

二本の梁の衝突振動*

原田 晃^{*1}, 吉武 裕^{*2}, 荻野弘章^{*3}

Impact Vibration of Two Beams

Akira HARADA, Yutaka YOSHITAKE^{*4} and Hiroaki OGINO^{**} Graduate School of Science and Technology, Nagasaki University,
1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki-shi, Nagasaki, 852-8521 Japan

Impact vibration of two beams was treated as an example of the impact vibration of continuous systems that are expressed by vibration modes and following points were researched by numerical calculation and experiment. (a) The number of modes needed to express the impact vibration phenomena sufficiently. (b) Whether there is the grazing bifurcation or not. (c) The energy level of each mode that excited by the impacts. The followings were made clear. (1) By adopting six natural modes, the theoretical result and the experimental ones about bifurcation diagram agree well each other qualitatively, and the characteristic of the diagram is a little different from that of the beam impacted to the wall. (2) The transition from periodic vibration to chaos is interpreted as the grazing bifurcation and its bifurcation becomes a little different one depending on the phase relation of the beams. (3) The tendency of the energy levels of the modes excited by the impacts is similar to that of the beam impacted to the wall, but the levels are little lower.

Key Words: Nonlinear Vibration, Impact, Collision, Bifurcation, Chaos and Fractal, Forced Vibration

1. 緒 言

衝突振動はインパクトダンパ⁽¹⁾⁽²⁾, 歯車系の歯打ち⁽³⁾, 衝突を利用した振動輸送⁽⁴⁾, 回転体の振動衝突⁽⁵⁾, 地震時における配管系⁽⁶⁾⁽⁷⁾や原子炉炉心の燃料棒の衝突問題⁽⁸⁾など多くの例が見られるが, 機械や構造物の衝突振動の中には本質的に連続体として扱わなければならない場合も多い⁽⁷⁾⁽⁸⁾. 従って, 梁のような連続体の衝突振動の解析⁽⁹⁾⁻⁽¹²⁾も行われているが, 実際の衝突振動状態を十分に表現できる採用モード数, 衝突モデルなどについて確立されたものはないのが現状である. また, 従来の研究では, 衝突の際の反発係数について衝突速度によらず一定として取り扱ったものがほとんどであったが, 反発係数が衝突速度に依存するという実験結果も報告されている⁽¹³⁾. さらに, 質点系の衝突振動で言われている grazing 分岐⁽¹⁴⁾についても連続体では明らかになっていない.

そこで著者らは前報⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾において, 連続体の衝突振動系の基本的な例として, 一本の片持ち梁と衝突壁か

ら構成される梁の衝突振動を取り上げ, 数値計算と実験から得られた分岐線図から衝突振動状態を十分に表現するためのモード数, 衝突によって励起される高次モードの影響, grazing 分岐の有無, 及び梁の減衰の影響を明らかにした. 本研究では, 振動モードを考慮しなければならない連続体同士が衝突する例として二本の梁の衝突振動を取り上げ, 数値計算と実験を用いて, 衝突対象が壁から梁に変わることに伴い, 衝突現象の表現に必要なそれぞれの梁のモード数, grazing 分岐の有無及び衝突により励起されるモードがどう異なるか等を調べる.

2. 運動方程式と衝突モデル

図1に示すように, 密度 ρ , 断面積 A , 剛性 EI が同じで長さが l_1, l_2 と異なる梁1と梁2を考える(以下, 添字1を梁1, 添字2を梁2と定義する). 梁1と梁2は平行で, 梁1に先端質量 m が付加されている. 両方の梁の固定端に強制変位 $z_0 \cos \omega t$ が作用するとき, 梁1の先端質量と梁2の間隔を d , 梁の固定端からの距離を x_1, x_2 , 梁の基礎との相対変位を $y_1(x_1, t), y_2(x_2, t)$, 梁1の先端質量と梁2の相対距離を $y_d (= y_1(l_1, t) - y_2(l_1, t) - d)$ とすると, 運動方程式は次式のように表される.

* 原稿受付 2009年9月18日.

^{*1} 正員, 長崎大学工学部(〒852-8521 長崎市文教町1-14).^{*2} 正員, 長崎大学大学院生産科学研究科.^{*3} ダイハツ工業(株)(〒563-8651 池田市ダイハツ町1-1).

E-mail: yoshitak@nagasaki-u.ac.jp

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{y}_i + EI y_i^{(iv)} &= \rho A \omega^2 z_0 \cos \omega t \\ &+ (-1)^{i-1} \delta(x_i - l_i) u(y_d) P(y_d, \dot{y}_d) \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 z_0 と ω はそれぞれ振動台の変位振幅と角振動数、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数、 $u(\cdot)$ は単位ステップ関数である。また、 $P(y_d, \dot{y}_d)$ は後述するように衝突により作用する復元力と減衰力を表している。また境界条件は次式となる。

$$\begin{aligned} y_i(0, t) &= 0, y_i'(0, t) = 0, y_i''(l_i, t) = 0, (i=1,2) \\ m(\ddot{y}_1(l_1, t) - z_0 \omega^2 \cos \omega t) - EI y_1^{(iii)}(l_1, t) &= 0, \quad (2) \\ y_2^{(iii)}(l_2, t) &= 0 \end{aligned}$$

梁の変位 y_i を衝突がないときの系の固有関数 $\phi_{ij}(x)$ とモード座標 $\xi_{ij}(t)$ を用いて次式で表す。

$$y_i(x, t) = \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \phi_{ij}(x) \xi_{ij}(t) \quad (i=1,2) \quad (3)$$

式(1)の運動方程式に式(3)を代入し、固有関数の直交性を適用し、粘性減衰を付加すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{ij} + 2\omega_{ij}\gamma_{ij}\dot{\xi}_{ij} + \omega_{ij}^2 \xi_{ij} &= F_{ij}(x_i, t) \\ F_{ij}(x_i, t) &= [\{\rho A \int_0^{l_i} \phi_{ij} dx + (2-i)m\phi_{ij}(l_i)\} \\ &\times \omega^2 z_0 \cos \omega t + (-1)^{i-1} \phi_{ij}(l_i) u(y_d) P(y_d, \dot{y}_d)] / M_{ij} \\ M_{ij} &= \rho A \int_0^{l_i} \phi_{ij}^2 dx + (2-i)m\phi_{ij}^2(l_i) \\ &\quad (i=1,2, j=1,2,3,\dots) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 ω_{ij} と γ_{ij} はそれぞれ梁 i の j 次モードの固有角振動数と減衰比である。

衝突力のモデルについては、線形バネ⁽⁸⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾を用いたものが多いが、本研究においては梁の先端に半球状の集中質量を付加しているため、球と平板からなる衝突系のモデルを提案している本江ら⁽¹⁷⁾の非線形モデルを用いることとする。本江らのモデルは以下のとおりである。

$$\begin{aligned} P(y_d, \dot{y}_d) &= -K y_d^{\frac{3}{2}} - \alpha |y_d|^{\frac{1}{2}} \dot{y}_d \\ K &= \frac{4\sqrt{R}}{3} \left(\frac{1-\sigma_s^2}{E_s} + \frac{1-\sigma_w^2}{E_w} \right)^{-1} \\ \alpha &= 0.834K \frac{1-e^2}{1+e^2} \sqrt{\frac{4K}{5m} \left\{ \frac{5m}{8K} v_0^2 (1+e^2) \right\}^{\frac{1}{5}}} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 α 、 v_0 、 E 、 σ 、 K 、 e は、それぞれ、衝突に伴う減衰係数、球の衝突直前の速度、ヤング率、ポアソン比、ヘルツ接触理論によるバネ係数、反発係数であ

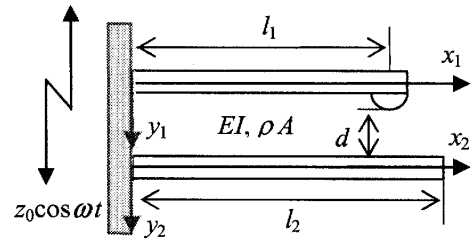


Fig.1 Model of impact vibration of beams

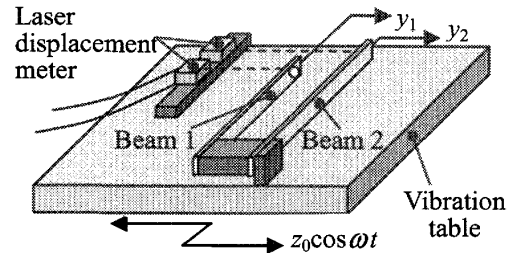


Fig.2 Experimental apparatus

り、添字 s は半球状の衝突球、 w は平面状の衝突面をもつ衝突壁（本研究においては梁2）を意味する。

反発係数は衝突速度に依存するという実験結果⁽¹³⁾があり本研究においても様々な衝突速度で梁1の先端質量が梁2と衝突することが考えられるので、前報⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾で得られた近似式

$$e = \exp(-0.20147v_0) \quad (6)$$

を用いて、本江らのモデルの反発係数を衝突速度に応じて決まる値として取り扱うこととする。

3. 実験装置

図2に実験装置を示す。梁1と梁2を振動台に取り付け、調和加振する。また、振動台上にレーザー変位計（キーエンス社製 LK-G155）を設置し、梁の先端における基礎との相対変位を測定する（振動台の大きさの関係でレーザー変位計を片側に設置する必要があったために梁1と梁2の長さが異なっている）。梁1先端の衝突球と梁2の間隔 d は 7.0 mm または 17.0 mm、加振振幅 z_0 は 0.3 mm としている。ここに、梁の諸元は次のとおりである。

長さ l_1 : 0.295 m, l_2 : 0.400 m,
幅 b : 16 mm, 厚さ h : 1.0 mm,
密度 ρ : 7.90×10^3 kg/m³,
ヤング率 E : 2.06×10^{11} N/m²

また、先端質量及び衝突力に係るパラメータの諸元は次のとおりである。

半球の半径 R : 4.0 mm, 半球の質量 m : 8.4 g,
ポアソン比 σ_s , σ_w : 0.293,

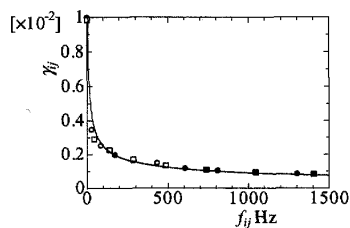


Fig.3 Damping coefficient

(□ : Beam 1, ■ : estimated ones for Beam 1,
○ : Beam 2, ● : estimated ones for Beam 2)

ヤング率 E_s , E_w : 2.06×10^{11} N/m²,

バネ係数 K : 9.40×10^9 N/m^{3/2}

梁 1, 梁 2 は共に SPCC (冷間圧延鋼板) を用いて作成しており, ハンマリングにより求めた固有振動数 f_{ij} と減衰比 γ_{ij} は, 梁 1 については 5 次モードまでしか測定できず,

$f_{11}=6.10$ Hz, $f_{12}=44.0$ Hz, $f_{13}=131$ Hz,

$f_{14}=264$ Hz, $f_{15}=438$ Hz

$\gamma_{11}=0.0098$, $\gamma_{12}=0.0029$, $\gamma_{13}=0.0022$,

$\gamma_{14}=0.0016$, $\gamma_{15}=0.0013$

であり, 梁 2 については 6 次モードまで測定でき,

$f_{21}=4.85$ Hz, $f_{22}=30.5$ Hz, $f_{23}=85.5$ Hz,

$f_{24}=167$ Hz, $f_{25}=277$ Hz, $f_{26}=414$ Hz

$\gamma_{21}=0.0099$, $\gamma_{22}=0.0034$, $\gamma_{23}=0.0025$,

$\gamma_{24}=0.0019$, $\gamma_{25}=0.0016$, $\gamma_{26}=0.0014$

であった。

4. 数値計算結果および実験結果

4・1 採用モード数の決定 まず, 数値計算から得られた各梁の固有振動数は以下のとおりである。

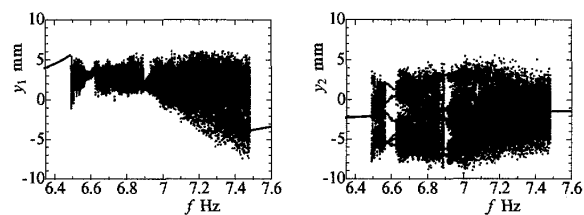
$f_{11}=6.85$ Hz, $f_{12}=48.6$ Hz, $f_{13}=144$ Hz,

$f_{14}=291$ Hz, $f_{15}=491$ Hz, $f_{16}=744$ Hz, $f_{17}=1050$ Hz

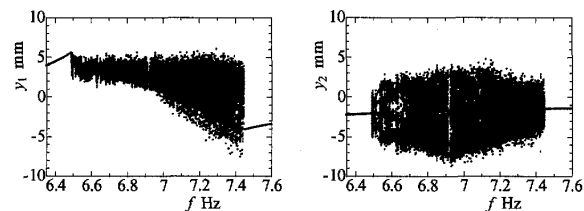
$f_{21}=5.16$ Hz, $f_{22}=32.3$ Hz, $f_{23}=90.5$ Hz,

$f_{24}=177$ Hz, $f_{25}=293$ Hz, $f_{26}=438$ Hz, $f_{27}=611$ Hz

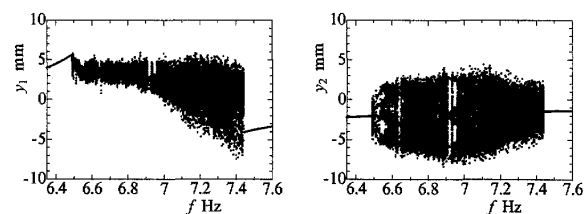
前章で示した諸元及び計測された減衰比を用いて, 式 (4) にルンゲ・クッタ・ギル法を用いて数値積分することにより解を求めた。ただし, 前章で示したように梁 1 については 5 次モードまでしか計測することができなかったため, それより高次のモードの減衰比については, 計測できた減衰比の値を用いて以下のように決定したものを用了。すなわち, 図 3 に示すように固有振動数と減衰比の関係が指数関数的になることがわかったので, 高次モードの減衰比は外挿により求めた。図 3 の中空印が計測値, 実線が最小二乗法を用いて求めた近似曲線, 中実印がこの近似曲線を用いて外挿により求めた減衰比の値であり



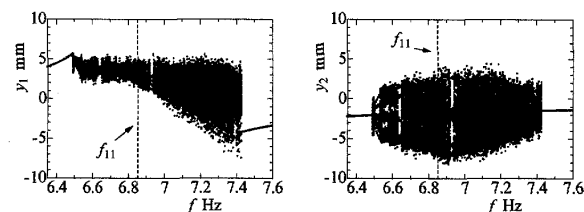
(a) Using 1st ~ 3rd mode



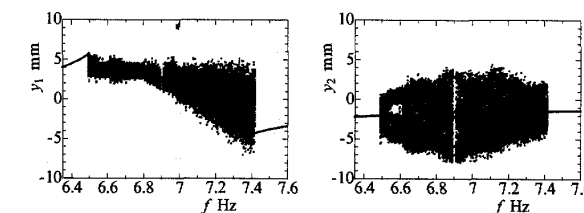
(b) Using 1st ~ 4th mode



(c) Using 1st ~ 5th mode



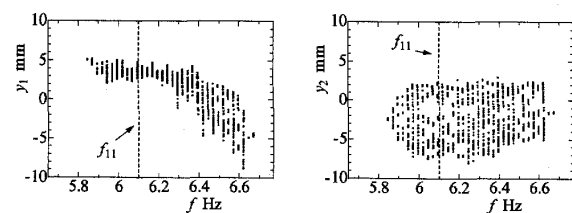
(d) Using 1st ~ 6th mode



(e) Using 1st ~ 7th mode

Fig.4 Bifurcation diagram

(Calculation, $d=7$ mm, Region I)

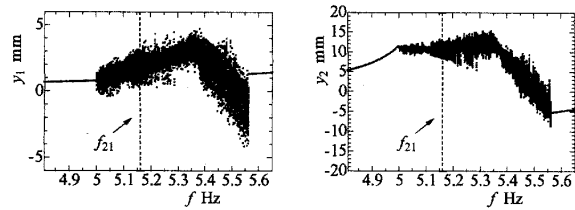


(a) Beam 1

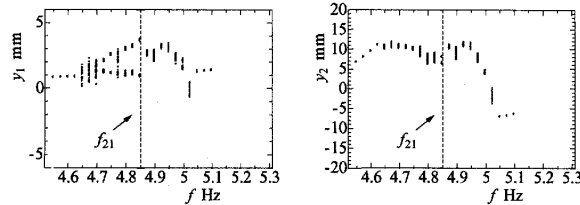
(b) Beam 2

Fig.5 Bifurcation diagram

(Experiment, $d=7$ mm, Region I)



(a) Calculation



(b) Experiment

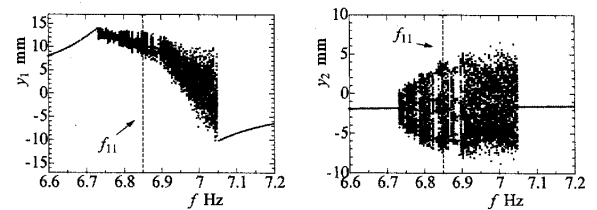
Fig.6 Bifurcation diagram ($d=7$ mm, Region II)

$\gamma_{16}=0.0010$, $\gamma_{17}=0.00089$, $\gamma_{27}=0.0011$ となった。

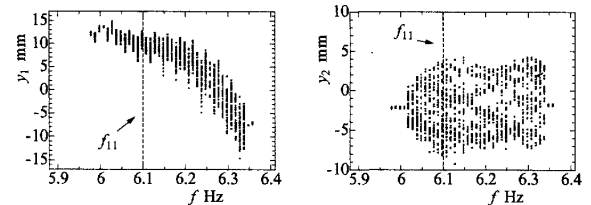
本研究では前報の梁が壁に衝突する場合と異なり、衝突する二本の梁それぞれについて固有振動数、そして共振が存在することとなる。以下、本研究では梁 1 の 1 次の共振振動数領域を領域 I、梁 2 の 1 次の共振振動数領域を領域 II と定義し、領域 I と II における梁の衝突振動を取り扱うこととする。なお、二本の梁の固有振動数の関係から、領域 I において梁は互いに逆位相で振動し、領域 II においては同位相で振動する。

まず、領域 I、梁間隔 7 mm の場合を例に、梁 1 及び梁 2 の数値計算結果が収束する採用モード数について数値計算による分岐線図と実験から得られた分岐線図を用いて議論する。図 4 に梁 1 と梁 2 の採用モード数を変えた場合の数値計算による分岐線図を示している。二本の梁の採用モード数を同じとし、1 次モードから 3 次モードまでの 3 つのモードを採用する場合から、採用モードを 1 つずつ増やし 6 次モードまで採用したときの結果を示している。横軸は加振振動数 (Hz)、縦軸は各梁の先端変位 (mm) である。

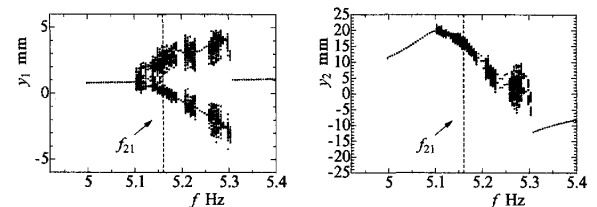
これらの図から、加振振動数とともにカオスアトラクタが変化する傾向については、4 次モードまで採用した数値計算結果と 5 次モードまで採用した数値計算結果は定性的に一致しており、前報⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾の梁と壁の場合に比較して若干少ないモード数で収束しているようであるが、6 次モードまで採用した前報と比較することを考え、以下、6 次モードまで採用することとする。図 5 に実験から得られた分岐線図を示しているが梁 1 の高振動数領域でカオスアトラクタの分布範囲に若干違いがあること以外は、実験結果と数値計算結果はよ



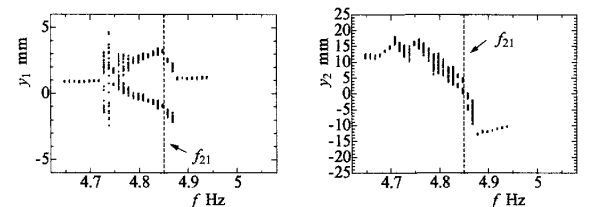
(a) Calculation



(b) Experiment

Fig.7 Bifurcation diagram ($d=17$ mm, Region I)

(a) Calculation

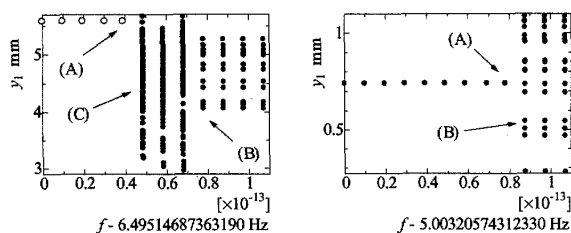
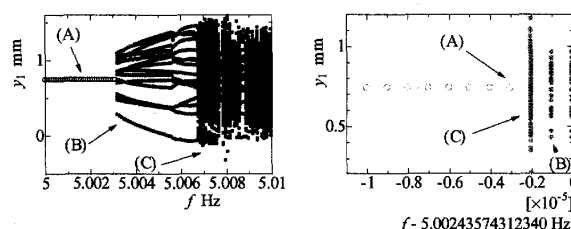


(b) Experiment

Fig.8 Bifurcation diagram ($d=17$ mm, Region II)

く一致している。

次に、図 6 に梁間隔 7 mm の場合の領域 II における数値計算による分岐線図と実験から得られた分岐線図を示す。図 7, 8 に梁間隔 17 mm の場合の同様の分岐線図を示す。図 7 が領域 I、図 8 が領域 II についての結果である。これらの図から全ての場合について、6 次モードまで採用したときの数値計算結果と実験結果はカオスアトラクタの形状が定性的にほぼ一致していると言える。よって、以下では 6 次モードまで採用して数値計算を行う。領域 I の各分岐線図を全体的に見れば、梁と壁の場合と異なり、加振振動数が固有振動数に近づくにつれてカオスアトラクタの分布が狭くなっていき 1 倍周期解に至るといった傾向⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾が存在しないことがわかる。一方、領域 II の $d=17$ mm の場合

(a) $\Delta f = 1 \times 10^{-14}$ Hz(b-1) $\Delta f = 1 \times 10^{-14}$ Hz(b-2) $\Delta f = 1 \times 10^{-4}$ Hz(b-3) $\Delta f = -1 \times 10^{-5}$ Hz

Hollow : without impact, Solid : with impact

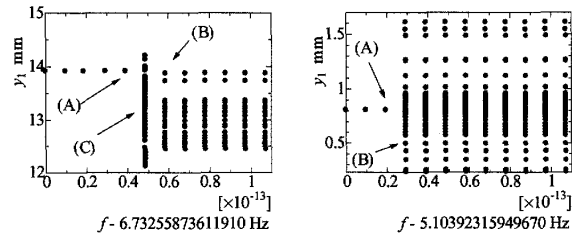
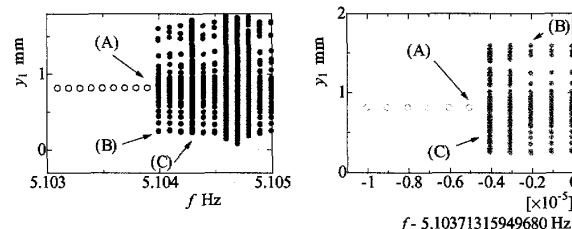
Fig.9 Bifurcation diagram (magnified detail)

(d=7 mm, Beam 1, (a) Region I, (b) Region II)

については、一部に周期解も見られる。また、個々の梁について見れば、非共振側の梁のカオスアトラクタは低い振動数から変位が正負に分布しているのが特徴である。一方、共振側の梁のカオスアトラクタは、領域Ⅰの $d=7$ mm の場合を除き、前報の減衰の大きな梁と同様に振動数の高い領域では変位の大きなところまではカオスアトラクタが分布せず明確な右下がりの傾向を示している。

4・2 カオスへのルート ここでは、梁と壁の衝突振動においては（2倍精度実数を用いた数値計算の分解能の範囲では）grazing 分岐であった⁽¹⁶⁾、低い加振振動数から振動数を増加させたときに梁が衝突しない状況から衝突するようになったときの解の分岐を取り扱う。図9、図10にそれぞれ梁間隔7 mmと17 mmの場合の分岐線図を示している。中空印は衝突を伴わない振動であることを意味し、中実印は衝突を伴う振動であることを意味する。また、 Δf は掃引計算を行う際の振動数の刻み幅である。各図の(a)が領域Ⅰ、(b-1)、(b-2)、(b-3)が領域Ⅱである。領域Ⅱにおいては、領域Ⅰと同じ振動数の刻み幅で計算した分岐線図(b-1)だけでなく、より広い振動数領域について調べた分岐線図(b-2)及び振動数を減少させた場合の分岐線図(b-3)も同時に示している。図中の(A)、(B)、(C)は、その振動が、それぞれ、1倍周期振動、N倍周期振動、カオスであることを示す。

領域Ⅰに着目すると、図9(a)、10(a)から、2倍精度の

(a) $\Delta f = 1 \times 10^{-14}$ Hz(b-1) $\Delta f = 1 \times 10^{-14}$ Hz(b-2) $\Delta f = 1 \times 10^{-4}$ Hz(b-3) $\Delta f = -1 \times 10^{-5}$ Hz

Hollow : without impact, Solid : with impact

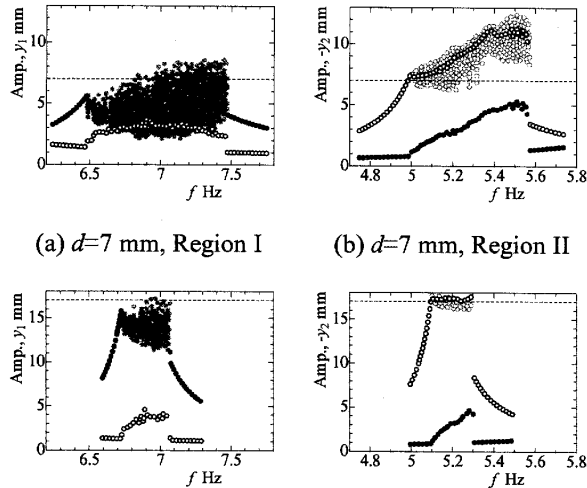
Fig.10 Bifurcation diagram (magnified detail)

(d=17 mm, Beam 1, (a) Region I, (b) Region II)

数値計算上の限界まで振動数の刻み幅を小さくしても、1倍周期振動とカオスの間にその他の振動状況が現れていないことがわかる。このことから、領域Ⅰにおいては、梁間隔によらず、梁と壁の衝突振動と同様に、2倍精度実数を用いた数値計算の分解能の範囲ではgrazing 分岐と見なしてよいと考えられる。

領域Ⅱに着目すると、図9(b-1)、10(b-1)から、振動数を増加させると2倍精度実数を用いた数値計算の分解能の範囲では1倍周期振動((A))からN倍周期振動((B))（図からはわかりにくい、梁間隔7 mmにおいては17倍周期振動、梁間隔17 mmにおいては98倍周期振動）へ分岐していることがわかる。図9(b-2)、10(b-2)から、このN倍周期振動((B))は、非常に狭い振動数領域で存在し、すぐにカオス((C))へ至っていることがわかる。このことから、図9(b-1)、10(b-1)に表れている分岐は基本的には1倍周期解からカオス領域への分岐、すなわちgrazing 分岐と見なせるのではないかとと思われる。一方、図9(b-3)、10(b-3)から、振動数を減少させていくとN倍周期振動((B))からカオス((C))に至った後、衝突がなくなる。図の(b-1)～(b-3)から解の多値性と履歴現象の存在がわかる。

4・3 変位振幅と衝突位置 梁と壁の衝突振動においては、衝突位置は衝突壁位置で一定であり、また、衝突壁側の振れ幅よりも衝突壁と反対側の振れ幅の方が大きい非対称な振動であったが、梁と梁の衝突振動においてはどのような特性になるかを調べる。図11



(a) $d=7$ mm, Region I (b) $d=7$ mm, Region II

(c) $d=17$ mm, Region I (d) $d=17$ mm, Region II

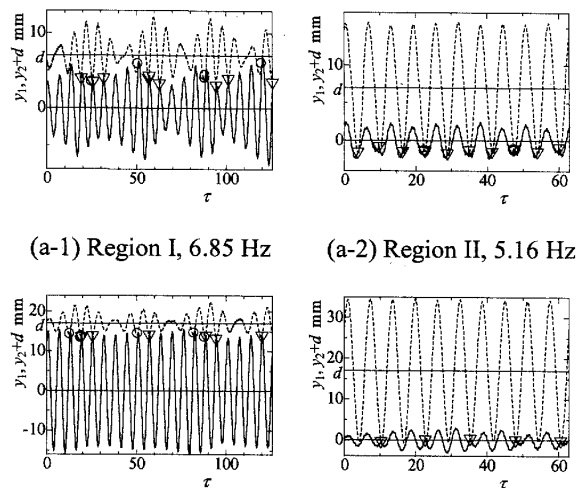
Resonance curve :: ● : Beam 1, ○ : Beam 2

Displacement at impact :: ● : Beam 1, ○ : Beam 2

Fig.11 Resonance curve and displacement at impact

に衝突位置 ($x_1=x_2=l_1$) における各梁の変位振幅を縦軸にとった共振曲線及び共振状態にある梁の衝突時の変位の絶対値をそれぞれ黒及び灰色のプロットで示す。また、中実印及び中空印はそれぞれ梁1及び梁2についてのプロットであることを意味する。振幅は、強制変位1周期中における梁の応答の最大値と最小値の差の半分の値を、100周期間で平均して求めた。図から、梁間隔が狭い領域Iの方が領域IIに比較して衝突位置がやや広く分布していること、及び、梁間隔が広い方が衝突位置の平均的な値が振幅の値よりもやや小さくなることを除けば、共振状態にある梁の衝突位置の絶対値はほぼ振幅の値付近に分布していることがわかる。このことから、梁と壁の衝突振動とは異なり、衝突が生じている側の振れ幅とその反対側の振れ幅があまりかわらず、梁はほぼ対称な振動をしていると推察される。そこで次に、変位波形を用いて振動の状態と衝突位置を調べる。

図11において加振振動数が固有振動数に等しいときの変位波形を図12に示す。実線及び破線はそれぞれ梁1及び梁2の変位波形であることを意味する。また、○印及び▽印で示される位置で衝突が生じておりそれぞれ同位相状態 ($\dot{y}_1 \times \dot{y}_2 > 0$) 及び逆位相状態 ($\dot{y}_1 \times \dot{y}_2 < 0$) で衝突が生じていることを意味する。図から、共振状態の梁はほぼ対称な振動をしていること、及び、共振状態の梁は変位のピーク付近で衝突が生じていることがわかる。また、領域IとIIを比較すると、領域Iでは、梁1と梁2はうなりに似た振動をしているが、領域IIでは、ほぼ一定の振幅で振動しているこ



(a-1) Region I, 6.85 Hz

(a-2) Region II, 5.16 Hz

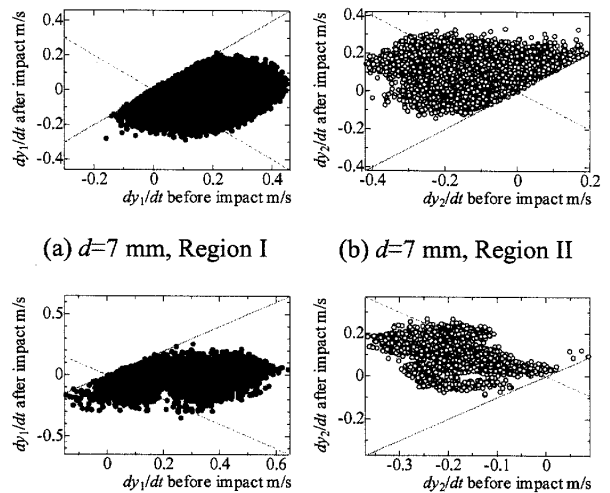
(b-1) Region I, 6.85 Hz

(b-2) Region II, 5.16 Hz

Solid line : Beam 1, Dashed line : Beam 2

○ : impact with $\dot{y}_1 \times \dot{y}_2 > 0$, ▽ : impact with $\dot{y}_1 \times \dot{y}_2 < 0$

Fig.12 Time histories ((a) $d=7$ mm, (b) $d=17$ mm)



(a) $d=7$ mm, Region I

(b) $d=7$ mm, Region II

(c) $d=17$ mm, Region I

(d) $d=17$ mm, Region II

● : Beam 1, ○ : Beam 2

Solid line : $\dot{y}_i|_{\text{after}} = \dot{y}_i|_{\text{before}}$

Dashed line : $\dot{y}_i|_{\text{after}} = -\dot{y}_i|_{\text{before}}$

Fig.13 Velocities at before and after impact

とがわかる。衝突発生時の二本の梁の速度の関係については、両領域ともに全体的に逆位相状態 ($\dot{y}_1 \times \dot{y}_2 < 0$) の場合が多いものの、領域Iで同位相衝突の出現回数がやや多くなっている。また、領域Iにおいては、梁間隔が広くなると振幅変調の変動幅が小さくなっていることがわかる。

各領域における梁の衝突振動の差異は、加振振動数における各梁単独の振動状態の影響によると思われる。

4・4 非共振モードの励起 前節のように振幅と

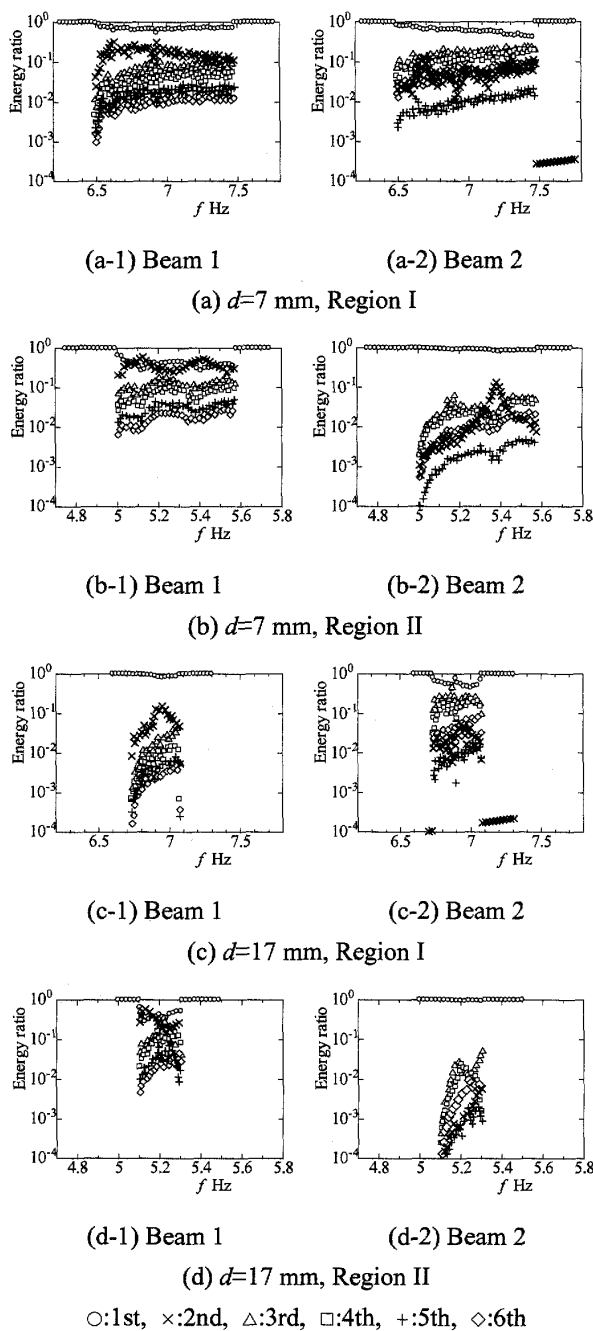


Fig.14 Energy ratio of each mode

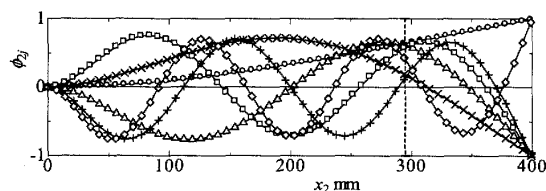


Fig.15 Mode shapes of Beam 2

衝突位置の関係が梁と壁の衝突振動の場合とは異なっているということは、衝突前後の梁の速度や高次モー

ドの励起のされ方が異なると考えられる。まず、図 11 の計算結果における共振状態の梁について、衝突直前の速度を横軸に、衝突直後の速度を縦軸にとったグラフを図 13 に示す。●印及び○印はそれぞれ梁 1 及び梁 2 についてのプロットであることを意味し、実線及び破線はそれぞれ $\dot{y}_i|_{\text{after}} = \dot{y}_i|_{\text{before}}$ 及び $\dot{y}_i|_{\text{after}} = -\dot{y}_i|_{\text{before}}$ となる位置であることを示す。

まず、衝突前後の速度の変化について見てみる。図 13 から、多くのプロットが、 $-\dot{y}_i|_{\text{before}} < \dot{y}_i|_{\text{after}} < \dot{y}_i|_{\text{before}}$ の範囲に収まっていることから、基本的には衝突によって速度が小さくなっていることが分かる。これは、本研究において反発係数が非常に 1 に近いために衝突前後で梁 1 と梁 2 の速度の入れ替わりが起きていること、及び、衝突相手の梁が非共振状態であり基本的に速度が小さいためであると考えられる。このように、衝突対象が壁の場合 ($\dot{y}_i|_{\text{after}} \equiv -\dot{y}_i|_{\text{before}}$) と比べ衝突前後での速度変化の状況が異なることから、非共振モードの励起の状況も異なると考えられる。よって、ここでは、例えば領域 I における梁 1 の 2 次以上の高次モード及び梁 2 の各モードのように、共振状態にあるモード以外のモード(以下、非共振モードと呼ぶ)の振動エネルギーについて調べてみる。

図 14 に各梁の全振動エネルギーの平均値に対する各モードの振動エネルギーの平均値の割合を示す。○, ×, △, □, +, ◇の各印はそれぞれ 1 次～6 次モードのエネルギー割合であることを意味する。また、梁 2 の各モードのモード形状を図 15 に示す。○, ×, △, □, +, ◇の各印はそれぞれ 1 次～6 次モードのモード形状であることを意味し、破線で示される位置において衝突が生じている。図 14 から、各非共振モードのエネルギー割合は加振振動数の増加とともに増加するという傾向は、領域や梁間隔の条件や梁 1、梁 2 によらず同様の特徴を示していることがわかる。しかし、非共振モードのエネルギー割合の大きさの順番を見ると、全体的傾向としては、梁 1 においては 2 次モード、3 次モード、4 次モード、5 次モード、6 次モードの順であるが、梁 2 においては 3 次モード、4 次モード、6 次モード、2 次モード、5 次モードの順となっている。これは、基本的には、固有振動数が加振振動数に近いモードが順番に高いエネルギー割合となるが、梁 2 においては、図 15 に示すように、衝突位置が 2 次モードと 5 次モードの節の付近であるためにエネルギー割合が低くなったと考えられる。しかし、梁間隔 7 mm、領域 II においては、5.38 Hz 付近において梁 2 の 2 次モードのエネルギー割合が非常に大きくなって

いることがわかる。これは、 $f \equiv f_{22}/6$ と加振振動数が梁 2 の 2 次モードの固有振動数の整数分の一になっているためであると考えられる。衝突位置が節に近くてもある程度のエネルギーレベルに達することがわかった。また、図 14(b-1)の 5.42Hz 付近における梁 1 の 2 次モードのピークや図 14(c-1)の 6.95Hz 付近における梁 1 の 2 次モードのピークも、それぞれ、 $f \equiv f_{12}/9$, $f \equiv f_{12}/7$ となっており、上記と同様の理由によるエネルギー割合の増加であると考えられる。これらの、加振振動数の増加とともに各非共振モードのエネルギー割合が増加するという傾向や、各非共振モードの固有振動数の整数分の一の加振振動数においてエネルギー割合のピークが現れるという傾向は、梁と壁の衝突振動⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹⁵⁾の場合と同様であるが、高次モードのエネルギー割合自体は梁と壁の衝突振動に比べて低くなっている。このことは 4・2 節で述べた分岐線図における採用モード数と対応している。

なお、領域 I の梁 2、領域 II の梁 1 のような非共振梁の 1 次モードは、領域 I の梁 1、領域 II の梁 2 のような共振梁の 1 次モードとは異なり、各梁に占めるエネルギー割合は低くなっている。

5. 結 言

二本の梁の 1 次モードの共振点付近の衝突振動を理論と実験から調べた結果は次のようにまとめられる。

- 1) 1 次から 6 次モードまで採用したモデルによる数値計算結果と実験結果は定性的に一致した。しかし、梁と壁の衝突振動の場合と異なり、分岐線図は比較的少ない採用モード数から収束傾向を示すことがわかった。
- 2) 梁 1 と梁 2 が逆位相で振動する領域 I では、梁と壁の衝突振動の場合と同じく、衝突振動発生による grazing 分岐が見られたが、同位相で振動する領域 II では 1 倍周期振動から N 倍周期振動を経てカオスへ至る分岐が見られた。
- 3) 非共振モードのエネルギー割合は、梁と壁の衝突振動の場合と比べると、割合自体は低くなっているが、加振振動数に対する増加傾向は同様であることがわかった。
- 4) 梁と壁の衝突振動の場合と異なり、固有振動数付近の 1 倍周期解は存在しなかった。

文 献

- (1) Masri, S.F. and Caughey, T.K., On the stability of the impact damper, *Transactions of the ASME, Journal of*

Applied Mechanics, Vol.33, (1966), pp.586-592.

- (2) Yoshitake, Y. and Sueoka, A., Quenching of self-excited vibrations by an impact damper, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.60, No.569 (1994), pp.50-56.
- (3) Yoshitake, Y., Hamano, T., Tamura, H., Shinkawa, K., Harada, A. and Kobayashi, A., Gear rattle of multi-step gear system, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.75, No.750 (2009), pp.287-294.
- (4) Han, I. and Lee, Y., Chaotic dynamics of repeated impacts in vibratory bowl feeders, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.249, No.3 (2002), 529-541.
- (5) Azeez, M.F.A. and Vakakis, F.V., Numerical and experimental analysis of a continuous overhung rotor undergoing vibro-impacts, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.34, No.3 (1999), 415-435.
- (6) Watanabe, T., Suzuki, K., Mitsumori, T. and Shimizu, N., Seismic responses of plant piping system having friction and vibro-impact characteristics, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.62, No.595 (1996), pp.873-878.
- (7) Endo, M. and Oka, T., The effects of gapped supports on the random vibration of a beam, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.52, No. 477 (1986), pp.1520-1525.
- (8) Horiuchi, T., Impact vibration analysis of group of hexagonal bars immersed in liquid, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.60, No.576 (1994), pp.2691-2698.
- (9) Maruyama, S., Kato, T., Nagai, K. and Yamaguchi, T., Experiments on chaotic vibration of a cantilevered beam under vibroimpact, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.72, No.719 (2006), pp.2073-2079.
- (10) Maruyama, S., Nagai, K., Yamaguchi, T. and Kato, T., Numerical analysis on chaotic vibrations of a cantilevered beam under vibroimpact, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.72, No.720 (2006), pp.2382-2389.
- (11) Kumano, H., Nagao, N. and Temma, K., Analysis of steady impact vibration in continuous system excited by periodic displacement with arbitrary function (the case where analytical model is simply-supported-beam with an attached mass), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.71,

- No.712 (2005), pp.3367-3374.
- (12) Aoki, S. and Watanabe T., Forced vibration analysis of cantilever beam with unsymmetrical stop, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.61, No.588 (1995), pp.3190-3195.
- (13) Tatara, Y. and Moriwaki, N., Research on a collision of equivalent two matters (coefficient of rebounding and characteristics of a material about copper, lead, glass, ceramics and agate) (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.47, No.420 (1981), pp.1017-1027.
- (14) Foale, S. and Bishop, S.R., Bifurcations in impact oscillations, *Nonlinear Dynamics*, Vol.6, No.3 (1994), 285-299.
- (15) Yoshitake, Y., Koya, K., Ogino, H., Harada, A., Tasaka, H. and Yokomine, M., Periodic solutions and chaos in impact vibration of beam, *Proceedings of the Japan Society of Mechanical Engineers, Dynamics and Design Conference 2004*, CD-ROM (2004), Paper No.602.
- (16) Yoshitake, Y., Harada, A., Koya, K., Tasaka, H., Ogino, H. and Yokomine, M., Bifurcation and effect of damping in impact vibration of beam, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.75, No.750 (2009), pp.279-286.
- (17) Hongo, T., Sato, H., Iwata, Y., Komatsuzaki, T. and Hongo, Y., Modeling and analysis of impact system composed of ball and plane, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.65, No.634 (1999), pp.2287-2293.