 γ と傾斜角 θ 、および材料パラメータとしての縦波-横波伝播速度比 k

の3個である¹⁾。

(2) 調和バランス法による連立非線形常微分方程式の解法

連立非線形常微分方程式を解くにあたり、非線形項が大きくなっても有効性を失わず、かつ収束性の良い調和バランス法を適用する。式(5)の非線形項に2次および3次の非線形項が同時に含まれるために、 P_n, Q_n の解を次式で仮定する。

$$P_n = \sum_{e=0,1} a_e^n \cos e\omega t$$

$$Q_n = \sum_{e=0,1} b_e^n \cos e\omega t \quad (6)$$

ここに、 a_e^n, b_e^n : 未定定数。

式(6)を式(5)に代入して調和バランス法を適用すれば、 a_e^n, b_e^n を求めるための連立非線形代数方程式が得られる。

$$(k_n^l - m_n^l e^2 \omega^2) a_e^n + k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{jl}^n f_{jl}^e$$

$$+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} k_{qp}^n f_{qp}^e + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jlm}^n f_{jlm}^e$$

$$+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{jqr}^n f_{jqr}^e = 8\gamma^* f_n^e \delta_{e1} \quad (7)$$

$$(k_n^o - m_n^o e^2 \omega^2) b_e^n + k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{pl}^n f_{pl}^e$$

$$+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{plm}^n f_{plm}^e + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{pqr}^n f_{pqr}^e$$

$$= 8\gamma^* f_n^o \delta_{e1}$$

ここに、 $e=0, 1, 2, \dots, \delta_{e1} = \begin{cases} 1 & (e=1) \\ 0 & (e \neq 1) \end{cases}, f_{jl}^e, f_{qp}^e, f_{jlm}^e,$

$f_{jqr}^e, f_{pl}^e, f_{plm}^e, f_{pqr}^e: a_e^n, b_e^n$ などの関数 (Appendix A)

本研究の解の決定方程式(7)は、連立非線形偏微分方程式(1), (2)および(3)の定常解を空間には基準関数 (式(4)), 時間には Fourier 級数 (式(6)) を用いて Fourier の展開係数に関する連立非線形代数方程式として得られたものである。これを適当な初期値のもとで Newton-Raphson 法の繰り返し計算を用いて数値解析を行えば、必要な解が得られる。

なお、面外非線形自由振動曲線は、まず面外方向にのみ加振 ($p_x = p_y = 0, p_z \neq 0$) して面外応答を求め、徐々に荷重強度をおとすことによって求められた。

3. 面外非線形自由振動特性

ケーブルの面外方向の運動方程式には、面外変位 w に関して3次の非線形項が含まれるが、2次の非線形項は含まれない。そのため、ケーブルの面外振動は初期形状の面をはさんで対称に生じている。すなわち、

主共振 (b_1) と3倍の高調波共振 (b_3) が生じる。一方、面内方向の運動方程式中には面外変位 w に関して2次の非線形項が単独に含まれている。そのため、面外振動によって面内方向には、静的付加荷重と面外振動の2倍の振動数をもつ動的付加荷重による応答 (a_0^i, a_2^i) が引き起される。いわゆる面内・面外非線形連成応答が生じる。

以上より、面外方向の主共振と面内方向に生ずる面外振動の2倍の振動数をもつ応答の生ずる振動数が接近するサグ比をもつケーブルでは、面内振動と面外振動が共振を起こすと考えられる¹⁾。

(1) 水平ケーブル

水平ケーブルにおいては、その振動形は対称振動と逆対称振動に区別される。しかし、面外対称振動によって面内方向の振動は、面内対称振動形のみが加振され面内逆対称振動は加振されない。本研究では、最低次の面外・面内の対称振動形に着目し、伝播速度比 $k=30$, 傾斜角 $\theta=0^\circ$ の水平ケーブルについて、その非線形自由振動特性を明らかにしている。

Fig. 2(a)は、サグ比 γ に対する面外固有振動数 ω^o と面内固有振動数の半分 $\omega^i/2$ の関係を、サグ比 γ を横軸に、面内・面外の無次元固有振動数比 ω を縦軸にとり、示したものである。図中の実線は面外固有振動数 ω^o を、破線は面内固有振動数の $1/2$ の振動数 $\omega^i/2$ を表わしている。図よりわかるように水平ケーブルにおいては、 ω^o と $\omega^i/2$ の関係は、 $\gamma=0.026$ で一致し、これを境にその大小関係は逆転している。つまり、 $\gamma=0.026$ 近傍のサグ比を有するケーブルでは面内振動と面外振動間に共振が生ずると考えられる。

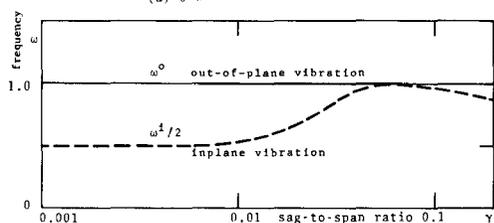
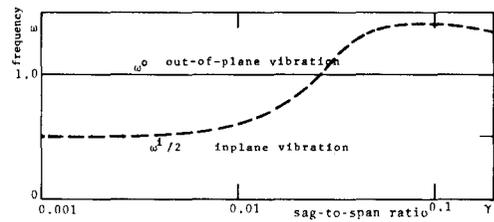


Fig. 2 Relations between inplane vibration and out-of-plane vibration.

次に, Fig. 3は $\gamma=0.026$ と $\gamma=0.0265$ のサグ比を有する水平ケーブルの中央点のリサージュ図を示したものである。図よりわかるように, ケーブルの振動は常に平衡点より上で生じている。これは面外振動によって生じる静的付加荷重による応答が鉛直上方つまり初期形状を打ち消す方向に働くためである。水平ケーブルでは, リサージュの形状は $\gamma=0.026$ を境に大きく変化し, $\gamma < 0.026$ のケーブルでは常に上に凸の形状を示し, $\gamma > 0.026$ のケーブルでは常に下に凸の形状を示している。これは, 面外振動によって $\gamma < 0.026$, すなわち $\omega^0 > \omega'/2$ の場合には同位相の面内振動が, $\gamma > 0.026$, すなわち $\omega^0 < \omega'/2$ の場合には逆位相の面内振動が引き起こされるからである。

Fig. 4, 5は水平ケーブルの面外非線形自由振動曲線を示したものである。Fig. 4は面内振動の影響を受け

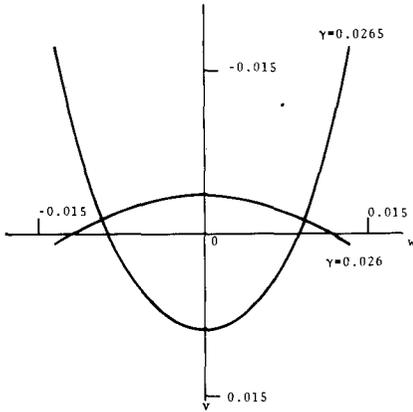


Fig. 3 Lissajous figure of nonlinear free vibration of cable.

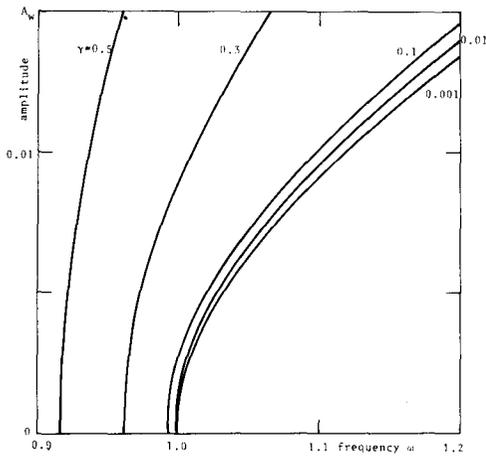


Fig. 4 Out-of-plane nonlinear free vibrations of cables with $k=30$ and $\theta=0^\circ$.

ない領域のサグ比を有するケーブルについて, Fig. 5は $\gamma=0.026$ 付近つまり面内振動の影響領域のサグ比 ($\gamma=0.02\sim 0.04$) を有するケーブルについて, 横軸に対称1次振動の面外非線形自由振動の振動数比 ω を, 縦軸に面外振動の振幅比 A_w をとり, サグ比 γ をパラメーターにプロットしたものである。Fig. 6は面外振動に付随する面内応答曲線を示し, 横軸に振動数比 ω を, 縦軸に面内振動の振幅比 A_v をとり, サグ比 γ をパラメーターにプロットしたものである。Fig. 4, 6か

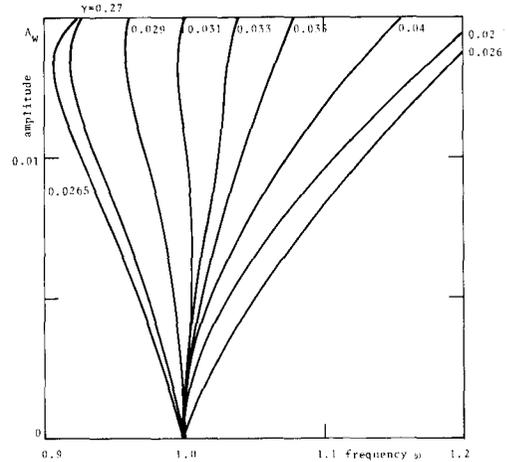


Fig. 5 Out-of-plane nonlinear free vibrations of cables with $k=30$ and $\theta=0^\circ$ near $\gamma=0.026$.

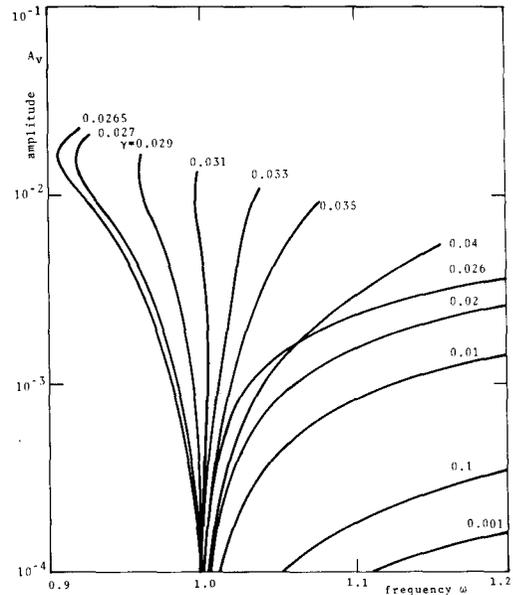


Fig. 6 Corresponding inplane vibrations under out-of-plane free vibrations of cables with $k=30$ and $\theta=0^\circ$.

らわかるように、影響領域外では水平ケーブルの面外非線形自由振動における振動数比と振幅比の関係は、3次の非線形項が支配的な硬化バネ特性を示し、それに付随する面内非線形応答は、面外振動に比べて小さく、 $\gamma=0.001$ のような弦や、 $\gamma=0.3, 0.5$ のようにサグ比の大きなケーブルでは面内変位は殆んど生じていない。また、ケーブルの非線形性は、弦に近いほど強く、逆にサグ比が増大するにつれて弱くなっている。Fig. 5, 6からわかるように、共振点近傍のサグ比の領域では、面外振動と面内振動が共振をおこし強い連成応答が生じるため、面外変位と同程度の面内変位が生じている。この付随する面内非線形応答の影響により、共振点である $\gamma=0.026$ を境に曲線はその傾きを大きく変え、 $\gamma=0.02\sim 0.026$ のサグ比を有するケーブルでは振動数比と振幅比の関係は硬化バネ特性を示し、 $\gamma=0.0265\sim 0.04$ のサグ比を有するケーブルでは軟化バネ特性を示している。つまり、 $\gamma=0.02\sim 0.026$ の場合は、面外振動によって引き起こされた同位相の面内振動の影響によりケーブルの剛性が増し、面外非線形自由振動の振動数比と振幅比の関係は硬化バネ特性を示す。そして、その非線形性は、同位相の面内振動が最も大きく加振される $\gamma=0.026$ の場合に最も強くなっている。一方、 $\gamma=0.0265\sim 0.04$ の場合には、逆位相の面内応答により、ケーブルの剛性は減少し、振動数比と振幅比の関係は軟化バネ特性を示している。そして、逆位相の面内振動が最も大きく加振される $\gamma=0.0265$ の場合に、非線形性は最も強くなっている。 $\gamma=0.03$ 付近では、非線形項の影響が弱くなっているのがわかる。

(2) 傾斜ケーブル

傾斜ケーブルについては、その振動形は対称振動と逆対称振動の分離ができないため、最低次の振動形に着目し非線形振動特性を調べた。

Fig. 2 (b)は、伝播速度比 $k=30$ 、傾斜角 $\theta=30^\circ$ の傾斜ケーブルについて、Fig. 2 (a)と同様に、サグ比 γ に対する面外固有振動数 ω^0 と面内固有振動数の半分 $\omega^1/2$ の関係を示したものである。図からわかるように、 ω^0 と $\omega^1/2$ の値は、 $\gamma=0.03\sim 0.1$ 付近で接近してはいるが、常に $\omega^0 > \omega^1/2$ となり $\omega^1/2$ が ω^0 を越えることはない。従って、傾斜ケーブルは、共振点は存在せず、面外振動に付随して生じる面内非線形応答は常に同位相である。

Fig. 7 は、傾斜ケーブルについて、横軸に1次振動の非線形自由振動の振動数比 ω を、縦軸に面外振動の振幅比 A_v をとり、サグ比 γ をパラメーターにプロットしたもので、面外非線形自由振動曲線を表わしてい

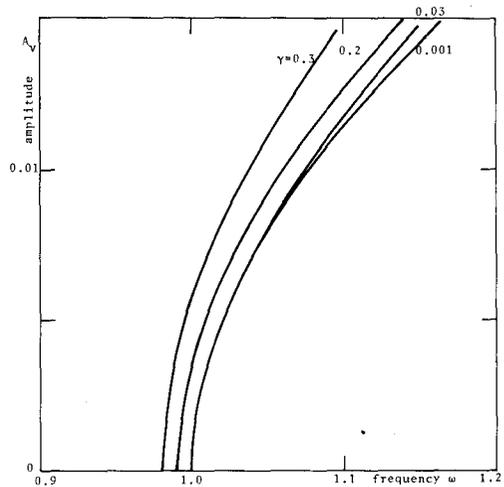


Fig. 7 Out-of-plane nonlinear free vibrations of cables with $k=30$ and $\theta=30^\circ$.

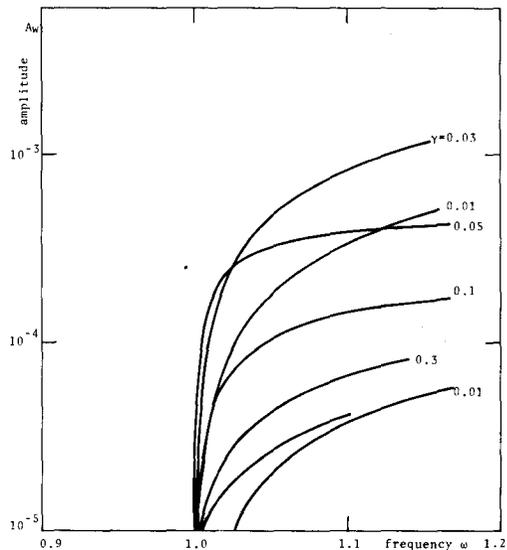


Fig. 8 Corresponding inplane vibrations under out-of-plane free vibrations of cables with $k=30$ and $\theta=30^\circ$.

る。Fig. 8 は、同じ傾斜ケーブルについて、面外振動に付随する面内非線形応答を示すもので、横軸に振動数比 ω 、縦軸に面内振動の振幅比 A_w をとりサグ比 γ をパラメーターにプロットしたものである。図からわかるように、傾斜ケーブルにおいては、面外非線形振動の振動数比と振幅比の関係は、常に硬化バネ特性を示し、その非線形性は、一般に弦に近いほど強くサグ比の増大に伴って弱くなっている。また、面外振動

に付随する面内応答は、面外振動に比べ小さい。γ = 0.03~0.1 付近では ω⁰ と ω'/2 の値が接近するため、比較的強い同位相の面内連成応答が生じている。

4. 結 語

本論文は、ケーブルの三次元非線形運動方程式を、Galerkin 法により基準座標に関する多自由度系の運動方程式に変換し、これに調和バランス法を適用して面外非線形自由振動特性を明らかにしたものである。

解析により得られた結果を要約すると

(1) 水平ケーブルの面外非線形自由振動の振動数と振幅の関係は、一般に硬化バネ特性を示し、付随する面内非線形応答は小さい。また、ケーブルの非線形性は、サグ比の増大に伴ない弱くなる。しかし、共振点近傍のあるサグ比の領域では、強い面内連成応答が生じ、面外非線形自由振動は面内振動の影響により、軟化バネ特性を示す。

(2) 傾斜ケーブルの面外非線形自由振動の振動数と振幅の関係は、常に硬化バネ特性を示し、その非線形性はサグ比の増大とともに弱くなる。

最後に、本研究の数値計算には長崎大学情報処理センター計算機 (FACOM M-180 II AD) を使用したことを付記する。

Appendix A

$$f_{3i}^0 = 2a_3^0 a_1^0 + a_1^0 a_1^0 + a_2^0 a_2^0 + a_3^0 a_3^0$$

$$f_{3i}^1 = \{2(a_2^0 a_1^0 + a_1^0 a_2^0) + a_1^0 a_2^0 + a_2^0 a_1^0 + a_2^0 a_3^0 + a_3^0 a_2^0\} / 2$$

$$f_{3i}^2 = \{a_1^0 a_1^0 + 2(a_2^0 a_2^0 + a_3^0 a_3^0) + a_1^0 a_3^0 + a_3^0 a_1^0\} / 2$$

$$f_{3i}^3 = \{2(a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0) + a_1^0 a_1^0 + a_2^0 a_1^0\} / 2$$

$$f_{3im}^0 = \{4(a_2^0 a_2^0 a_3^0 + 2(a_1^0 a_1^0 a_3^0 + a_1^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_1^0 a_3^0) + 2(a_2^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_3^0 a_2^0) + a_2^0 a_3^0 a_2^0) + 2(a_2^0 a_3^0 a_2^0 + a_3^0 a_2^0 a_3^0) + a_1^0 a_1^0 a_2^0 + a_1^0 a_2^0 a_1^0 + a_2^0 a_1^0 a_1^0 + a_1^0 a_2^0 a_2^0 + a_2^0 a_1^0 a_2^0 + a_2^0 a_3^0 a_1^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0 a_2^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0\} / 4$$

$$f_{3im}^1 = \{4(a_2^0 a_2^0 a_1^0 + a_1^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_1^0 a_3^0) + 3a_1^0 a_1^0 a_1^0 + a_1^0 a_1^0 a_3^0 + a_1^0 a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0 a_1^0 + 2(a_1^0 a_1^0 a_2^0 + a_2^0 a_1^0 a_2^0 + a_2^0 a_1^0 a_3^0) + 2(a_2^0 a_1^0 a_2^0 + a_2^0 a_2^0 a_1^0 + a_1^0 a_2^0 a_3^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0 a_2^0) + 2(a_1^0 a_1^0 a_3^0 + a_1^0 a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0 a_1^0) + a_2^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_3^0 a_2^0 + a_3^0 a_2^0 a_3^0\} / 4$$

$$f_{3im}^2 = \{4(a_2^0 a_2^0 a_2^0 + a_2^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_3^0 a_2^0) + 3a_2^0 a_2^0 a_2^0 + 2(a_2^0 a_1^0 a_1^0 + a_1^0 a_2^0 a_1^0 + a_2^0 a_1^0 a_1^0) + 2(a_1^0 a_1^0 a_2^0 + a_1^0 a_2^0 a_1^0 + a_2^0 a_1^0 a_1^0) + 2(a_2^0 a_3^0 a_2^0) + 2(a_2^0 a_1^0 a_3^0 + a_2^0 a_3^0 a_1^0 + a_1^0 a_2^0 a_3^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0 a_2^0) + a_1^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_1^0 a_3^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0 + a_3^0 a_1^0 a_2^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0\} / 4$$

$$f_{3im}^3 = \{4(a_2^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_3^0 a_2^0 + a_2^0 a_3^0 a_3^0) + a_1^0 a_1^0 a_1^0 + 3a_2^0 a_2^0 a_3^0 + 2(a_1^0 a_1^0 a_3^0 + a_1^0 a_2^0 a_3^0 + a_2^0 a_1^0 a_3^0 + a_2^0 a_2^0 a_3^0 + a_3^0 a_2^0 a_3^0) + 2(a_2^0 a_1^0 a_3^0 + a_2^0 a_3^0 a_1^0 + a_3^0 a_2^0 a_1^0) + a_1^0 a_2^0 a_2^0 + a_2^0 a_1^0 a_2^0 + a_2^0 a_3^0 a_2^0 + a_3^0 a_2^0 a_2^0\} / 4$$

参考文献

- 1) 山口・宮田・伊藤：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第308号，1981，pp. 37~45.
- 2) 高橋・村中・永田：ケーブルの三次元非線形振動，長崎大学工学部研究報告集，第16号，昭和56年7月，pp. 49~56.
- 3) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，第286号，1979，pp. 29~36.