

経営と経済 第90巻 第1・2号 抜刷

2010年9月24日発行

長崎大学経済学会

レンマの証明

村田省三
橋口真理子

レ ン マ の 証 明

村 田 省 三
橋 口 真 理 子*

Abstract

In this paper, we re-examine the lemma over action commitment games in Murata & Hashiguchi (2010). They prove a sufficient condition for the existence of non degenerated equilibrium with mixed strategy. This paper gives, as an answer to this, another lemma and one theorem. Two liner isoprofit curves appear only in the case that the profit function is quadratic that is polynominal with degree two. This lemma and thorem over duopoly games of action commitment assert there cannot be any mixed strategy equilibria when the equilibrium with simultaneous move is stable. The same is the case that there exist two Stackelberg equilibrium.

Keywords: action commitment game, mixed strategy, duopoly game

1 はじめに

コミットメントゲーム (The Extended Game of Action Commitment) の支配されない純戦略均衡は, 2つのシュタッケルベルグ均衡である。Hamilton & Slutsky (1990)によるこの定理には, 混合戦略均衡についての論証はない。同定理の背後に, 最適反応曲線からの乖離を疑う意図があった

* 九州大学大学院博士後期課程

ためと思われる。しかし、混合戦略のもとでも、なお、最適反応曲線からの乖離を許さない意図であったかどうか明らかでない。したがって、混合戦略均衡の存在は、明白とならなかった。Pastine & Pastine (2004) は、ある特殊ケースについて、混合戦略均衡がないことを示した。ただし、その他のケースについて、混合戦略均衡が存在するかどうか、未解決問題となった。

これにたいして、村田・橋口(2010) は、ひとつのレンマを提示し、混合戦略均衡が存在するための条件を示した。混合戦略均衡の存在をめぐる理論予想の端緒となった。本稿は、このレンマにたいするひとつの応答である。結論的には、同時手番均衡が安定なら、混合戦略均衡は存在しない。このことを証明するため、本稿では、もうひとつのレンマとひとつの定理を示す。ここでは、2次多項式利潤関数が仮定されない。

結局、村田・橋口(2010) によるレンマは、不安定均衡であれば、混合戦略均衡がありうるという予想であったことが明らかになる。なお、本稿補題は、混合戦略均衡の有無を検討するのに有用なだけでなく、相当広範囲にわたる適用が可能である。等利潤線の凸形状を想定することは、多くの場合、結果的に、2次多項式利潤関数を仮定することにつながる。

2 レンマの証明

等利潤線の形状と2次多項式の関連をいう補題1にたいして、定理2は、混合戦略均衡がないことを証明する。

補題1 (Mの Lemma) (x, y) が、 R^2 で定義された、少なくとも C^2 級実関数であり、

$$\frac{(x, y)}{x} = 0$$

$$\frac{(x, y)}{y} = 0$$

を満たす曲線は、各々、任意の x (もしくは y) に対して一意に存在しており、交点 (x_0, y_0) が、 (> 0) 球内の孤立点とする。

(A) 等高線が、 (x_0, y_0) に向かって凸形状なら、

(1) $\frac{\quad}{x} = 0$, $\frac{\quad}{y} = 0$ により形成される各凸領域の境界は直線等高線となる。

(2) 直線等高線は2つで、(1) が成立、直交条件は、以下になる*1。

$$\left(\frac{2(x_0, y_0)}{x y} \right)^2 - \frac{2(x_0, y_0)}{x^2} \frac{2(x_0, y_0)}{y^2} > 0 \quad (1)$$

$$-\frac{2}{x^2}(x_0, y_0) = -\frac{2}{y^2}(x_0, y_0) \quad 0$$

(B) (x, y) が実解析関数であり、孤立点 (x_0, y_0) を通過する2つの直線等高線が存在するとき、 (x, y) は、2次多項式である*2。

(C) (x, y) が実解析関数であるとき、 $\frac{\quad}{x}(x, y) = 0$, $\frac{\quad}{y}(x, y) = 0$ 曲線が直線でなければ、等高線は直線にならない。

証明 . (A)

(1) 各凸領域内に、 $\frac{\quad}{x}(x, y) = 0$ 曲線と $\frac{\quad}{y}(x, y) = 0$ 曲線は並存せず、隣接する2つの $\frac{\quad}{x}(x, y) = 0$ 曲線に挟まれる境界はなく、隣接する2つの $\frac{\quad}{y}(x, y) = 0$ 曲線に挟まれる境界もない。したがって、境界は、 $\frac{\quad}{x}(x, y) = 0$, $\frac{\quad}{y}(x, y) = 0$ 曲線に挟まれる。

$\frac{\quad}{x}(x, y) = 0$ (もしくは $\frac{\quad}{y}(x, y) = 0$) 曲線上を頂点とする (各領域内の) 等高線の凸方向は異なるから、連続性から、境界は存在する。境界上の点に対

*1 2次多項式なら、双曲線形状になることが自明。

*2 (x, y) が x, y について2次多項式であるとき、直線等高線となるための2次条件が、傾き a に関する2次方程式となる。仮定により、重根を持たないから、2つの異なる係数 a を確定できる。2つの a について、各々、直線等高線となるための1次導関数条件から、代数的に、定数項 b を決定できる。 (x, y) が x について2次、 y について1次多項式であるときには、ひとつの直線等高線が、横軸に対して、垂直になる。

応する利潤水準をもつ等高線は、隣り合ういずれ領域にも属することができず、境界は直線となる。この直線は有界でなく、半直線でもない。

境界直線上に、2つの異なる関数値が対応すれば、ただ1点からなる等高線(点)となるが、 (x_0, y_0) 以外の境界直線上では、 $x(x, y) = 0$ かつ $y(x, y) = 0$ であるから、同点の、いくらでも近くに、

$$-\frac{(x, y)}{x} dx + \frac{(x, y)}{y} dy = 0$$

$$-\frac{(x, y)}{x} = 0, \quad \frac{(x, y)}{y} = 0$$

を満たす、等高線が存在して矛盾する。したがって、境界直線は、等高線になる。

また、 $(x, ax + b) = (x_0, y_0)$ となる任意の定数 a, b にたいして、以下が成立するから、すべての境界直線は (x_0, y_0) を通る。

$$-\frac{(x, y)}{x} + a \frac{(x, y)}{y} = 0$$

(2) 仮定より、 (x_0, y_0) は、孤立点であるから、2つ以上の境界直線(等高線)の存在は自明。また、 $x(x, y) = 0$ 曲線と $y(x, y) = 0$ 曲線が交互に並列するため、交点 (x_0, y_0) を原点とする直交座標系において、軸上を除き、各象限内の境界直線は最大1個となる。軸上を含めても、 R^2 全体で最大2個である。

2個の異なる直線等高線が、縦軸(y 軸)に平行でないとき、ある直線 $y = ax + b$ 上で、任意の x にたいして、以下が成立する。

$$(x, y) = Const$$

$$-\frac{(x, y)}{x} + a \frac{(x, y)}{y} = 0$$

$$-\frac{2(x, y)}{x^2} + 2a \frac{(x, y)}{xy} + a^2 \frac{(x, y)}{y^2} = 0$$

これが2実根をもつことから、(1)が得られる。直線等高線の傾きは、(2)であり、これから、直交条件が得られる^{*}。

$$a = \frac{-\frac{2}{x}y \pm \sqrt{\left(\frac{2}{x}y\right)^2 - \frac{2}{x^2} \frac{2}{y^2}}}{\frac{2}{y^2}} \quad (2)$$

直線等高線が縦軸に平行なときは、以上を、 y について検討すればよい。

(B)

いま、 $(x, y) - (x_0, y_0)$ を、改めて、 (x, y) とし、 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ と仮定する。したがって、

$$(0, 0) = 0$$

$$\frac{(0, 0)}{x} = \frac{(0, 0)}{y} = 0$$

(0, 0)における冪級数展開、

$$\begin{aligned} (x, y) = & \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x^2} (0, 0) x^2 + 2 \frac{2}{x} (0, 0) xy + \frac{2}{y^2} (0, 0) y^2 \right) \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{x^3} (0, 0) x^3 + 3 \frac{3}{x^2} (0, 0) x^2 y + 3 \frac{3}{x} (0, 0) xy^2 + \frac{3}{y^3} (0, 0) y^3 \right) \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3)$$

および、仮定から、(3)が2次双曲線を形成して、2個の直線等高線をもつことが分かる。この直線の傾きは、(2)から得られる。また、

$$\frac{(x, y)}{x} = 0, \quad \frac{(x, y)}{y} = 0 \text{ が直線になる。}$$

これは(3)を、

*3 交点 (x_0, y_0) を原点、2つの直線等高線を両軸とする座標系を導入し、この原点で、 (x, y) を冪級数展開すると、展開係数の一意性から、第3次以上の編微分係数がことごとくゼロであることが証明できる。ただし、この変換なしでも、証明は可能であり、本来の (x, y) 直交座標における証明を以下に記す。

$$(x, y) = x^2 f(x, y) + 2xyg(x, y) + y^2 h(x, y)$$

として、以下の変換により、

$$u^2 = -f(x, y) \left(x + \frac{g(x, y)}{f(x, y)} y \right)^2$$

$$v^2 = \frac{g^2(x, y) - f(x, y)h(x, y)}{f(x, y)} y^2$$

次の双曲線となることから確認できる。

$$(u, v) = -u^2 + v^2$$

このとき、 $\frac{(x, y)}{x} = 0$ 、 $\frac{(x, y)}{y} = 0$ が直線にならないとすると、直線等高線は等高線でなくなり矛盾する。かくして、 $\frac{(x, y)}{x} = 0$ 、 $\frac{(x, y)}{y} = 0$ が直線となり、 (x, y) が x, y について、2次となることが分かる。したがって、 (x, y) は2次多項式になり、直線等高線の存在から、双曲線以外になることができない。

(C)

前段、(B) の証明から自明。

いま、プレイヤー A, B の利潤関数を $A(x, y)$ 、 $B(x, y)$ 、各々の最適反応関数を $R_A(\cdot)$ 、 $R_B(\cdot)$ とし、プレイヤー A, B のコミットメント確率を q_A, q_B 、同時手番均衡を (x^S, y^S) とする。プレイヤー A, B の期待利潤が以下であるとき、混合戦略均衡は、次の4条件を満たす。

$$E_{A(x, y)} = q_A q_B A(x, y) + q_A(1 - q_B) A(x, R_B(x)) + (1 - q_A) q_B A(R_A(y), y) \\ + (1 - q_A)(1 - q_B) A(x^S, y^S)$$

$$E_{B(x, y)} = q_B q_A B(x, y) + q_B(1 - q_A) B(R_A(y), y) + (1 - q_B) q_A B(x, R_B(x)) \\ + (1 - q_B)(1 - q_A) B(x^S, y^S)$$

$$\frac{E_A}{x} = 0, \quad \frac{E_A}{q_A} = 0, \quad \frac{E_B}{y} = 0, \quad \frac{E_B}{q_B} = 0$$

定理 2 では、安定均衡なら、混合戦略均衡がないことを示す。

定理 2 $A(x, y)$, $B(x, y)$ は R^2 で実解析関数で、各々、

$$-\frac{i(x, y)}{x} = 0$$

$$-\frac{i(x, y)}{y} = 0$$

の解 (x_{i0}, y_{i0}) をもち、孤立点 ($i = A, B$) とする。また、 A , B の等高線が、 (x_{i0}, y_{i0}) に向かって、ことごとく凸形状とする。さらに、同時手番均衡点と 2 つのシュタッセルベルグ均衡の一意存在 (相互に異なる) を仮定する*4。

また、

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} < 0$$

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} > 0$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} > 0$$

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} < 0$$

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} < 0$$

とする。このとき、同時手番均衡が安定なら、真正な混合戦略均衡は存在しない。

*4 各々が異なる点に存在しないと、 A , B の最適混合戦略曲線に関する条件が、ひとつの曲線を形成しない。すなわち、 $A(x^s, y^s) - A(x, R_B(x)) = 0$ のとき、 R^2 のいたるところで条件成立するから、このケースを排除しないときには、あらゆる点が混合戦略均衡点になる。

証明．以下の最適コミットメント確率を代入して，A，B の最適混合戦略曲線が得られる^{*5}。

$$q_A = \frac{\frac{d}{dy} \frac{B(R_A, y)}{y}}{\frac{d}{dy} \frac{B(R_A, y)}{y} - \frac{B(x, y)}{y}}$$

$$q_B = \frac{\frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B)}{x}}{\frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B)}{x} - \frac{A(x, y)}{x}}$$

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B(x))}{x} - \frac{A(x, R_B(x))}{x} \right) \frac{d}{dy} \frac{A(x, R_B(x))}{y} + \left(\frac{d}{dy} \frac{A(x, R_B(x))}{y} - \frac{A(x, y)}{y} \right) \frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B(x))}{x} = 0$$

補題 1 より， $\frac{A(x, y)}{x}$ は， x, y について 2 次以下多項式であるから，

$$\frac{A(x, y)}{x} - \frac{A(R_A(y), y)}{y} = \frac{1}{2}(x - R_A(y)) \frac{d}{dx} \frac{A(x, y)}{x}$$

したがって，A の最適混合戦略曲線について，次式が得られる。B の最適混合戦略曲線についても同様の結果が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dR_A(y)}{dy}} + (x - R_A(y)) \frac{\frac{d^2}{dx^2} \frac{A(x, R_B(x))}{x}}{\frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B(x))}{x} \frac{dR_A(y)}{dy}}$$

また，A の最適混合戦略曲線における 2 次微係数は以下になる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2}{dx^2} \frac{A(x, R_B(x))}{x}}{\frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B(x))}{x} \frac{dR_A(x)}{dx}} - (x - R_A(y)) \frac{\left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{A(x, R_B(x))}{x} \right)^2}{\left(\frac{d}{dx} \frac{A(x, R_B(x))}{x} \right)^2 \frac{dR_A(x)}{dx}}$$

*5 A の最適反応曲線はひとつの最適混合戦略曲線になる。同曲線が，ことごとく， (x^S, y^S) を通ることも自明。

定理の仮定にかかわらず， (x^S, y^S) 通過後の区分曲線が再び自己の最適反応曲線と交点をもつこともないことは明らか。区分曲線が，再び自己の最適反応曲線と交点をもつとすれば，そこは undominated 領域外であるから，自身による逸脱がおり矛盾する。

一方、Bの最適混合戦略曲線の2次微係数も同様にして得られる。同時手番均衡が安定なら、ふたつの最適混合戦略曲線は undominated 領域で交点を持たない。

各プレイヤー最適混合戦略曲線は、2次曲線（双曲線）あるいは直線になる。直線になるのは、 $A(x, R_B(x))$ が1次、 $\frac{d}{dx} A(x, R_B(x))$ が0次のときである。定理の条件をことごとく満たしても、なお、このケースは起こる。

3 おわりに

ふたつの直線等利潤線があるとき、安定な同時手番均衡を通過する最適混合戦略曲線は、そのグラフが同時手番均衡点を共有する双曲線あるいは直線になり、互いの交点は、たかだか2個。共に右下がりの最適反応曲線の場合、残る交点は、たとえば、同時手番均衡点の左下に広がるパレート優位集合の境界上にある。そこでは、同時手番均衡と同等な利潤水準になることもあるが、 $q_A > 1$, $q_B > 1$ になる。

安定な同時手番均衡とシュタツケルベルグ均衡の存在は実質的に同等であるから、シュタツケルベルグ均衡が存在するとき、すでに最適混合戦略曲線は同領域内で交点をもたず、真正な混合戦略均衡はない。仮に、安定均衡さえ仮定しないとすると、シュタツケルベルグ均衡点も消滅する。しかし、このようなときにも、いわゆる deletion は可能であって、同時手番均衡点を原点とする直交座標系において、第1象限以外を delete できる。もちろん、シュタツケルベルグ均衡が存在しないのであるから、残る第1象限のなかをさらに delete することはできないが、ここに最適混合戦略曲線の交点（混合戦略均衡に対応）をもたらすことができる。このとき、双曲線（区分曲線）の他方の対が同時手番均衡を通過する。

同時手番均衡とシュタツケルベルグ均衡の存在のみを仮定する条件は、ここでの条件より、いくらか緩い。ただし、そこでは、等利潤線の凹凸形状が

逆転するかもしれず，通常モデルからの距離は遠い。

参 考 文 献

- [1] Amir, .R.(1995). “ Endogenous Timing Two-Player Games:A Counter Example ” *Games and Economic Behavior* . 9 . 234 - 237.
- [2] Dowrick,S.(1986). “ von Stackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles, ” *Rand Journal of Economics* . 17 . 251-260.
- [3] Hamilton,J. ,andS,Slutsky.(1990). “ Endogenous Timing in Duopoly Games:Stackelberg or Cournot Equilibria, ” *Games and Economic Behavior* . 2 . 29-46.
- [4] Pastine,I. , and E,Pastine.(2004). “ Cost of Delay and Endogeneous Price Leadership, ” *International Journal of Industrial Organization* . 22 . 135-145.
- [5] 村田省三・橋口真理子(2010)「ひとつのレンマ」『経営と経済』長崎大学，第89巻第4号。