

肺音信号のスパース表現と断続音分離への応用

酒井智弥*・里元はるか*・喜安千弥*・宮原末治*

Sparse Representation of Lung Sound Signals with Application to Separation of Crackles

by

Tomoya SAKAI* Haruka SATOMOTO* Senya KIYASU* Sueharu MIYAHARA*

This paper reports on preliminary analysis of pulmonary auscultation sounds via sparse representation of the sound signals for diagnostic classification. The pulmonary adventitious sounds associated with respiratory disorder are typically classified as continuous or discontinuous. The sound signals can therefore be represented as mixture of a small number of continuous and discontinuous signal components, which is called the sparse representation. A simple overcomplete basis set of the Fourier sinusoids and the Daubechies wavelets is suitable for the sparse representation of breath sounds and crackles. It is experimentally shown that the crackles can be separated from breath sounds using the sparse representation even if they overlap each other in time-frequency domain. This separation is demonstrated to be highly robust against random noise.

Key words: respiratory system diagnosis, electronic auscultation, source separation, compressed sensing

1. はじめに

従来、心音や肺音は医師が直接に聴診するものであったが、電子デバイスで心肺音を計測する電子聴診器¹⁾によって、現在は心肺音の記録・蓄積や伝送が可能になっている。また、音信号処理によって医学的に有意義な情報を抽出する研究が拓かれ、肺音については特徴抽出、異常の検出、識別等が試みられている²⁻¹¹⁾。本稿は、信号のスパース表現に基づく分離¹²⁻¹⁴⁾が電子聴診器による肺音解析に有効であることを示す予備研究について報告するものである。

肺音 (lung sounds) は呼吸音 (breath sounds) と副雑音 (accessory sounds) の総称である¹⁵⁾。肺音の構成要素は病理学的だけでなく聴覚的な比喻で命名されている²⁾。胸膜摩擦音や肺血管性雑音等を除く副雑音はラ音 (rales) と呼ばれる。ラ音には連続音と断続音があり、連続性ラ音は類鼾音 (rhonchus)、笛声音 (wheeze)、スクウォーク (squawk)、断続性ラ音は水泡音 (coarse crackles) と捻髪音 (fine crackles) に分類されている。

これら肺音の構成要素が時間周波数領域で持つ特徴

的な構造は古くから観察されており^{3,4)}、肺音信号のパターン解析もその構造を利用している。喜安ら⁵⁾は、短時間フーリエ変換により算出した周波数スペクトルを特徴量とし、呼吸と同期する異常音を検出する手法を開発した。正田ら^{6,7)}は、独立成分分析や非負行列因子分解によって様々な肺音の周波数スペクトルの基底系を機械学習した。Kandaswamyら⁸⁾は、非定常である肺音信号に対して時間周波数領域で特徴抽出することが適切であると考え、ウェーブレット係数から算出した特徴量をニューラルネットワークで識別した。その他、様々な特徴量と識別手法を組み合わせで比較する研究も見られる⁹⁾。

肺音は、信号の特徴や性質に基づき客観的に分類・識別されるべきである。しかしながら、肺音の構成要素は時間周波数領域で重なり合っており、信号の時間・周波数フィルタリングや多重解像度分解では構成要素の特徴を個別に抽出できない。聴取においては肺音と無関係なノイズが混入し、肺音が十分な音量で記録できるとも限らない。また、様々な発生と伝搬メカニズムを持つ種々の副雑音を学習するためには、大量のデータの入手と処理が必要となるであろう。これら

*情報システム工学科 (Computer and Information Sciences)
平成22年12月17日受理

の問題と要件から、肺音の構成要素を陽にモデル化や学習することなく、ノイズに埋もれた肺音を時間周波数領域における構造に従って分離する効率的な解析手法が有効であると考えられる。

本稿では、時間周波数領域で肺音信号の分布が局在している性質に着目し、この性質を活用した信号の表現と分離について検討する。このアプローチでは、例えば周波数成分が局在する時間連続的な成分とパルス状の成分に信号を分離することができる。これを肺音に適用すると断続性ラ音を抽出できることを実験的に確認する。また、この分離手法がノイズに極めて頑健であることを示す。

2. 肺音信号の表現と分離

肺音信号は時間周波数領域で特徴的な構造を持つ幾種類かの信号から構成されている。ゆえに、各構成要素を簡潔に合成できる基底によって信号を表現することが肺音の解析に有効であろう。この観点から、少数の基底関数で肺音を簡潔に表現し、構成要素に分離する枠組みを解説する。

2.1 信号のスパース表現

次のような性質を持つ時間信号 $y(t)$ を仮定する。

仮定 1 $y(t)$ は、互いにコヒーレンスの低いいくつかの基底関数の集合 \mathcal{A}_k ($\text{card } \mathcal{A}_k = n_k$) で展開可能な信号 $y_k(t)$ および基底関数と無相関なノイズ $e(t)$ の和で構成されている。

仮定 2 $y_k(t)$ の非ゼロの展開係数の数 m_k の総数 $\sum_k m_k$ は高々 m である。

有限区間において時間信号 $y(t)$ を標本化周波数 f_s で標本化した離散信号を d 次元ベクトル \mathbf{y} とする。同様に $y_k(t)$, $e(t)$ を標本化した離散信号を \mathbf{y}_k , \mathbf{e} とする。また、標本化した \mathcal{A}_k の基底関数を列とする $d \times n_k$ 行列を \mathbf{A}_k とする。このとき、仮定 1 から、次式のように信号 \mathbf{y} を基底の線形結合で表現できる。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum_k \mathbf{y}_k + \mathbf{e} = \sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{e} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{x}_k は $y_k(t)$ を \mathcal{A}_k で展開したときの係数からなる n_k 次元ベクトルである。また、 \mathbf{x} , \mathbf{A} はそれぞれすべての \mathbf{x}_k , \mathbf{A}_k を連結した $n = \sum n_k$ 次元ベクトルおよび $d \times n$ 行列である。

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \dots, \mathbf{x}_K^\top]^\top \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K] \quad (4)$$

仮定 2 から、 \mathbf{x} の n 個の成分のうち高々 m 個が非ゼロであり、 \mathbf{x} はスパース (疎) なベクトルである。式

(2) は、 \mathbf{x} の非ゼロ成分に対応する高々 m 個の基底関数の線形結合で離散信号 \mathbf{y} を表現している。これを離散信号のスパース表現と呼ぶ。

2.2 スパース正則化と信号分離

離散信号 \mathbf{y} が与えられたとき、 \mathbf{y} を基底 \mathbf{A} でスパースに表現できれば、 \mathbf{y} を構成する信号 \mathbf{y}_k を式 (1) によって個別に求めることができる¹²⁻¹⁴。この枠組みで信号 \mathbf{y} から \mathbf{y}_k に分離する。

基底 \mathbf{A} による離散信号 \mathbf{y} のスパース表現を求めることは、次式の最小化問題に定式化される。

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \quad \text{s. t.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq m \quad (5)$$

l^0 ノルム $\|\cdot\|_0$ はベクトルの非ゼロ成分の個数を表している。式 (5) は、非ゼロとなるべき \mathbf{x} の成分の組み合わせを見つける NP 困難な最適化問題である。 l^0 ノルムを l^1 ノルムへ緩和した凸問題

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \quad \text{s. t.} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq \delta \quad (6)$$

を解くことによってもスパースな解が得られることが知られており、その最小化解 $\hat{\mathbf{x}}$ の誤差の上界が解析されている^{22,25}。特にノイズを無視できる場合、 l^0 最小化解の一意性や l^1 最小化解との一致性が保証される条件が解明されている²³⁻²⁵。

式 (2) は未知ベクトル \mathbf{x} を母数とする線形回帰モデルであり、 \mathbf{A} の列ベクトルが張る部分空間 $\text{span } \mathbf{A}$ の次元が $\dim \text{span } \mathbf{A} < d$ のとき最小 2 乗法等で解を一意に推定できる。ただし、そのような推定値 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ は一般にスパースとはならない。一方、 $\dim \text{span } \mathbf{A} = d < n$ のとき、 \mathbf{A} の列ベクトルは d 次元空間の過完備な基底となるので、式 (2) によって \mathbf{y} を表現する \mathbf{x} は無数に存在する。仮定 2 は、 \mathbf{y} の表現に用いる基底の数に制限を設けることで解 \mathbf{x} を一意にする正則化となっている。また、仮定 1 から、基底関数と無相関なノイズは基底関数で張られる高々 m 次元の部分空間に射影成分を殆ど持たない。ゆえに、ノイズ \mathbf{e} がスパースに表現されることはなく、得られるスパースな解 \mathbf{x} はノイズに対して極めて鈍感であるという性質がある。

式 (6) の解法は LASSO¹⁶) が有名である。また、これと等価な最小化問題

$$\min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1) \quad (7)$$

等を解く優れたアルゴリズムが数多く開発されている¹⁷⁻²⁰。 λ はスパース性と誤差のバランスを取る正則化定数であり、式 (6) と等価な解を与える値が存在する。

2.3 断続音の分離

採用する基底関数の集合を工夫することで様々な信号の分離が可能となるが、ここでは具体的な解析手法の例として、呼吸音と断続音の分離を考える。呼吸音

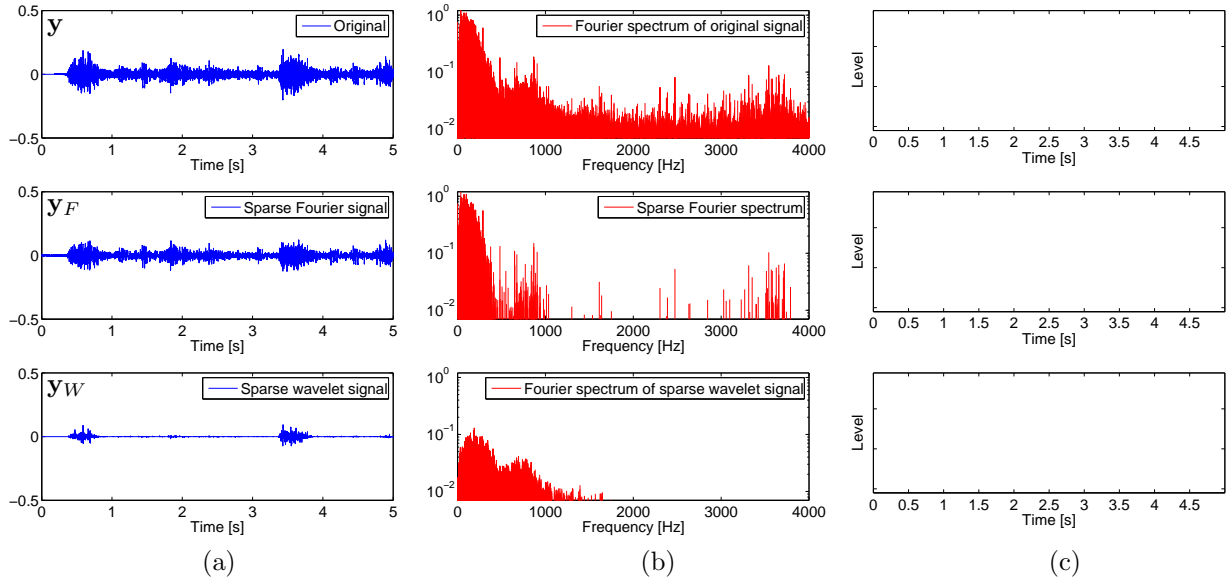


Fig. 1 Vesicular sound. First row: original signal \mathbf{y} . Second row: separated signal \mathbf{y}_F with sparse frequency spectrum. Third row: separated signal \mathbf{y}_W with sparse wavelet coefficients. (a) Waveform in time domain, (b) amplitude spectrum in frequency domain, and (c) wavelet coefficients.

は周波数スペクトルが低周波に集中しており、肺胞呼吸音で 500Hz, 気管呼吸音では 600Hz 程度まで分布している¹⁵⁾。一方、断続音は時間領域でパルス状の波形を持っており、それゆえ呼吸音に比べて広い周波数域に分布している。このような性質を考慮し、呼吸音の表現にフーリエ変換に類する基底、断続音の表現にウェーブレット変換基底を採用する。

離散フーリエ変換行列を \mathbf{A}_F , 離散ウェーブレット変換行列を \mathbf{A}_W とする。肺音 \mathbf{y} のスパース表現は

$$\mathbf{y} = [\mathbf{A}_F \mathbf{A}_W] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}_W \end{bmatrix} + \mathbf{e} \quad (8)$$

である。式 (6) あるいは式 (7) の解を用いて、分離された呼吸音と断続音の推定値

$$\mathbf{y}_F = \mathbf{A}_F \mathbf{x}_F, \quad \mathbf{y}_W = \mathbf{A}_W \mathbf{x}_W \quad (9)$$

を得る。便宜上、式 (8) や式 (9) は行列 \mathbf{A}_F , \mathbf{A}_W を用いて記述しているが、実際の演算は準線形時間の高速離散フーリエ変換や線形時間のウェーブレット変換で実行できるので、計算手間数は小さく、行列を確保する必要はない。

3. 実験

本実験では、呼吸音の聴診トレーニング用の資料¹⁵⁾ から、肺胞呼吸音と断続音が含まれている信号についてスパース表現と分離を試みる。

式 (8) の \mathbf{A}_F を高速コサイン変換, \mathbf{A}_W を分解レベル 3 までの Daubechies-10 ウェーブレット変換とする。なお、分解レベルを上げると \mathbf{A}_F より \mathbf{A}_W の基底が

スパース表現に使われる傾向が見られたが、ウェーブレットのタップ数で分離の性能に大きな違いは見られなかった。

まず、元信号 \mathbf{y} のノイズが小さい限り、 $f_s = 44.1\text{kHz}$ の信号を 1 秒 ($d = 44,100$) 当たり $m = \mathcal{O}(10^3)$ 程度でスパース表現しても、推定値の残差

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbf{y} - (\mathbf{y}_F + \mathbf{y}_W)\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \quad (10)$$

が -20dB 以下となることを確認した。これを目安に、実験ではすべて毎秒 $m = 1,600$ とする。仮に単精度で換算すると最大 51.2kbps であり、電話程度の音質に相当する情報量である。

式 (7) のスパース正則化には GPSR¹⁹⁾ を用いる。開発者が提供しているコードを MATLAB 7.7, Core i7 2.95GHz で実行した。初期値は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 正則化定数 $\lambda = 10^{-2} \|\mathbf{A}^T \mathbf{y}\|_\infty$ とする。十分に収束したときの推定値が $\|\mathbf{x}\|_0 \leq m$ となるまで λ を 2 倍しつつ、前回の解を新たな初期値として反復計算した。これらの設定と計算の環境で、以降の実験は元信号 1 秒当たり約 5 秒の計算時間を必要としている。

3.1 呼吸音と断続音の分離

肺胞呼吸音のスパース表現

断続音が含まれない肺胞呼吸音の分離の結果を図 1 に示す。図 1(b) 中段の \mathbf{y}_F のスペクトルおよび図 1(c) 下段の \mathbf{y}_W のウェーブレット係数にスパース正則化が施されている。元信号 \mathbf{y} は図 1(a) のようにほぼ \mathbf{y}_F で構成されており、 \mathbf{y}_W は \mathbf{y}_F より 20dB 程度小さい。

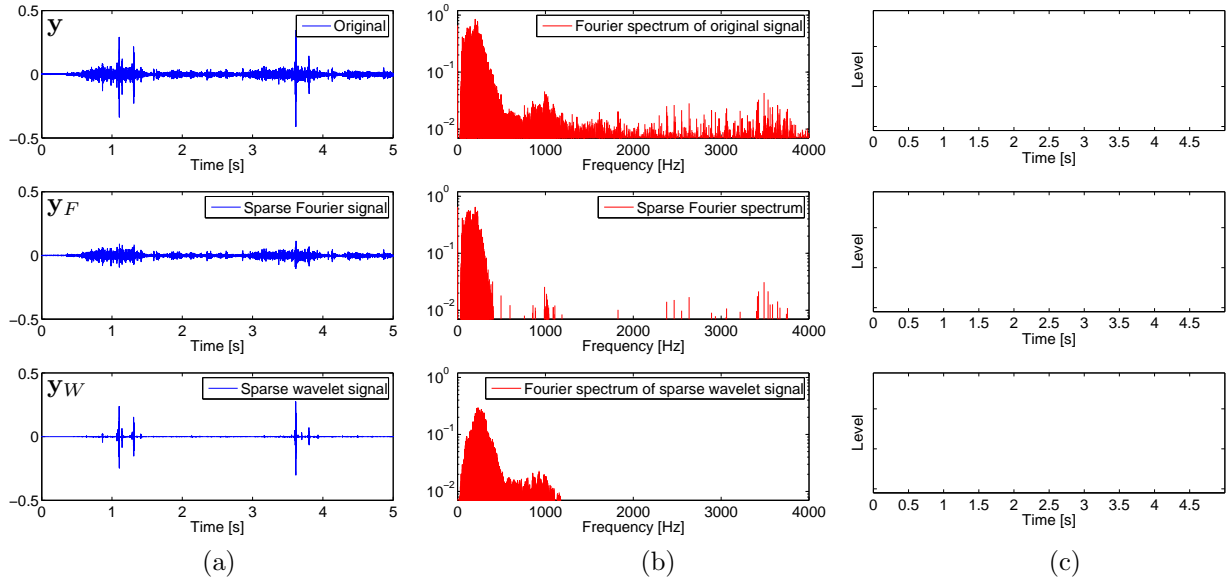


Fig. 2 Coarse crackles. First row: original signal \mathbf{y} . Second row: separated signal \mathbf{y}_F with sparse frequency spectrum. Third row: separated signal \mathbf{y}_W with sparse wavelet coefficients. (a) Waveform in time domain, (b) amplitude spectrum in frequency domain, and (c) wavelet coefficients.

パルス状の信号が含まれていないため、 \mathbf{y}_W は吸気開始の一部のみが僅かに分離されるのみである。また、肺泡呼吸音は聴診器で聴取しても小さい音であり、ノイズが目立つ。図 1(b) のように、元信号のスペクトルはノイズ成分が領域を広く覆っている。一方、 \mathbf{y}_F はスペクトルがスパースであるため、広域のノイズ成分が大きく除かれていることがわかる。

水泡音の分離

軽度の浸潤陰影を呈した肺炎例の粗い断続音（水泡音）の分離結果を図 2 に示す。図 2(a) のように、元信号 \mathbf{y} から呼吸音とパルス状の水泡音がそれぞれ \mathbf{y}_F 、 \mathbf{y}_W として明確に分離できている。図 2(b), (c) に見られるように、これらの信号は周波数領域で重なり合っており、周波数フィルタリングやウェーブレットのレベル選択では分離が不可能である。また、1kHz 以上の成分はノイズのみであり、特に周波数帯域を指定することなくノイズが大幅に除去されていることがわかる。このようなスパース表現による分離の性能は後述の 3.2 でより顕著に確認できる。

捻髪音の分離

肺線維症特発性間質性肺炎の細かい断続音（捻髪音）の分離結果を図 3 に示す。図 3(a) のように、吸気開始の一部の呼吸音が僅かに分離されているものの、元信号 \mathbf{y} からパルス状の捻髪音が \mathbf{y}_W として明確に分離できている。図 2(b) から、捻髪音は約 1kHz をピークに水泡音よりも広くスペクトルが分布していることがわかる。また、3kHz 以上の成分はノイズのみ

であり、分離後の信号には全く含まれていない。

3.2 頑健性の検証

肺音、特に肺泡呼吸音は安静換気では聴診器で聴取しても小さい音であり¹⁵⁾、電子聴診器による聴取では、信号に対して機器自身の内部ノイズが無視できないことが想定される。AD 変換でダイナミックレンジを活かせなければ量子化ノイズも無視できないであろう。このような状況を仮定し、断続音分離のノイズに対する頑健性を検証する。

図 3 で示した捻髪音の元信号 \mathbf{y} を用いて低品質の肺音信号をシミュレートした。元信号に対して SN 比が僅か 3dB となるように強いホワイトノイズを加え、更に 4bit で量子化した。これを改めて低品質の元信号 \mathbf{y} と見なす。

呼吸音および捻髪音の分離・抽出を試みた結果を図 4 に示す。図 4(a) から、元信号の呼吸音はノイズに埋没し、量子化によって階段状の波形となっている。そのような低品質の信号が与えられても、呼吸音と捻髪音がそれぞれ \mathbf{y}_F 、 \mathbf{y}_W として明確に復元できる様子がわかる。広域なノイズとは異なり、呼吸音と捻髪音はそれぞれ周波数スペクトルとウェーブレット係数がスパースであるため、 \mathbf{y}_F 、 \mathbf{y}_W として抽出されている。ノイズが完全に除去されていないものの、図 3 に示される低品質化する前の分離結果 \mathbf{y}_F 、 \mathbf{y}_W と比べて、分離の誤差それぞれ約 -13dB 、 -12dB と小さい。

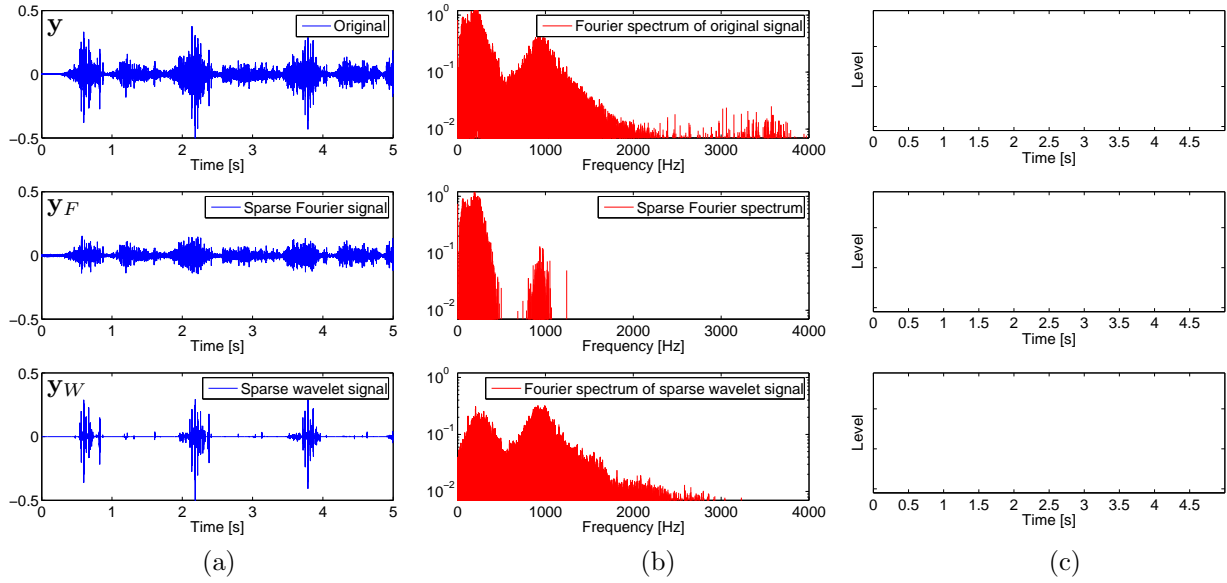


Fig. 3 Fine crackles. First row: original signal y . Second row: separated signal y_F with sparse frequency spectrum. Third row: separated signal y_W with sparse wavelet coefficients. (a) Waveform in time domain, (b) amplitude spectrum in frequency domain, and (c) wavelet coefficients.

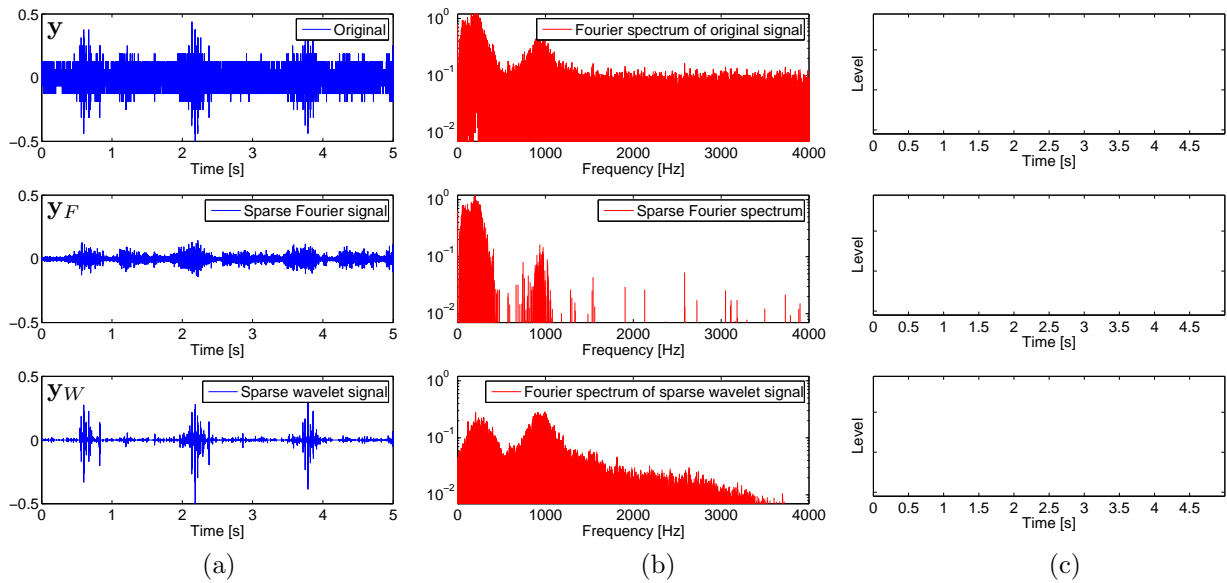


Fig. 4 Recovery of breath sound and crackles from degraded signal. First row: degraded version of y in Fig. 3 by adding white noise of 3dB SN ratio, followed by 4-bit digital quantization. Second row: separated signal y_F with sparse frequency spectrum. Third row: separated signal y_W with sparse wavelet coefficients. (a) Waveform in time domain, (b) amplitude spectrum in frequency domain, and (c) wavelet coefficients.

4. おわりに

電子聴診器からの肺音信号をスパース表現し、信号の構成要素を分離する解析手法を示した。この解析手法で分離した信号の構成要素は、他の構成要素やノイズの影響が極めて小さいため、分離後の信号から抽出

した特徴量を用いれば肺音信号の分類・識別性能の向上を期待できる。また、副雑音を直接にモデル化する特徴抽出¹¹⁾や、肺音信号を直接にウェーブレット変換する手法^{8,10)}とは異なり、信号をスパースに表現すること自体がパターン認識の役割を持っている。すな

わち、信号の構成要素に関係する基底のみで簡潔に信号が表現されるので、スパース表現に用いられた基底を手がかりに構成要素を特定する識別が可能となる。

本稿では、フーリエ変換に類する基底とウェーブレット変換基底による呼吸音と断続音の分離を検討した。この分離は基底と無相関のノイズに対して非常に頑健であり、音量の小さい肺胞呼吸音等の解析にも有効であると考えられる。断続性ラ音を対象とした実験で分離を確認したが、適切な基底を用意できれば、この解析手法は連続性ラ音の解析にも応用できると思われる。例えば、笛声音の分離には、時間周波数領域における曲線状の構造に対するカーブレット変換²¹⁾の適用が有効かもしれない。また、スパース性以外の性質の導入も有効であろう。例えば、信号の表現において同時に使われる基底をグループ化したり、そのような基底の共起性を考慮した正則化によって分離の性能の向上を図ることができよう。性能の定量的評価と共にこれらの可能性を検討するべきである。

実験には一般的なスパース正則化のアルゴリズムを採用したが、計算の並列化や、肺音信号のスパース表現に特化したアルゴリズムを開発することで実時間の信号処理を見込むことができる。また、スパース正則化を前提とした信号の効率的な計測技術である圧縮センシング²²⁻²⁵⁾の併用も視野に入れた開発を検討したい。

参考文献

- 1) 3M Health Care, Inc.: Electronic stethoscope model 4100, <http://www.mmm.co.jp/hc/littmann/es-4000.html>
- 2) Pasterkamp, H., Kraman, S. S. and Wodicka, G. R.: Respiratory sounds: advances beyond the stethoscope, *American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine*, Vol. 156, No. 3, pp. 974-987, 1997.
- 3) Pasterkamp, H., Carson, C., Daien, D. and Oh, Y.: Digital Respirosonography: new images of lung sounds, *Chest*, Vol. 96, pp. 1405-1412, 1989.
- 4) Pasika, H. and Pengelly, D.: Lung sound crackle analysis using generalised time-frequency representations, *Medical and Biological Engineering and Computing*, Vol. 32, pp. 688-690, 1994.
- 5) 喜安千弥, 柳原幸輔, 正田備也, 宮原末治, 岡三喜男: 呼吸の周期性を考慮した異常肺音の自動検出, 映像情報メディア学会誌, Vol. 61, No. 12, pp. 1769-1773, 2007.
- 6) 正田備也, 喜安千弥, 宮原末治: 肺音分類のためのスペクトル分離とロバストな類似度判定による特徴量抽出, 日本データベース学会 Letters, Vol. 6, No. 4, pp. 33-36, 2008.
- 7) Masada, T., Kiyasu, S. and Miyahara, S.: Unmixed spectrum clustering for template composition in lung sound classification, *Proc. PAKDD '08, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 5012, pp. 964-969, 2008.
- 8) Kandaswamy, A., Kumar, C. S., Ramanathan, Rm. Pl., Jayaraman, S. and Mal-murugan, N.: Neural classification of lung sounds using wavelet coefficients, *Computers in Biology and Medicine*, Vol.34, No. 6, pp. 523-537, 2004.
- 9) Bahoura, M.: Pattern recognition methods applied to respiratory sounds classification into normal and wheeze classes, *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 39, No. 9, pp. 824-843, 2009.
- 10) Marshall, A. and Boussakta, B.: Signal analysis of medical acoustic sounds with applications to chest medicine, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 344, pp. 230-242, 2007.
- 11) Yeginer, M. and Kahya, P. Y.: Feature extraction for pulmonary crackle representation via wavelet networks, *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 39, No. 8, pp. 713-721, 2009.
- 12) Chen, S. S., Donoho, D. L. and Saunders, M. A.: Atomic decomposition by basis pursuit, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 20, No. 1, pp. 33-61, 1998.
- 13) Zibulevsky, M. and Pearlmutter, B. A.: Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary, *Neural Computation*, Vol. 13, No. 4, pp. 863-882, 2001.
- 14) Donoho, D. L and Elad, M.: Maximal sparsity representation via l_1 minimization, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 100, pp. 2197-2202, 2003.

- 15) 石原恒夫監修, 川城丈夫, 安部直, 菊池功次, 米丸亮: CDによる聴診トレーニング 呼吸音編, 南江堂, 1993
- 16) Tibshirani, R.: Regression shrinkage and selection via the lasso, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 58, pp. 267–288, 1996.
- 17) Kim, S.-J., Koh, K., Lustig, M., Boyd, S. and Gorinevsky, D: An interior-point method for large-scale l_1 -regularized least squares, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 1, No. 4, pp. 606–617, 2007.
- 18) Figueiredo, M. A. T., Nowak, R. D. and Wright, S. J.: Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 1, No. 4, pp. 586–597, 2007.
- 19) Wright, S. J., Nowak, R. D. and Figueiredo, M. A. T.: Sparse reconstruction by separable approximation, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 57, No. 7, pp. 2479–2493, 2009.
- 20) Tomioka, R. and Sugiyama, M.: Dual augmented Lagrangian method for efficient sparse reconstruction, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 16, No. 2, pp. 1067–1070, 2009.
- 21) Candès and Donoho, D.: Curvelets – a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges, Rabut, C., Cohen, A., Schumaker, L.L. (Eds.), *Curves and Surfaces*, Vanderbilt University Press, Nashville, TN. pp. 105–120, 2000.
- 22) Candès, E. J., Romberg, J. and Tao, T.: Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements, *Comm. on Pure and Applied Math*, Vol. 59, 8, pp. 1207–1223, 2006.
- 23) Candès, E. J. and Romberg, J.: Sparsity and incoherence in compressive sampling, *Inverse Problems*, Vol. 23, No. 3, pp. 969–985, 2007.
- 24) Candès, E. J.: The restricted isometry property and its implications for compressed sensing, *Comptes Rendus Mathématique*, Vol. 346, 9-10, pp. 589–592, 2008.
- 25) Candès, E. J. and Wakin, M. B.: An introduction to compressive sampling, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 21–30, 2008.