

# 扇形板の非線形強制振動

高橋和雄\* 樗木 武\*\*

## Nonlinear Forced Vibrations of Ring Sector Plates

by

Kazuo TAKAHASHI

(Structural Engineering)

and Takeshi CHISYAKI

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu University)

In this paper, the nonlinear response of ring sector plates subjected to harmonic loading is shown by using Berger's approximate equations describing the large deflections of plates. The supports of the plates are assumed immovable during bending and the resulting membrane stress is the source of nonlinearity in this problem. The application of a modified Galerkin method to solve the governing nonlinear partial differential equations yields a nonlinear ordinary differential equation, of which the solution is obtained approximately by using an iteration procedure. Numerical results are presented for various boundary conditions and various shape factors of ring sector plates. As a special case, the corresponding static bending with lateral load is also treated.

### 1. 緒 言

薄板の強制振動の応答問題において、応答振幅の大きさが板厚と同程度またはそれ以上となる場合には、板面内に生ずる引張力に起因する非線形項の影響が無視できなくなる<sup>1)</sup>。このような場合には、板の有限変形理論に基づく振動理論を用いて解析しなければならないが、その運動方程式に非線形項が含まれるため、自由振動の項と強制振動の項との重ね合わせが許されず、したがって、過渡振動をも考慮した厳密解析が極めて困難である。しかし乍ら、振動系には必ず減衰が存在するから、線形振動の場合と同様に、長時間経過後には定常状態の振動となることが知られている。定常振動の場合には非線形自由振動の場合と同様に、板の運動方程式にガラーキン法を適用して時間に関する非線形常微分方程式を誘導のうえ、その周期解を求めるか、或いは Ritz の平均法を適用して解をうるかなどの方法を用いて近似解を算出することができる。

板の定常振動問題に関する既往研究としては、これまで矩形板および円板を対象として、等分布外力の時間関数が周期関数及びランダム関数の場合を解析し

たものが殆んどである。すなわち、Yamaki<sup>2)</sup> は Kármán の有限変形理論に基づき、外力の時間関数が調和関数で表わされる場合について、全周辺が単純支持または固定の矩形板および円板がガラーキン法を用いて解き、Eisley<sup>3)</sup> は Yamaki と同じ基礎式および方法を用いて、外力の時間関数が調和または楕円関数で表わされる場合について、初期面内力の作用を受けかつ全周辺が単純支持または固定される矩形板を解いた。また、Lin<sup>4)</sup> はエネルギー法を用いて外力の時間関数が調和または楕円の周期関数およびランダム関数で表わされる場合について、全周辺単純支持矩形板の周波数応答曲線を求めた。一方、Berger<sup>5)</sup> の有限変形理論に基づいて、Srinivasan<sup>6)</sup> は外力の時間関数が調和関数の場合について、単純支持および固定の円板を Ritz の平均法を用いて解き、ガラーキン法と同様本法がこの種の問題に対する有効な手段の一つであることを明らかにした。

以上の諸研究では、板のたわみ関数を仮定することが比較的容易な全面等分布荷重のみを対象としている。他方、実際の板構造では、必ずしも等分布荷重だけではなく種々の荷重状態が考えられ、また、たわみ関数として仮定した基本振動のモードのみが卓越すること

\* 構造工学科

\*\* 九州大学工学部土木工学科

は保証されない。しかし、全面等分布荷重を受ける矩形板や円板に対して算定された線形振動と非線形振動との間の相対的な関係は、全面等分布荷重以外の複雑な荷重状態に対しても、線形振動の解が既知であるならば、非線形応答に近似的にあてはまることが既に推察されており、必ずしも荷重状態に即した厳密解を求める必要はないといえる。

著者らは先に、Berger の式に基づいて、全周辺で面内変位が拘束される直線辺単純支持扇形板の非線形自由振動をガラーキン法により解析のうえ、振動数に及ぼす大振幅の影響を報告<sup>7)</sup>し、矩形板、円板につぐ板基本構造としての扇形板の非線形振動に関する基礎的研究を行ったが、つづいて、本論文は、前述の論拠に基づき、等分布強制力を対象として、その時間関数が調和関数で表わされる扇形板の定常状態の強制振動を論ずるとともに、その特例としてえられる扇形板の静的曲げに関する有限変形問題の諸特性を検討せんとするものである。

2. 解 法

周期的変動圧力を受ける板の非線形曲げ振動の微分方程式は、有限変形に関する Berger の式に慣性力を加えることにより次のごとくえ与えられる<sup>8)</sup>。

$$D\nabla^4 w - N\nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \cos \Omega t \quad (1)$$

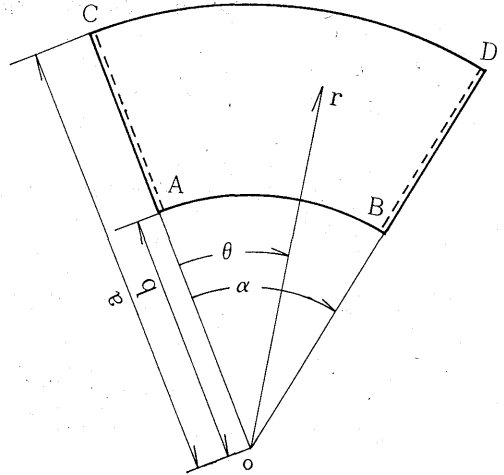
$$\frac{Nh^2}{12D} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{(1-\nu)}{Eh} (Nr + N\theta) \quad (2)$$

ここに、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r + 1/r^2 \cdot \partial^2/\partial \theta^2$ ,  $r, \theta$ : 極座標系,  $h$ : 板厚,  $\rho$ : 板の密度,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  (板剛度),  $E, \nu$ : 板のヤング率およびポアソン比,  $t$ : 時間,  $w$ : 板のたわみ,  $u, v$ : 板の半径および接線方向の面内変位,  $Nr, N\theta$ : 板の半径および接線方向の面内応力,  $p$ : 荷重強度,  $N: Nr, N\theta$  と同じ次元をもつ定数,  $\Omega$ : 外力の円振動数

いま、Fig.1 に示すごとき扇形板 ACDB において、円弧辺 AB, CD の半径方向の面内変位  $u$  および直線辺 AC, BD の接線方向の面内変位  $v$  が起らないものとするれば、式(2)の扇形板 ACDB の全領域に関する積分から次式が算定される。

$$\frac{Nh^2}{24D} \alpha (a^2 - b^2) = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (3)$$

扇形板の境界が単純支持または固定の場合には、式(3)は次のごとく書き換えられる。



AC, BD simply supported  
AB, CD simply supported  
or clamed

Fig. 1

$$\frac{Nh^2}{24D} \alpha (a^2 - b^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha w (\nabla^2 w) r dr d\theta \quad (4)$$

式(4)のもとに式(1)の近似解をうるために板のたわみ  $w$  に関して次のごとく仮定する。

$$w = c \cdot W(r, \theta) \cdot F(t) \quad (5)$$

ここに、 $c$ : 振幅,  $W(r, \theta)$ : 境界条件を満足する座標関数,  $F(t)$ : 未知の時間関数

式(5)の座標関数  $W(r, \theta)$  として、扇形板の線形振動の規準関数を用うれば、Fig.1 に示す直線辺が単純支持される扇形板の場合には、 $W(r, \theta)$  を厳密に算定することができ、次のごとくえられる<sup>9)</sup>。

$$W(r, \theta) = R(r) \sin x\theta = \{Ax J_x(k\xi) + Bx Y_x(k\xi) + Cx I_x(k\xi) + Dx K_x(k\xi)\} \sin x\theta \quad (6)$$

ここに、 $R(r)$ :  $r$  のみの関数,  $x = \pi/\alpha$ ,  $J_x(k\xi), Y_x(k\xi)$ :  $x$  次の第1種, 第2種 Bessel 関数,  $I_x(k\xi), K_x(k\xi)$ : 変形された  $x$  次の第1種, 第2種 Bessel 関数,  $Ax, Bx, Cx, Dx$ : 積分定数,  $\xi = r/a, k = a \sqrt[4]{\rho h \omega^2/D}$  (線形振動の固有値),  $\omega$ : 線形振動の固有円振動数

式(6)の積分定数  $Ax \sim Dx$  は扇形板の円弧辺の境界条件により決定される。すなわち、円弧辺の4つの境界条件式から固有値  $k$  および積分定数間の関係を算定のうえ、 $W(r, \theta)$  の最大値が1となるように修正決定する。次いで、式(5)を式(1)に代入のうえ、規準関数に関して線形振動の座標関数に関する微分方程式  $\nabla^4 W = W \rho h \omega^2/D$  が成り立つことを考慮すれば、式(1)が次のごとく書き更められる。

$$\omega^2 c \rho h W F - c N \nabla^2 W F + c \rho h W \ddot{F} = p \cos \Omega t \quad (7)$$

式(7)にガラーキソ法を適用すれば次式をうる.

$$\begin{aligned} & \ddot{F} c \rho h \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta + F c \rho h \omega^2 \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta \\ & - F c N \int_b^a \int_0^\alpha W (\nabla^2 W) r dr d\theta = p \cos \Omega t \int_b^a \\ & \int_0^\alpha W r dr d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

式(4)および式(8)からNを消去のうえ整理すれば、時間に関する2階の非線形常微分方程式が求められ、本題の基礎式がえられることになる。

$$\begin{aligned} \ddot{F} + \omega^2 F + \frac{6}{1-\mu^2} \cdot \frac{\varphi^2}{\gamma} \cdot \omega^2 \cdot \frac{c^2}{h^2} \cdot F^3 &= \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \\ \frac{\lambda}{\gamma} \cdot \frac{\omega^2}{k^4} \cdot \frac{1}{c/h} \cdot \frac{p a^4}{E h^4} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \varphi &= \int_\mu^1 \{ A_x J_x(k\xi) + B_x Y_x(k\xi) + C_x \\ & I_x(k\xi) + D_x K_x(k\xi) \} \{ A_x J_x(k\xi) + B_x \\ & Y_x(k\xi) - C_x I_x(k\xi) - D_x K_x(k\xi) \} \xi d\xi, \\ \gamma &= \int_\mu^1 \{ A_x J_x(k\xi) + B_x Y_x(k\xi) + C_x I_x(k\xi) \\ & + D_x K_x(k\xi) \}^2 \xi d\xi, \\ \lambda &= \int_\mu^1 \{ A_x J_x(k\xi) + B_x Y_x(k\xi) + C_x I_x(k\xi) \\ & + D_x K_x(k\xi) \} \xi d\xi, \mu = b/a \end{aligned}$$

式(9)は3次の非線形復元力をもつ質点の運動方程式と同じで、Duffing形の方程式であり、その周期解には外力と同じ周期解  $2\pi/\Omega$  の他に、外力の周期の整数倍のものが存在することが数学的に知られている。しかし、本論文では既往研究と同様に、外力と同じ周期解のみを求めることにすれば、以下のごとく誘導することができる<sup>10)</sup>。

式(9)の非線形項を右辺に移して、逐次近似の形に書き改めれば、

$$\begin{aligned} \ddot{F} + \Omega^2 F &= (\Omega^2 - \omega^2) F - \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F^3 + \\ & \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\omega^2}{k^4} \frac{1}{c/h} \frac{p a^4}{E h^4} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (10)$$

$\Omega^2 = \omega^2$ ,  $c/h = 0$  および  $p a^4/E h^4 = 0$  すなわち、 $\Omega = \omega$  なる線形自由振動を起点として逐次近似法を適用すれば、第1近似値は  $F_1 = \cos \Omega t$  で与えられ、これを式(10)の右辺に代入すれば、Fの第2近似値  $F_2$  に関して次の微分方程式がえられる。

$$\begin{aligned} \ddot{F}_2 + \Omega^2 F_2 &= \left\{ \Omega^2 - \omega^2 - \frac{9}{2(1-\mu^2)} \frac{\varphi^2}{\gamma} \omega^2 \frac{c^2}{h^2} + \right. \\ & \left. \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\omega^2}{k^4} \frac{1}{c/h} \frac{p a^4}{E h^4} \right\} \cos \Omega t - \frac{3}{2(1-\nu^2)} \\ & \frac{\varphi^2}{\gamma} \omega^2 \frac{c^2}{h^2} \cos 3\Omega t \end{aligned} \quad (11)$$

右辺第1項の特解が永年項となるゆえ、その係数が零となるときに限って、 $F_2$  の周期解が求められ、かかる場合には振動数比  $\Omega/\omega$  と振幅比  $c/h$  との近似的な関係が次のごとく算定される。

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + q \frac{c^2}{h^2} - s \frac{1}{c/h} \frac{p a^4}{E h^4} \quad (12)$$

$$\text{ここに、} q = 9/2 \cdot 1/(1-\mu^2) \cdot \varphi^2/\gamma$$

$$s = 48(1-\nu^2)/(k^4 \pi) \cdot \lambda/\gamma$$

また、このとき、式(11)の解が次のごとくえられる。

$$\begin{aligned} F_2 &= A_2 \cos \Omega t + \frac{3}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \frac{c^2}{h^2} \\ & 16 \left\{ 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \frac{c^2}{h^2} - \right. \\ & \left. \frac{48(1-\nu^2)}{k^4 \pi} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{1}{c/h} \frac{p a^4}{E h^4} \right\} \cos 3\Omega t \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 $A_2$ : 積分定数

式(13)の積分定数  $A_2$  は、逐次近似法の常套手段を活用して、第1近似値の振幅1と殆んど変わらないものとすれば ( $A_2 = 1$ )、近似的な周期解Fが次のごとく決定される。

$$\begin{aligned} F &= \cos \Omega t + \frac{3}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \frac{c^2}{h^2} \\ & 16 \left\{ 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \frac{c^2}{h^2} - \right. \\ & \left. \frac{48(1-\nu^2)}{k^4 \pi} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{1}{c/h} \frac{p a^4}{E h^4} \right\} \cos 3\Omega t \end{aligned} \quad (14)$$

式(12)の周期解の安定を調べるには、周期解Fにわずかな攪乱  $r(t)$  を与えたとき、その状態に戻ろうとするか、あるいは逆にその状態から離れようとするかを調べればよい。すなわち、式(9)に  $F+r$  を代入し、Fもまた式(9)を満足していることを考慮すれば、rに関する次のごとき微分方程式がえられる。

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \omega^2 r + \frac{18}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F^2 r + \frac{18}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \omega^2 \frac{c^2}{h^2} \\ F r^2 + \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \omega^2 \frac{c^2}{h^2} r^3 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

rは微小量であるから、 $r^2$ ,  $r^3$  は無視でき、Fの近似解として  $F = \cos \Omega t$  を式(15)に代入すれば次式がえられる。

$$\ddot{r} + \omega^2 \left( 1 + \frac{9}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\gamma} \frac{c^2}{h^2} \cos 2\Omega t \right) r = 0 \quad (16)$$

当然ながら、式(16)のrのすべての解が任意のtについて有界であれば  $F = \cos \Omega t$  は安定な解であるが、rが無限大となることがあれば、Fは不安定な解である。  $z = 2\Omega t$  なる変数を導入すれば、式(16)は次のごとき Mathieu の微分方程式となる。

$$\ddot{r} + (\delta + \varepsilon \cos z) r = 0 \quad (17)$$

$$\delta = \frac{1 + \frac{9}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2 c^2}{\eta h^2}}{4 \left\{ 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2 c^2}{\eta h^2} - \frac{48(1-\nu^2)}{k^4 \pi} \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \right\}}$$

$$\epsilon = \frac{9}{4} \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2 c^2}{\eta h^2} - \frac{48(1-\nu^2)}{k^4 \pi} \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \right\}} \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2 c^2}{\eta h^2} - \frac{48(1-\nu^2)}{k^4 \pi} \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \right\}} \quad (18)$$

式(17)の周期解を摂動法を用いて論ずれば、 $(\delta, \epsilon)$ 平面上における Mathieu の微分方程式の近似的な安定、不安定判別図の境界線がえられ、この結果と式(12)、(18)との関係から  $(\Omega/\omega, |c/h|)$  平面上の周期解の安定、不安定領域を決定することができる。すなわち、 $(\delta, \epsilon)$  平面上における近似的な境界線  $\delta + \epsilon/2 = 1/4$  および  $\delta - \epsilon/2 = 1/4$  は  $(\Omega/\omega, |c/h|)$  平面上において  $d(\Omega/\omega)/d(c/h) = 0$  なる鉛直接線の軌跡および式(12)において  $pa^4/Eh^4 = 0$  とおいた自由振動の近似式で与えられ、それぞれ次のごとくえられる。

$$\frac{9}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2 c}{\eta h} + \frac{48(1-\nu^2)}{k^4 \pi} \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{c^2/h^2} \frac{pa^4}{Eh^4} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2 c^2}{\eta h^2} \quad (20)$$

式(19)、(20)からえられる2曲線に囲まれる応答曲線の部分は不安定な周期解に対応するものであって、実験的にこの部分を実現することができないが、他の部分においては安定となる。ただし、式(20)の曲線は自由振動に関するもので安定部分に含まれることは当然である。

### 3. 扇形板の非線形振動特性

#### (1) 境界条件の影響および正方形板との比較

Fig. 2(a) に示すごとく、 $\alpha = \pi/6, \mu = 0.5850$  (扇形板の中央円弧長と  $a-b$  との比が1の場合) および  $\nu = 0.3$  なる扇形板において、辺 AB, CD の境界条

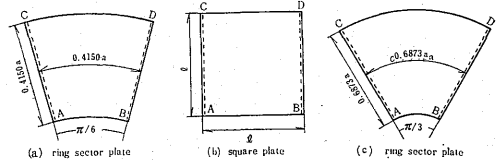


Fig. 2

件がいずれも単純支持の場合 (S. S.), 辺 AB 固定, 辺 CD 単純支持の場合 (C. S.), 辺 AB 単純支持, 辺 CD 固定の場合 (S. C.) および辺 AB, CD がいずれも固定の場合 (C. C.) の4例を対象として、その基本振動の応答を求めることにする。計算に必要な式(12)の諸量  $\omega$  (係数  $\sqrt{D/\rho h}/a$ ),  $q$  および  $s$  の値を各ケースについて算出すれば Table 1 (a) に示すごとくえられ、これらの諸値を式(12)に代入すれば各種境界条件の扇形板の応答曲線を容易に求めることができる。周知のごとく、線形振動では振動数比  $\Omega/\omega$  を与えて振幅比  $c/h$  を求めるが、式(12)から明らかのごとく非線形振動の場合には逆に  $c/h$  を与えて  $\Omega/\omega$  を求めることになる。しかしながら、作図の上では慣例に従って従属変数  $\Omega/\omega$  を横軸に、独立変数  $c/h$  を縦軸にとり、各ケースの  $c/h$  と  $\Omega/\omega$  との関係性を  $pa^4/Eh^4$  をパラメータとしてプロットすることにすれば各々の境界条件に応じて、Fig. 3 (a)~(d) に示すごとくえられる。図において肉太の実線は非線形自由振動に対応し、点線は不安定領域に対応するものである。線形振動では  $\Omega/\omega = 1$  のとき共振状

Table 1

		ring sector plate			square plate		
		$\omega$	$q$	$s$	$\omega$	$q$	$s$
(a)	S.S.	114.98	1.1264	$1.3397 \cdot 10^{-3}$	114.63	1.1250	$1.3472 \cdot 10^{-3}$
	C.S.	131.80	0.8750	$1.0311 \cdot 10^{-3}$	137.56	0.7957	$0.9495 \cdot 10^{-3}$
	S.C.	143.84	0.7285	$0.8741 \cdot 10^{-3}$			
	C.C.	168.16	0.5239	$0.6465 \cdot 10^{-3}$	168.13	0.5212	$0.6495 \cdot 10^{-3}$
(b)	S.S.	42.28	1.1328	$1.9926 \cdot 10^{-2}$	41.78	1.1250	$1.0140 \cdot 10^{-2}$
	C.S.	46.27	0.9616	$0.8333 \cdot 10^{-2}$	50.14	0.7957	$0.7147 \cdot 10^{-2}$
	S.C.	55.26	0.6660	$0.5958 \cdot 10^{-2}$			
	C.C.	61.31	0.5333	$0.4868 \cdot 10^{-2}$	61.28	0.5212	$0.4866 \cdot 10^{-2}$

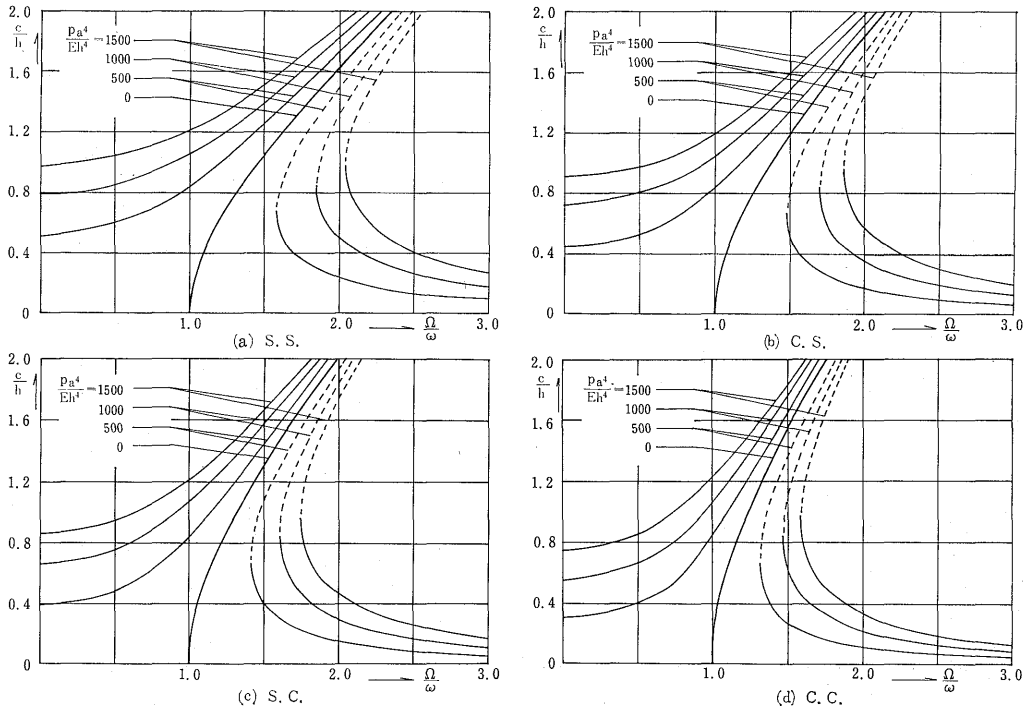


Fig. 3

態となるゆえ  $c/h$  が無限大であるが、本題のごとき非線形振動では、振幅によって自由振動数が異なるために  $\Omega/\omega=1$  で  $c/h$  は無限大とはならず、自由振動の背骨曲線が右に傾き、1つの  $\Omega/\omega$  に対して  $c/h$  が多価となる。点線で示した領域では荷重強度  $pa^4/Eh^4$  が増せば、逆に振幅比  $c/h$  が減少する領域であるが、かかる事実はエネルギー的にみて矛盾することがわかり、実現しない振幅であるといえる。したがって安定な振幅は1個または2個存在し、この2個の安定状態の間を一方から他方へ移ることが可能で、非線形振動特有の振幅の跳躍現象が生ずることが予想される。 $\Omega/\omega=0$  の場合の  $|c/h|$  は外力が静的に作用した場合の曲げたわみを表わすものである。また、自由振動の背骨曲線より左側の領域の振幅は外力と同位相で、右側は  $\pi$  ラジアン位の位相差をもつものである。なお、本論文では減衰の影響を考慮していないので共振時の振幅が無限大となることは線形振動の場合と全く同様である。

境界条件の異なる4種の扇形板について、振動数比  $\Omega/\omega$  に及ぼす振幅比  $c/h$  の影響を比較すれば次のとおりである。すなわち、式(12)の右辺第1, 2項は非線形自由振動の項を示し、第3項は外力の影響項を示すものであるが、Table 1(a) より明らかなごとく、これらの係数  $q, s$  は S.S., C.S., S.C., C.C. の

順に小さくなる。したがって自由振動の背骨曲線に及ぼす振幅比の影響は S.S., C.S., S.C., C.C. の順に減少し、 $pa^4/Eh^4$  を一定とした応答振幅  $c/h$  は S.S., C.S., S.C., C.C. の順に小さくなり、自由振動の背骨曲線に近づくことがわかる。

比較対照のために Fig.2(b) に示す1対辺単純支持正方形板 ( $l=0.4150a$ ) において、辺 AB, CD が扇形板の円弧辺と同様の各境界条件をもつ場合について式(12)の係数を算出すれば Table 1(a) に併記するとき結果をうる。これより S.S. および C.C. の場合には、扇形板の自由振動および強制振動が正方形板のそれとほぼ合致するといえるが、C.S. および S.C. の場合には扇形板の特性が現われており、正方形板の  $\omega, q, s$  は C.S. および S.C. 両扇形板の諸量の中間の値となる。

Fig.2(a) の扇形板は開角が小さく、その形状が正方形板に近い場合の例であるが、Fig.2(c) に示すごとく、開角  $\alpha$  が2倍の大きさである  $\alpha=\pi/3$  なる扇形板 ( $\mu=0.3127, \nu=0.3$ ) について計算すれば Table 1(b) のごとくえられるが、本例においても対応する正方形板 ( $l=0.6873a$ ) との関係が、 $\alpha=\pi/6$  の扇形板に関するものとほぼ同様であることがわかる。

(2) 内外径比  $\mu$  の影響

開角  $\alpha=\pi/3, \nu=0.3$  とし、また円弧辺の境界条

件が S.S., C.S., S.C. および C.C. の4種の扇形板について、その内外径比  $\mu=b/a$  が定常振動に及ぼす影響を調べれば次のとおりである。すなわち、 $\mu$  の値を 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6 とした場合の  $\omega$ ,  $q$ ,  $s$  の値を算出すれば各場合に於じて Table 2 に示すごとくえられる。かかる諸量を用いて、式 (12) から  $pa^4/Eh^4$  をパラメーターとして応答曲線がえられることとなる。Table 2 より自由振動の影響係数  $q$  は S.S. の場合には  $\mu$  の変化に殆んど無関係であるが、他の境界条件の場合には  $\mu$  が増大するに伴なって減少することがわかる。また、第3項の係数  $s$  はいずれの境界条件の場合も  $\mu$  が増大するにつれて減少する。これより、 $pa^4/Eh^4 = 0$  なる自由振動の背骨曲線は S.S. の場合を除けば、 $\mu$  の増大とともに、その傾きが緩やかになり、 $pa^4/Eh^4 \neq 0$  なる応答曲線はいずれの境界条件についても  $\mu$  の値が増大すれば、応答振幅が減少し自由振動の背骨曲線に漸近するといえる。

Table 2

	$\mu$	$\omega$	$q$	$s$
S.S.	1/6	40.12	1.1310	$1.1083_{10}^{-2}$
	2/6	42.98	1.1304	$1.9600_{10}^{-2}$
	3/6	55.96	1.1115	$0.5657_{10}^{-2}$
	4/6	102.17	1.1124	$0.1697_{10}^{-2}$
	5/6	366.34	1.1212	$0.0132_{10}^{-2}$
C.S.	1/6	40.67	1.0942	$1.0783_{10}^{-2}$
	2/6	47.76	0.9386	$0.7823_{10}^{-2}$
	3/6	71.11	0.7677	$0.3541_{10}^{-2}$
	4/6	145.40	0.6484	$0.0849_{10}^{-2}$
	5/6	558.81	0.5820	$0.0058_{10}^{-2}$
S.C.	1/6	51.34	0.6986	$0.6934_{10}^{-2}$
	2/6	56.48	0.6581	$0.5701_{10}^{-2}$
	3/6	78.18	0.5941	$0.2973_{10}^{-2}$
	4/6	152.30	0.5535	$0.0782_{10}^{-2}$
	5/6	568.37	0.5409	$0.0056_{10}^{-2}$
C.C.	1/6	52.28	0.6626	$0.6690_{10}^{-2}$
	2/6	63.64	0.5136	$0.4520_{10}^{-2}$
	3/6	98.92	0.3840	$0.1873_{10}^{-2}$
	4/6	208.55	0.3111	$0.0422_{10}^{-2}$
	5/6	811.21	0.2782	$0.0028_{10}^{-2}$

S.S. および C.C. の場合 ( $\mu=1/6, 2/6$ ) の応答曲線を Fig.4 (a)~(d) に示した。

(3) 開角  $\alpha$  の影響

前項と同様に、4種の境界条件を有する扇形板において、 $\mu=1/2, \nu=0.3$  として  $\alpha$  の各値に対する諸量  $\omega, q, s$  を求めれば Table 3 のごとくである。係数  $q$  は S.S. の場合には開角  $\alpha$  の影響を受けないが、他の境界条件の場合には開角  $\alpha$  が増大するにつれて減少し、また係数  $s$  は開角  $\alpha$  が増大するにつれて増加する。したがって、S.S. 以外の境界条件の自由振動の背骨曲線は開角  $\alpha$  が増大するにつれて、その傾きが緩やかになり非線形項の影響が減少するが、 $pa^4/Eh^4 \neq 0$  に対する応答曲線はいずれの境界条件をもつ扇形板に対しても  $\alpha$  が増すにつれて、変形が大きくなり、背骨曲線からのへだたりが増加する。なお、S.S. および C.C. の場合 ( $\alpha=\pi/4, \pi/2$ ) の応答曲線を Fig.5 (a)~(d) に示した。

Table 3

	$\alpha$	$\omega$	$q$	$s$
S.S.	$\pi/6$	103.44	1.1232	$0.1660_{10}^{-2}$
	$\pi/4$	68.38	1.1237	$0.3788_{10}^{-2}$
	$\pi/3$	55.96	1.1115	$0.5657_{10}^{-2}$
	$\pi/2$	47.09	1.1237	$0.7988_{10}^{-2}$
C.S.	$\pi/6$	110.75	0.9661	$0.1458_{10}^{-2}$
	$\pi/4$	80.80	0.8466	$0.2741_{10}^{-2}$
	$\pi/3$	71.11	0.7677	$0.3541_{10}^{-2}$
	$\pi/2$	64.63	0.6881	$0.4289_{10}^{-2}$
S.C.	$\pi/6$	124.31	0.7779	$0.1171_{10}^{-2}$
	$\pi/4$	89.86	0.6646	$0.2246_{10}^{-2}$
	$\pi/3$	78.18	0.5941	$0.2973_{10}^{-2}$
C.C.	$\pi/2$	70.14	0.5277	$0.3701_{10}^{-2}$
	$\pi/6$	135.60	0.6294	$0.0992_{10}^{-2}$
	$\pi/4$	107.57	0.4646	$0.1582_{10}^{-2}$
	$\pi/3$	98.92	0.3840	$0.1873_{10}^{-2}$
	$\pi/2$	93.32	0.3193	$0.2107_{10}^{-2}$

扇形板の非線形強制振動

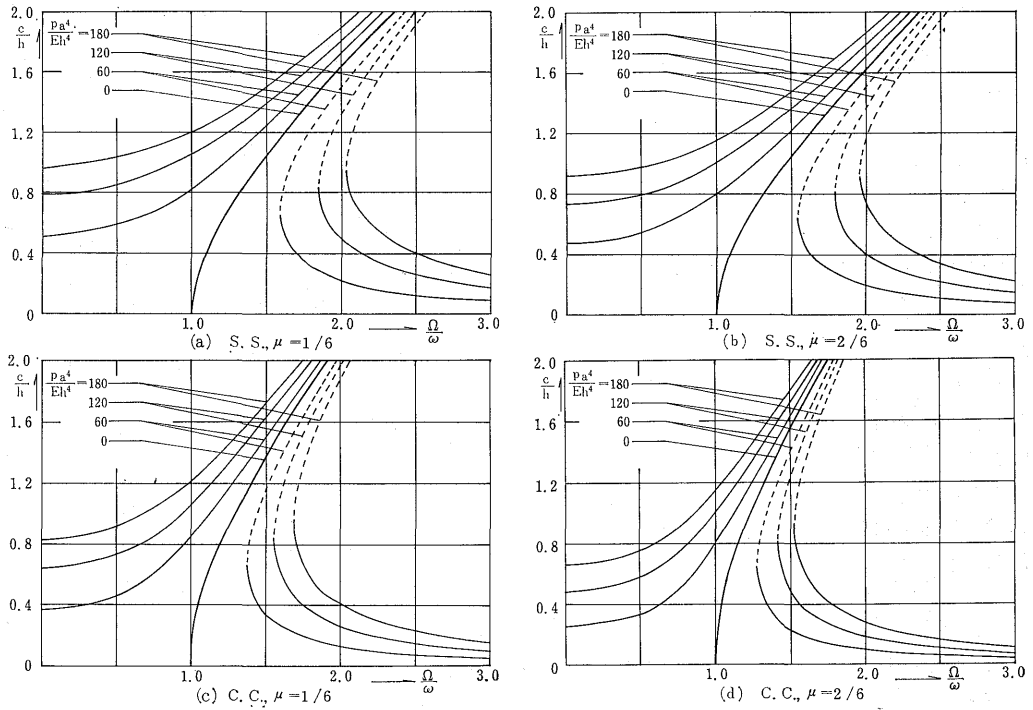


Fig. 4

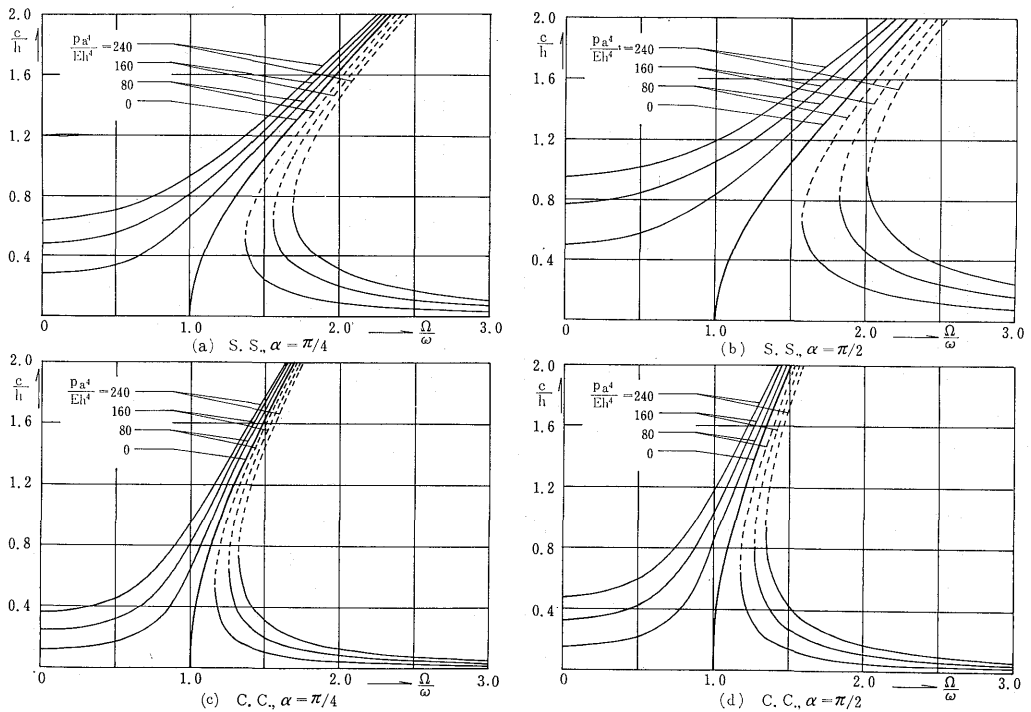


Fig. 5

4. 静的曲げに関する有限変形問題

式(9)に  $F=0$ ,  $F=1$  および  $\cos \Omega t=1$  を代入すれば, 一様圧力を受ける扇形板の近似的な有限変形問題の基礎式がえられ, これより最大たわみ  $c/h$  と荷重強度  $pa^4/Eh^4$  との関係が次のごとく算定されることになる。

$$\frac{pa^4}{Eh^4} = k_1 \frac{c}{h} + k_3 \frac{c^3}{h^3} \quad (21)$$

ここに  $k_1 = \frac{k_4 \pi}{48(1-\nu^2)} \frac{\eta}{\lambda}$

$$k_3 = \frac{k_4 \pi}{48(1-\mu^2)(1-\nu^2)} \frac{\varphi^2}{\lambda}$$

(1) 境界条件の影響および解の精度の検討

Fig.2(a) に示す扇形板の各々の境界条件に対して, 式(21)の右辺の係数  $k_1, k_3$  の値を求めれば, それぞれ Table 4 のごとくえられ, これらの諸値を用いて最大たわみ  $c/h$  と荷重強度  $pa^4/Eh^4$  との関係を求め, プロットすれば, Fig.6 に示すごとくえられる。図において直線群 I は各境界条件に応ずる線形解すなわち微小変形理論に基づく解を示し, また曲線群 II は有限変形理論に基づく解を示すものである。図より明

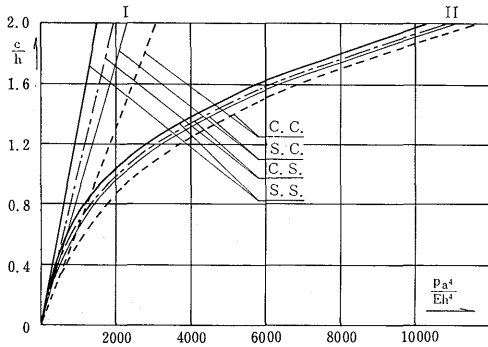


Fig. 6

らかなごとく, たわみの大きさが板厚と同程度になると有限変形の影響が顕著となることがわかり, かかる場合にはもはや微小変形理論を用いることには無理があることが数値的に立証される。なお, Fig.2(b) の正方形板の解を示せば Table 4 に併記するとき結果をうる。これより S.S. および C.C. の場合には扇形板の有限変形の荷重曲線が正方形板のそれとほぼ完全に合致するが, C.S. および S.C. の場合には扇形板の特性が現われることは前述の非線形振動の場合と同様である。

なお, Berger の有限変形理論に基づく近似解の妥当性を吟味するために, 一辺の長さが  $l$  の周辺単純支持正方形板 ( $\nu=0.316$ ) に対して各種の解析結果を比較すれば次のとおりである。すなわち, N.Yamaki<sup>2)</sup> は Kármán の有限変形理論に基づいて, 板のたわみ関数を境界条件を満足する三角関数に仮定し, 応力関数をフーリエ級数に展開して解析のうえ, 8項まで採用した解をえ, また, K.T. Sandara Raja Iyengar および M. Matin Maqvi<sup>11)</sup> はたわみ関数および応力関数をはりの曲げ振動に由来する直交関数系を用いて解き, 第1項の近似解を求めている。さらに, 簡便法として, 既知の板の微小変形理論と膜理論との解を組合わせた解法<sup>12)</sup>がある。これらの結果を示せば式(22)のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \text{著者: } p l^4/Eh^4 &= 22.25c/h + 33.38c^3/h^3 \\ \text{文献(2): } p l^4/Eh^4 &= 22.25c/h + 29.47c^3/h^3 \\ \text{文献(11): } p l^4/Eh^4 &= 21.92c/h + 29.63c^3/h^3 \\ \text{文献(12): } p l^4/Eh^4 &= 22.80c/h + 32.29c^3/h^3 \end{aligned} \right\} (22)$$

これより, 本論文は Berger の近似式に基づく第1項近似解であるにも拘わらず, 他の近似解とかなりよく一致していることがわかる。

(2) 内外径比および開角の影響

Table 4

		ring sector plate		square plate	
		$k_1$	$k_3$	$k_1$	$k_3$
(a)	S.S.	746.43	1120.98	742.30	1113.35
	C.S.	969.88	1131.53	1053.18	1117.36
	S.C.	1144.05	1111.22		
	C.C.	1546.69	1080.38	1546.73	1074.80
(b)	S.S.	100.75	152.18	98.62	147.94
	C.S.	120.01	153.88	139.93	148.45
	S.C.	167.84	149.05		
	C.C.	205.40	146.05	205.50	142.80



前項3(2)と同じ4種の扇形板について、その内外径比  $\mu$  が板の有限変形の曲げに及ぼす影響を調べるために、 $\mu$  の各値に対して、式(21)の係数  $k_1, k_3$  の値を求めれば、Table 5の結果をうる。これより、 $\mu=1/6, 2/6, 3/6, 4/6$  の各値に対して S.S. の場合の最大たわみ  $c/h$  と荷重強度  $pa^4/Eh^4$  との関係性を求めれば、Fig.7がえられる。さらに3(3)と同

Table 5

	$\mu$	$k_1$	$k_3$
S.S.	1/6	90.23	136.07
	2/6	104.16	156.99
	3/6	176.76	261.96
	4/6	589.44	874.26
	5/6	7580.21	11331.95
C.S.	1/6	92.74	135.30
	2/6	127.83	159.98
	3/6	282.39	289.06
	4/6	1177.21	1017.74
S.C.	1/6	144.21	134.34
	2/6	175.40	153.90
	3/6	336.36	266.44
	4/6	1746.86	1289.14
	5/6	17859.70	12881.32
C.C.	1/6	149.49	132.07
	2/6	221.22	151.48
	3/6	533.83	273.32
	4/6	2370.90	983.40
	5/6	35873.65	13309.09

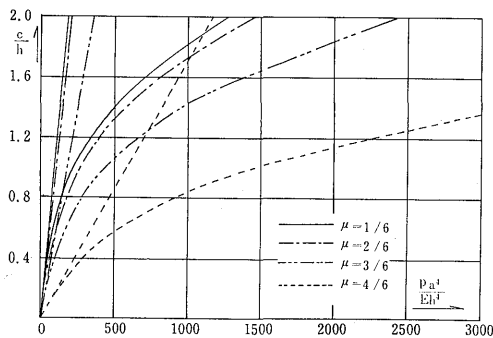


Fig. 7

様に、扇形板の開角  $\alpha$  を変化させた場合の  $k_1, k_3$  の値を求めれば、Table 6の結果がえられ、S.S. の場合について  $c/h - pa^4/Eh^4$  曲線を求めれば Fig.8に示すごとくである。

Table 6

	$\alpha$	$k_1$	$k_3$
S.S.	$\pi/6$	602.42	902.19
	$\pi/4$	263.98	395.50
	$\pi/3$	176.76	261.96
	$\pi/2$	125.11	182.33
C.S.	$\pi/6$	685.65	883.18
	$\pi/4$	364.83	411.81
	$\pi/3$	282.39	289.06
	$\pi/2$	233.18	213.95
S.C.	$\pi/6$	854.17	885.99
	$\pi/4$	445.24	394.52
	$\pi/3$	336.36	266.44
	$\pi/2$	270.20	190.11
C.C.	$\pi/6$	1007.60	845.56
	$\pi/4$	632.05	391.56
	$\pi/3$	533.83	273.32
	$\pi/2$	474.51	202.03

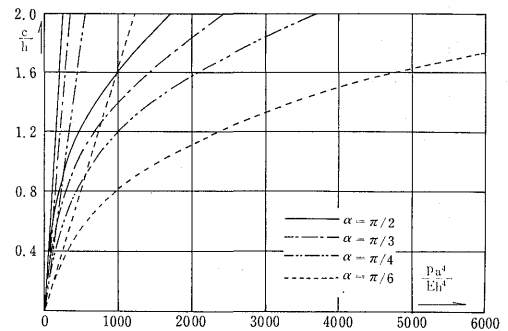


Fig. 8

5. 結 語

本論文では、前報(7)の続報として、開角が  $90^\circ$  以下の扇形板について、その非線形強制振動特性および静的な有限変形の曲げを考察したが、その結果を要約すれば、次のごとくである。

- (1) ガラーキンの第1項近似解法によれば、扇形

板の非線形振動特性は Duffing の硬化バネのそれと一致する。

(2) 振幅比が増大すれば非線形項の影響が顕著となるが, 4種の境界条件の異なる扇形板について,  $pa^4/Eh^4$  をパラメーターとして, 応答曲線を求めたところ, S.S., C.S., S.C., C.C. の順に非線形項の影響が減少し, 応答変位も減少することがわかった。

(3) 扇形板と正方形板とを比較した結果, S.S. および C.C. の場合には, 線形自由振動 (Table 1 の  $\omega$ ) のみならず, 非線形自由, 強制振動 (Table 1 の  $q, s$ ) および静的曲げ (Table 6) についても, 両者がほぼ完全に合致するが, S.C. および C.S. の場合には扇形板の特性が現われ, 正方形板のそれは S.C. および C.S. 両扇形板の平均的値となる (Table 1, 6) といえる。

(4) S.S. の場合の扇形板の非線形自由振動特性は扇形板の形状パラメーターである内外径比および開角の大きさに無関係であるが (Table 2, 3), 扇形板の強制振動問題ではこれらの影響を受ける。

(5) 扇形板の静的曲げ問題を近似的に解析のうえ, 周辺が単純支持される正方形板について既往の結果と比較したところ, 実用的に十分な精度で合致することがわかり, Berger 式に基づくガラーキンの第1項近似による解析の妥当性が確認された。

本論文の数値計算には, 九州大学の大型計算機 FACOM 230-60 および本学の電子計算機 270-20 を使用したことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) L.W. Lassiter and R.W. Hess ; Calculated and Measured Stresses in Simple Panels Subjected to Intense Random Acoustic Loading Including the Near Noise Field of a Turbojet Engine, NACA Report 1367, 1957
- 2) N. Yamaki ; Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, Z. angew. Math. Mech., Vol.41 (1961)
- 3) J.G. Easley ; Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular Plates, Z. angew. Math. Phys., Vol 15 (1964)
- 4) Y.K.Lin ; Response of a Nonlinear Flat Panel to Periodic and Randomly-Varying Loadings, J. Aerospace Sci., Vol. 29 (1962)
- 5) H. M. Berger ; A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, J. Appl. Mech., Vol. 22 (1955)
- 6) A. V. Srinivasan ; Nonlinear Vibrations of Beams and Plates, Int. J. Nonlinear Mech., Vol. 1 (1966)
- 7) 樗木・高橋; 扇形板の非線形自由振動, 九大工学集報, 第43巻, 第4号 (昭和45年6月)
- 8) Thein Wah ; Vibration of Circular Plates at Large Amplitudes, J. Engng, Mech. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 89 (1963)
- 9) 山崎・樗木・金子; 扇形板の自由振動解析 九大工学集報, 第42巻, 第4号 (昭和44年8月)
- 10) J.J. Stoker ; Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, New York, 1950, Interscience Publishers
- 11) K. T. Sundara Raja Iyengar and M. Matin Naqvi Large Deflections of Rectangular Plates, Int. J. Non-linear Mech., Vol. 1 (1966)
- 12) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger ; Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, 1959, Mc Graw-Hill Co.