周辺単純支持直交異方性無梁板構造の自由振動

高　橋　和　雄*，樗　木　　武**

Free Vibrations of Orthotropic Flat Slabs Simply Supported along Periphery

by

Kazuo TAKAHASHI
(Structural Engineering)

and Takeshi CHISYAKI
(Depertment of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu University)

Summary

The analytical investigation on the free vibrations of orthotropic flat slabs simply supported along periphery, rigidly connected to interior supporting columns located arbitarily is reported in this paper.

The effect of the columns on the free vibrations of the plate is taken into account by replacing the columns with their restraining forces acting on the plate so that continuity of plate-column system is preserved, and this problem of vibrations of orthotropic flat slabs is strictly solved based on the fundamental differential equation for the orthotropic plate, the theory of which is applied to the reinforced concrete slab due to M. T. Huber.

As examples, simply supported rectangular plates with one and two interior supported columns are illustrated, and the effect of the difference of the reinforcement in the directions x and y, the stiffness of the columns and the aspect ratio of the plate on the eigenvalues of these numerical examples are presented.

1．緒　言

平板が中間で支点または柱などで直接支持される構造はいわゆる無梁板構造と呼ばれるものであり，高架橋や地下鉄駅部などの土木構造，あるいは駐車場やポーチ，倉庫，工場などの建築構造として広く活用されている．周知のように，無梁板構造は垂直荷重を受ける場合には有利であり，板・はり・柱の三者からなる複合構造に勝るとも劣らない経済的・合理的な設計が可能である．しかしながら，振動に関しては一概に有利とはいいがたく，特に我国のように地震力が設計の重要な因子となる場合や，工場，橋梁などにおける床組として重量の大きい振動体や移動荷重を支える場合には，必ずしも経済的かつ合理的な構造になりうるとは限らない．このため，無梁板構造を実用に供するに先立ち振動問題について解明し詳細に吟味検討することは，その設計上きわめて重要であることは当然である．

無梁板構造の振動に関しては これまで 堯天[1]，W. Nowacki[2]，P. P. Lynn and N. Kambasar[3] および著者らの研究[4]がある．すなわち，堯天は無限の拡がりをもつ無梁板構造を，等価梁幅を有する無限長連続ばりに置換のうえ，自由振動周期を算出しており，W.Nowacki は周辺単純支持矩形板が点支持される無梁板構造の自由振動を，また P. P. Lynn らは点支持の代わりに正方形断面の柱で支持される場合の自由振動をそれぞれ論じている．さらに，著者らは著者の1人が無梁板構造の解法として確立した基本系法[5]を用いて，周辺にて単純支持され，かつ中間にて点支持される無梁板構造の固有値およびモードの算定

*　構造工学科
**　九州大学工学部土木工学科

法を提案するとともに，本構造が連続板に比べて必ずしも有利でないことを理論的に解明している．

しかしながら，これらの諸研究はいずれも等方性無梁板構造を対象としてその振動問題を取り扱っているに過ぎない。一方，現実に見受けられる無梁板構造における板は，直角二方向の剛度が異なる鉄筋コンクリートスラブで構成されており，厳密には直交異方性無梁板構造と見なすべきである．

以上の所論から，著者らは直交異方性無梁板構造の振動問題も厳密に解明し，各種の吟味・検討を加えんとするもので，その第一報としてすでに点支持される直交異方性無梁板構造の自由振動問題を論じた[6]．つづいて，本論文は，全周辺が単純支持されかつ任意配列の柱で剛結支持される直交異方性無梁板構造の自由振動問題の解法を提案するものである。

なお，解析にあたっては次の諸事項を仮定する．

（1）板は直交異方性矩形板とする．板の剛度に関して鉄筋コンクリートフラブに関する Huber の式[7]が適用できるものとする．

（2）柱は直線部材のみを考え，板面に対して直角に剛結されているものとする．また，柱の断面は矩形とし，その1辺が板の辺に平行となるように配列されているものとする．

（3）柱断面にもとづく剛域の影響は無視する．

（4）板から柱には垂直反力および x，y 両方向の反力モーメントのみが伝えられるものとする．

（5）変形は微小と考える．また板に対して薄板理論が適用できるものとする．

（6）板から柱に伝えられる垂直反力は，柱断面全域にわたって等分布するような応力を生じ，x，y 両方向の反力モーメントは，それぞれのモーメントの方向に対して柱幅全域にわたって三角形分布し，これと直角方向には等分布するような応力を生ずるものとする．

2．解　法

（1）規準関数の誘導　　規準ＡＢＣＤにおいて，Fig．1 に示すような直交座標系（x，y，z）を導入する．板は周辺の他に中間において柱で支持されているものとし，各支柱にそれぞれ 11，12，……，1s，21，22，…，2s，…，ij，…，kq，…，r1，r2，…，rs からなる柱番号を付す．また，柱 ij の座標値を（ξ_{ia}，η_{jb}）とする．

矩形板が振動すれば，各中間柱には当然ながら，垂直反力および x，y 方向の反力モーメントを生ずるが，これらは矩形板の振動変位を拘束する一種の強制力とみなすことができ，一般に中間支柱の座標値（x，y）

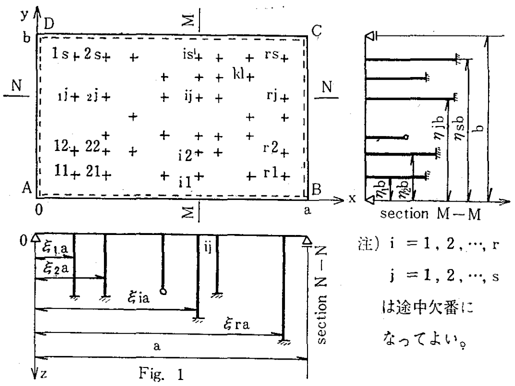


Fig. 1

と時間 t の関数 q（x，y，t）で与えられる．このとき，本題の直交異方性梁板構造の自由振動は，周辺が単純支持される直交異方性矩形板に強制力 q(x,y,t) が作用する強制振動とみなすことができ，その基礎微分方程式は次式で与えられる．

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\,(x,\ y,\ t) \qquad (1)$$

ここに，$D_x=E_xh^3/\{12\,(1-\nu_x{}^2)\}$，$D_y=E_yh^3/\{12\,(1-\nu_y{}^2)\}$，x，y 方向の板剛度，$H=\sqrt{D_x\cdot D_y}$（Huberの式），$E_x$，$E_y$；x，y 方向のヤング率，$\nu_x$，$\nu_y$；x，y 方向のポアソン比，h；板厚，$\rho$；密度，w；板の垂直たわみ

式（1）の一般解はその斉次方程式からえられる余関数 w_1 と特殊解 w_0 の和で与えられるが，w_1として次式を仮定する．

$$w_1=W_1\ \sin\,(\omega t+\varepsilon)=(X\ \sin N\,\pi\eta+Y\ \sin M\,\pi\xi)\sin\,(\omega t+\varepsilon) \qquad (2)$$

ここに，ω；固有円振動数，ε；初期位相角，M，N；1，2.…，X: ξ のみの関数，Y；η のみの関数，$\xi=x/a$，$\eta=y/b$

式（2）を式（1）に代入すれば，次の2式をうる．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^4 X}{\partial\xi^4}-2\sqrt{\chi}\left(\frac{N\pi}{\mu}\right)^2\frac{\partial^2 X}{\partial\xi^2}+\left\{\chi\left(\frac{N\pi}{\mu}\right)^4-\lambda^4\right\}X=0\\&\frac{\partial^4 Y}{\partial\eta^4}-2\frac{1}{\sqrt{\chi}}(\mu M\pi)^2\frac{\partial^2 Y}{\partial\eta^2}+\left\{\frac{1}{\chi}(\mu M\pi)^4-\frac{1}{\chi}\mu^4\lambda^4\right\}Y=0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここに，$\chi=D_y/D_x$（剛比），$\mu=b/a$（辺長比），$\lambda=a\sqrt[4]{\rho h\omega^2/D_x}$（固有値）

式（3）の各式から λ の各値に応じて一般 X，Yがそれぞれ3種類求まり次のようにえられる．

X；

（1） $\sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2-\lambda^2>0$ の場合

$$X=Ax\sinh R_1\xi+Bx\cosh R_1\xi+Cx\sinh K_1\xi+Dx\cosh K_1\xi$$

（2） $\sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2-\lambda^2=0$ の場合

$$X=Ax+Bx\xi+Cx\sin\sqrt{2}M\pi/\mu\xi+Dx\cosh\sqrt{2}M\pi/\mu\xi$$

（3） $\sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2-\lambda^2<0$ の場合

$$X=Ax\sin S_1\xi+Bx\cos S_1\xi+Cx\sinh K_1\xi+Dx\cosh K_1\xi$$

Y；

（1） $(M\pi)^2-\lambda^2>0$ の場合

$$Y=Ay\sinh R_2\eta+By\cosh R_2\eta+Cy\sinh K_2\eta+Dy\cosh K_2\eta$$

（2） $(M\pi)^2-\lambda^2=0$ の場合

$$Y=Ay+By\eta+Cy\sinh\sqrt{2}M\pi\mu\eta+Dy\cosh\sqrt{2}M\pi\mu\eta$$

（3） $(M\pi)^2-\lambda^2<0$ の場合

$$Y=Ay\sin S_2\eta+By\cos S_2\eta+Cy\sinh K_2\eta+Dy\cosh K_2\eta \qquad (4)$$

ここに，$K_1=\sqrt{\lambda^2+\sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2}$,

$S_1=\sqrt{\lambda^2-\sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2}$,

$R_1=\sqrt{-\lambda^2+\sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2}$

$K_2=\mu\sqrt{\lambda^2/\chi+(M\pi)^2/\sqrt{\chi}}$,

$S_2=\mu\sqrt{\lambda^2/\chi-(M\pi)^2/\sqrt{\chi}}$,

$R_2=\mu\sqrt{-\lambda^2/\chi+(M\pi)^2/\sqrt{\chi}}$,

Ax～Dx，Ay～Dy 積分定数

他方，単に周辺のみで単純支持される矩形板の自由振動に関して，周辺の境界条件を満足する変位 w を

$$W=A\sin M\pi\xi\sin N\pi\eta \qquad (5)$$

と仮定するとき， 固有値 $\lambda=\lambda_0$ は周知のように次式で与えられる.

$$\lambda_2^0=\pi^2\{M^2+\sqrt{\chi}(N/\mu)^2\} \qquad (6)$$

上式におけるM，Nは1またはそれより大きな自然数であるから，右辺の｛ ｝内は次の不等式を満足する.

$$M^2+\sqrt{\chi}(N/\mu)^2>M^2 \text{ および }$$
$$M^2+\sqrt{\chi}(N/\mu)^2>\sqrt{\chi}(N/\mu)^2 \qquad (7)$$

上式に式（6）を代入すれば

$$(M\pi)^2<\lambda_0^2 \text{ および } \sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2<\lambda_0^2 \qquad (8)$$

本題の無梁板は周辺で単純支持されるうえに，中間でも柱支持されるから，単に周辺のみで単純支持されるから，単に周辺のみで単純支持される矩形板のそれよりも構造的に剛であり，したがって，その固有値 λ の初期値は単純支持矩形板のそれより大きいかまたは等しいかのいずれかとなることが容易に推察でき，この事実と式（8） から λ に関する次の不等式が成立する.

$$(M\pi)^2-\lambda^2<0,\ \sqrt{\chi}(N\pi/\mu)^2-\lambda^2<0$$

式（4）に示すように，X，Yに関してそれぞれ3種類の解がえられたが，この不等式を考慮すれば，X，Yともに（3）の場合のみが物理的意義を持ち，結局余関数 w_1 が次の1式のみで表わされることになる.

$$w_1=\{(Ax\sin S_1\xi+Bx\cos S_1\xi+Cx\sinh K_1\xi+Dx\cosh K_1\xi)\sin N\pi\eta+(Ay\sin S_2\eta+By\cos S_2\eta+Cy\sinh K_2\eta+Dy\cosh K_2\eta)\sin M\pi\xi\}\sin(\omega t+\varepsilon) \qquad (10)$$

次に特殊解を w_0 次のように誘導する． すなわち，柱 ij の垂直反力を V'_{ij}，x，y 方向の反力モーメントを $M_{ij}^{x'}$，$M_{ij}^{y'}$ とすれば， これらは一般に t の関数であるが，板の変位がその全領域にわたって零である場合には当然ながら全ての支承反力も零でなければならないから，次のように，変位 w と同じ時間 t の周期関数を仮定することができる.

$$V'_{ij}=V_{ij}\sin(\omega t+\varepsilon)$$
$$M_{ij}^{x'}=M_{ij}^{x}\sin(\omega t+\varepsilon) \qquad (10)$$
$$M_{ij}^{y'}=M_{ij}^{y}\sin(\omega t+\varepsilon)$$

ここに，i=1，2，…，r；j=1，2，…，s

式（10）の V_{ij}，M_{ij}^x，M_{ij}^y はそれぞれ対応する垂直反力および反力モーメントの最大値であり，これらを仮定（6）にもとづいて二重正弦フーリェ級数に展開すれば，それぞれ次のように算定される.

$$\{V_{ij}\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}^{ij}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$
$$\{M_{ij}^x\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}^{xij}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$
$$\{M_{ij}^y\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}^{yij}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \qquad (11)$$

ここに，$F_{mn}^{ij}=\frac{4}{ab}V_{ij}\Gamma_{ij}(m,n)\sin m\pi\xi_i\sin n\pi\eta_j$

$$\Gamma_{ij}(m,n)=\frac{1}{\pi^2 mn}\sin m\pi u_{ij}\sin n\pi u_{ij}$$

$$F_{mn}^{xij}=-\frac{4}{a^2b}M_{ij}^{x}\Gamma_{ij}^{x}(m,n)\cos m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j$$

$$\Gamma_{ij}^{x}(m,n)=\frac{3}{\pi^2u^2ijv_{ij}mn}\left(\frac{\sin m\pi u_{ij}}{m\pi u_{ij}}-\cos m\pi u_{ij}\right)\sin n\pi v_{ij}$$

$$F_{mn}^{yij}=-\frac{4}{ab^2}M_{ij}^{y}\Gamma_{ij}^{y}(m,n)\sin m\pi\xi i \cos n\pi\eta_j$$

$$\Gamma_{ij}^{y}(m,n)=\frac{3}{\pi^2u_{ij}vij^2mn}\left(\frac{\sin n\pi v_{ij}}{n\pi v_{ij}}-\cos n\pi v_{ij}\right)\sin m\pi u_{ji}$$

$2u_{ij}a$, $2v_{ij}b$；柱の x，y 方向の幅，$\{V_{ij}\}$，$\{M_{ji}^{x}\}$ および $\{M_{ij}^{y}\}$ は V_{ij}，M_{ij}^{x}およびM_{ij}^{y} の級数展開を意味し，〔FL^{-2}〕なる次元をもつ．

式（1）の右辺の q(x，y，t) は板に作用する全強制力であり，本題の無梁板構造では柱反力の総和で与えられる．すなわち式（11）を式（10）に代入してえられる結果を全ての i，j について加え合わせれば，q(x，y，t) が次のようにえられる．

$$q(x,y,t)=-\frac{4}{\mu a^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\{V_{ij}\Gamma_{ij}(m,n)\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j-\frac{1}{a}M_{ij}^{x}\Gamma_{ij}^{x}(m,n)\cos m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j-\frac{1}{b}M_{ij}^{y}\Gamma_{ij}^{y}(m,n)\sin m\pi\xi_i \cos n\pi\eta_j\}\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \sin(\omega t+\varepsilon) \tag{12}$$

他方，特殊解 w_0 とてし次式を仮定する．

$$w_0=W_0\sin(\omega t+\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Gmn\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \sin(\omega t+\varepsilon) \tag{13}$$

ここに，Gmn，任意定数

式（12）および式（13）を式（1）に代入すれば，任意定数 Gmn が求められ次のようである．

$$Gmn=-\frac{4a^2}{\mu D}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{Kmn}\{V_{ij}\Gamma_{ij}(m,n)\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j-\frac{1}{a}M_{ij}^{x}\Gamma_{ij}^{x}(m,n)\cos m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j-\frac{1}{b}M_{ij}^{y}\Gamma_{ij}^{y}(m,n)\sin m\pi\xi_i \cos n\pi\eta_j\} \tag{14}$$

ここに，$Kmn=\pi^4\{m^2+\sqrt{\chi}(n/\mu)^2\}^2-\lambda^4$

前式を式（13）に再度代入してえられる結果と式(10)とを加え合わせれば，式（1）の一般解 w したがって無梁板の規準関数 $W=(W_0+W_1)$ が次のように求められることになる．

$$W=(Ax\sin S_1\xi+Bx\cos S_1\xi+Cx\sinh K_1\xi+Dx\cosh K_1\xi)\sin N\pi\eta+(Ay\sin S_2\eta+By\cos S_2\eta+Cy\sinh K_2\eta+Dy\cosh K_2\eta)\sin M\pi\xi-\frac{4a^2}{\mu D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{Kmn}\{V_{ij}\Gamma_{ij}(m,n)\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j-\frac{1}{a}M_{ij}^{x}\Gamma_{ij}^{x}(m,n)\cos m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j-\frac{1}{b}M_{ij}^{y}\Gamma_{ij}^{y}(m,n)\sin m\pi\xi_i \cos n\pi\eta_j\}\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \tag{15}$$

なお，上式において，$\chi=1.0$（すなわち $Dx=Dy=D$ および $\nu x=\nu y=\nu$ とすれば，等方性無梁板の規準関数がえられるが，このことは剛度Hに関してHuberの式を用いた当然の帰結である．

特例として，柱の反力モーメントを無視し，かつ柱の幅 u_{ij}，v_{ij} が零となる極限状態を考えれば，点支持される直交異方性無梁板の規準関数がえられ，著者らが先に求めた文献(6)の結果に合致する．

$$W=(Ax\sin S_1\xi+Bx\cos S_1\xi+Cx\sinh K_1\xi+Dx\cosh K_1\xi)\sin N\pi\eta+(Ay\sin S_2\eta+By\cos S_2\eta+Cy\sinh K_2\eta+Dy\cosh K_2\eta)\sin M\pi\xi-\frac{4a^2}{\mu D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{V_{ij}}{Kmn}\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \tag{16}$$

（2）振動数方程式の誘導

本題の無梁板構造は周辺で単純支持されているから，その境界条件を次のように書き表わすことができる．

$$\xi=0,\ 1\ で\quad X=0,\ \frac{d^2X}{d\xi^2}=0$$
$$\eta=0,\ 1\ で\quad Y=0,\ \frac{d^2Y}{d\eta^2}=0 \tag{17}$$

式（15）を式（17）に代入すれば次の連立方程式をうる．

$$\begin{bmatrix}((K_0{}^1)) & ((0))\\ ((0))_{44} & ((K_0{}^2))\end{bmatrix}\{Ax\ Bx\ Cx\ Dx\ Ay\ By\ Cy\ Dy\}_T=0 \tag{18}$$

ここに，

$$((K_0{}^1))=\begin{pmatrix}\sin S_1 & \cos S_1 & \sinh K_1 & \cosh K_1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -S_1{}^2\sin S_1 & -S_1{}^2\cos S_1 & K_1{}^2\sinh K_1 & K_1{}^2\cosh K_1\\ 0 & -S_1{}^2 & 0 & K_1{}^2\end{pmatrix}$$

$$((K_0{}^2))=\begin{pmatrix} \sin S_2 & \cos S_2 & \sinh K_2 & \cosh K_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -S_2{}^2\sin S_2 & -S_2{}^2\cos S_2 & K_2{}^2\sinh K_2 & K_2{}^2\cosh K_2 \\ 0 & -S_2{}^2 & 0 & K_2{}^2 \end{pmatrix}$$

$((0))_{44}$；4行4列の零行列，0；零列ベクトル

次に，無梁板構造の振動時における柱 kq の垂直変位をd'_{kq} とすれば，d'_{kq} は一般に時間 t の関数であり，板から柱に伝えられる垂直反力が零の場合には当然ながら d'_{kq} も零であり，V'_{kq} と同じ時間 t の周期関数となる．すなわち，

$$d'_{kq}=d_{kq}\sin(\omega t+\varepsilon) \tag{19}$$

垂直変位が作用反力に比例するものとし，その比例定数を $\bar{\gamma}$ と記号表示すれば，式 (19) は次のように書き改められる．

$$d'_{kq}-\bar{\gamma}_{kq}V_{kq}\sin(\omega t+\varepsilon) \tag{20}$$

ここに，$\bar{\gamma}_{kq}=d_{kq}/V_{kl}$

無梁板構造における板はその中間で柱にて支えられており，したがって，このような位置では板の垂直変位と柱のそれとが等しくなければならない．このことから次に示す一連の変形条件をうる．

$$W(\xi_k,\eta_l)-\bar{\gamma}_{kq}V_{kq}=0 \tag{21}$$

ここに，k=1，2，…，r；q=1，2，…，s

式 (21) に式 (15) を代入すれば，次のような連立方程式がえられる．

$$\left[((K^1_{ij}))\ ((K^2_{ij}))\ ((H_{ij}))\ ((H^x_{ij}))\ ((H^y_{ij}))\right]\mathbf{X}=\mathbf{O} \tag{22}$$

ここに，$\mathbf{X}=\{Ax\ Bx\ Cx\ Dx\ Ay\ By\ Cy\ Dy\ V_{11}\ V_{12}\cdots V_{kq}\cdots V_{rs}\ \mathbf{M}^x_{11}\ \mathbf{M}^x_{12}\cdots\mathbf{M}^x_{kq}\cdots\mathbf{M}^x_{rs}\ \mathbf{M}^y_{11}\ \mathbf{M}^y_{12}\cdots\mathbf{M}^y_{kq}\cdots\mathbf{M}^y_{rs}\}^T$

$$((K^1_{ij}))=\begin{pmatrix} \sin S_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_1 & \cos S_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_1 & \sinh K_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_1 & \cosh K_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_1 \\ \sin S_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_2 & \cos S_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_2 & \sinh K_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_2 & \cosh K_1\xi_1\ \sin N\pi\eta_2 \\ \hdashline \sin S_1\xi_i\ \sin N\pi\eta_j & \cos S_1\xi_i\ \sin N\pi\eta_j & \sinh K_1\xi_i\ \sin N\pi\eta_j & \cosh K_1\xi_i\ \sin N\pi\eta_j \\ \hdashline \sin S_1\xi_r\ \sin N\pi\eta_s & \cos S_1\xi_r\ \sin N\pi\eta_s & \sinh K_1\xi_r\ \sin N\pi\eta_s & \cosh K_1\xi_r\ \sin N\pi\eta_s \end{pmatrix}$$

$$((K^2_{ij}))=\begin{pmatrix} \sin M\pi\xi_1\ \sin S_2\eta_1 & \sin M\pi\xi_1\ \cos S_2\eta_1 & \sin M\pi\xi_1\ \sinh K_2\eta_1 & \sin M\pi\xi_1\ \cosh K_2\eta_1 \\ \sin M\pi\xi_1\ \sin S_2\eta_2 & \sin M\pi\xi_1\ \cos S_2\eta_2 & \sin M\pi\xi_1\ \sinh K_2\eta_2 & \sin M\pi\xi_1\ \cosh K_2\eta_2 \\ \hdashline \sin M\pi\xi_i\ \sin S_2\eta_j & \sin M\pi\xi_i\ \cos S_2\eta_j & \sin M\pi\xi_i\ \sinh K_2\eta_j & \sin M\pi\xi_i\ \cosh K_2\eta_j \\ \hdashline \sin M\pi\xi_r\ \sin S_2\eta_s & \sin M\pi\xi_r\ \cos S_2\eta_s & \sin M\pi\xi_r\ \sinh K_2\eta_s & \sin M\pi\xi_r\ \cosh K_2\eta_s \end{pmatrix}$$

$$((H_{ij}))=\begin{pmatrix} H^{11}_{11}+\Phi_{11} & H^{11}_{12} & \cdots\cdots & H^{11}_{ij} & \cdots\cdots & H^{11}_{rs} \\ H^{12}_{11} & H^{12}_{12}+\Phi_{12} & \cdots\cdots & H^{12}_{ij} & \cdots\cdots & H^{12}_{rs} \\ \hdashline H^{ij}_{11} & H^{ij}_{12} & \cdots\cdots & H^{ij}_{ij}+\Phi_{ij} & \cdots\cdots & H^{ij}_{rs} \\ \hdashline H^{rs}_{11} & H^{rs}_{12} & \cdots\cdots & H^{rs}_{ij} & \cdots\cdots & H^{rs}_{rs}+\Phi_{rs} \end{pmatrix}$$

$$((H^x_{ij}))=\begin{pmatrix} H^{x11}_{11} & H^{x11}_{12} & \cdots\cdots & H^{x11}_{ij} & \cdots\cdots & H^{x11}_{rs} \\ H^{x12}_{11} & H^{x12}_{12} & \cdots\cdots & H^{x12}_{ij} & \cdots\cdots & H^{x12}_{rs} \\ \hdashline H^{xij}_{11} & H^{xij}_{12} & \cdots\cdots & H^{xij}_{ij} & \cdots\cdots & H^{xij}_{rs} \\ \hdashline H^{xrs}_{11} & H^{xrs}_{12} & \cdots\cdots & H^{xrs}_{ij} & \cdots\cdots & H^{xrs}_{rs} \end{pmatrix}$$

$$((H^y_{ij}))=\begin{pmatrix} H^{y11}_{11} & H^{y11}_{12} & \cdots\cdots & H^{y11}_{ij} & \cdots\cdots & H^{y11}_{rs} \\ H^{y12}_{11} & H^{y12}_{12} & \cdots\cdots & H^{y12}_{ij} & \cdots\cdots & H^{y12}_{rs} \\ \hdashline H^{yij}_{11} & H^{yij}_{12} & \cdots\cdots & H^{yij}_{ij} & \cdots\cdots & H^{yij}_{rs} \\ \hdashline H^{yrs}_{11} & H^{yrs}_{12} & \cdots\cdots & H^{yrs}_{ij} & \cdots\cdots & H^{yrs}_{rs} \end{pmatrix}$$

$$H_{ij}^{kq}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K_{mn}}\Gamma_{ij}(m,n)\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j \sin m\pi\xi_k \sin n\pi\eta_q$$

$$H_{ij}^{xkq}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K_{mn}}\Gamma x_{ij}(m,\ n) \cos m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j \sin m\pi\xi_k \sin n\pi\eta_q$$

$$H_{ij}^{ykq}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K_{mn}}\Gamma_{ij}^{x}(m,n) \sin m\pi\xi i \cos n\pi\eta_j \sin m\pi\xi_k \sin n\pi\eta_q$$

$$V_{ij}=-\frac{4a^2}{\mu D}V_{ij},\ M_{ij}^{x}=\frac{4a}{\mu D}M_{ij}^{y},\ M_{ij}^{y}=\frac{4a}{\mu^2 D}M_{ij}^{y},$$

$$\Phi_{ij}=\frac{\mu D}{4a^2}\bar{\gamma}_{ij}$$

さらに，柱頭部とそれに直結する板の回転変位に関する連続条件を考慮すれば次のとおりである． 柱 kq の x および y 方向の柱頭回転角を $\theta_{kq}^{x'}$，$\theta_{kq}^{y'}$ とすればこれらは

$$\theta_{kq}^{x'}=\theta_{kq}^{x}\sin(\omega t+\varepsilon),\ \theta_{kq}^{y'}=\theta_{kq}^{y}\sin(\omega t+\varepsilon) \tag{23}$$

のように表わしうる．したがって，柱頭部の回転角に関して次の変形条件式が成立する．

$$\partial W(\xi k,\ \eta q)/\partial\xi=a\theta_{kq}^{x},\ \partial W(\xi k,\eta q)/\partial\eta=b\theta_{kq}^{y} \tag{24}$$

ここに，k=1, 2, …, r ; q=1, 2, …, s

他方，一様断面直線部材の振動たわみ角式は次のように表わされる[8]．

$$M_{AB}^{c}=\frac{EcIc}{lc}kc\{\alpha c\theta_A+\beta c\theta_B-\frac{1}{lc}(\gamma c\, d_B-\delta c\, d_A)\}$$

$$M_{BA}^{c}=\frac{EcIc}{lc}kc\{\beta c\theta_A+\alpha c\theta_B-\frac{1}{lc}(\delta c\, d_B-\gamma c\, d_A)\} \tag{25}$$

ここに $\alpha c=(\cosh kc \sin kc-\sinh kc \cos kc)/(1-\cosh kc \cos kc)$

$\beta c=\sinh kc-\sin kc)/(1-\cosh kc \cos kc)$

$\delta c=kc \sinh kc \sin kc/(1-\cosh kc \cos kc)$

$\gamma c=kc(\cosh kc-\cos kc)/(1-\cosh kc \cos kc)$,

$kc=lc\sqrt[4]{\rho c\, Ac\omega^2/EcIc}$,

Ec; 部材の弾性係数，Ic; 部材の慣性モーメント，lc; 部材長，Ac: 部材の断面積，ρc; 部材の密度，d_A，d_B，θ_A，θ_B，M_{AB}^{c}，M_{BA}^{c}; 部材 AB の A,B 端における最大変位，最大たわみ角，最大曲げモーメント

上式より柱の反力モーメント M_{kq}^{x}，M_{kq}^{y} と柱頭回転角 θ_{kq}^{x}，θ_{kq}^{y} との関係を求めれば，結局次のように算定される．

$$a\theta_{kq}^{x}=-\Lambda_{kq}^{x}M_{kq}^{x},\quad b\theta_{kq}^{y}=-\Lambda_{kq}^{y}M_{kq}^{y} \tag{26}$$

ここに，Λ_{kq}^{x}，Λ_{kq}^{y} は次表のとおりである．

Table. 1

	柱下端が固定の場合	柱下端がヒンジの場合
Λ_{kq}^{x}	$\dfrac{\mu}{4\bar{K}_{kq}^{x}k_{kq}^{x}\alpha_{kq}^{x}}$	$\dfrac{\mu\alpha_{kq}^{x}}{8\delta_{kq}^{x}\bar{K}_{kq}^{x}}$
Λ_{kq}^{y}	$\dfrac{\mu^3}{4\bar{K}_{kq}^{y}k_{kq}^{y}\alpha_{kq}^{y}}$	$\dfrac{\mu^3\alpha_{kq}^{y}}{8\delta_{kq}^{y}\bar{K}_{kq}^{y}}$

$$\bar{K}_{kq}^{x}=\frac{E_{kq}^{x}I_{kq}^{x}/l_{kq}}{Dx},\quad \bar{K}_{kq}^{y}=\frac{E_{kq}^{y}I_{kq}^{y}/l_{kq}}{Dx}$$

$$k_{kq}^{x}=l_{kq}\sqrt[4]{\rho_{kq}A_{kq}\omega^2/E_{kq}^{x}I_{kq}^{x}},\quad k_{kq}^{y}=l_{kq}\sqrt[4]{\rho_{kq}A_{kq}\omega^2/E_{kq}^{y}I_{kq}^{y}}$$

α_{kq}^{x}，α_{kq}^{y}，δ_{kq}^{x}，δ_{kq}^{y}，式(25)に示す α_c，δ_c において k_c の代わりに，k_{kq}^{x}，k_{kq}^{y} を用いてえられる結果を示す。

式 (15) および式 (26) を式 (24) に代入することにより次の一連の方程式がえられる．

$$\begin{array}{l}[((K_{ij}^{x1}))\ ((K_{ij}^{x2}))\ ((O_{ij}))\ ((O_{ij}^{x}))\ ((O_{ij}^{y}))]\cdot X=O\\ [((K_{ij}^{y1}))\ ((K_{ii}^{y2}))\ ((Q_{ij}))\ ((Q_{ii}^{x}))\ ((Q_{ij}^{y}))]\cdot X=O\end{array} \tag{27}$$

ここに，

$$((K_{ij}^{x}))=\begin{pmatrix} S_1\cos S_1\xi_1 \sin N\pi\eta_1 & -S_1\sin S_1\xi_1 \sin N\pi\eta_1 & K_1\cosh K_1\xi_1 \sin N\pi\eta_1 & K_1\sinh K_1\xi_1 \sin N\pi\eta_1 \\ S_1\cos S_1\xi_1 \sin N\pi\eta_2 & -S_1\sin S_1\xi_1 \sin N\pi\eta_2 & K_1\cosh K_1\xi_1 \sin N\pi\eta_2 & K_1\sinh K_1\xi_1 \sin N\pi\eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1\mathrm{con}S_1\xi_i \sin N\pi\eta_j & -S_1\sin S_1\xi_i \sin N\pi\eta_j & K_1\cosh K_1\xi_i \sin N\pi\eta_j & K_1\sinh K_1\xi_i \sin N\pi\eta_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1\cos S_1\xi_r \sin N\pi\eta_s & -S_1\mathrm{sie}S_1\xi_r \sin N\pi\eta_s & K_1\cosh K_1\xi_r \sin N\pi\eta_s & K_1\sinh K_1\xi_r \sin N\pi\eta_s \end{pmatrix}$$

$$
((K_{ij}^{y}))=\begin{pmatrix}
M\pi\cos M\pi\xi_1\ \sin S_2\eta_1 & M\pi\cos M\pi\xi_1\ \cos S_2\eta_1 & M\pi\cos M\pi\xi_1\ \sinh K_2\eta_1 & M\pi\cos M\pi\xi_1\ \cosh K_2\eta_1 \\
M\pi\cos M\pi\xi_1\ \sin S_2\eta_2 & M\pi\cos M\pi\xi_1\ \cos S_2\eta_2 & M\pi\cos M\pi\xi_1\ \sinh K_2\eta_2 & M\pi\cos M\pi\xi_1\ \cosh K_2\eta_2 \\
\hdashline
M\pi\cos M\pi\xi_i\ \sin S_2\eta_j & M\pi\cos M\pi\xi_i\ \cos S_2\eta_j & M\pi\cos M\pi\xi_i\ \mathrm{simh} K_2\eta_j & M\pi\cos M\pi\xi_i\ \cosh K_2\eta_j \\
\hdashline
M\pi\cos M\pi\xi_r\ \sin S_2\eta_s & M\pi\cos M\pi\xi_r\ \cos S_2\eta_s & M\pi\cos M\pi\xi_r\ \sinh K_2\eta_s & K\pi\cos M\pi\xi_r\ \cosh K_2\eta_s
\end{pmatrix}
$$

$$
((Oij))\begin{pmatrix}
O_{11}^{11} & O_{12}^{11} & \cdots\cdots & O_{ij}^{11} & \cdots\cdots & O_{rs}^{11} \\
O_{11}^{12} & O_{12}^{12} & \cdots\cdots & O_{ij}^{12} & \cdots\cdots & O_{rs}^{12} \\
\hdashline
O_{11}^{ij} & O_{12}^{ij} & \cdots\cdots & O_{ij}^{ij} & \cdots\cdots & O_{rs}^{ij} \\
\hdashline
O_{11}^{rs} & O_{12}^{rs} & \cdots\cdots & O_{ij}^{rs} & \cdots\cdots & O_{rs}^{rs}
\end{pmatrix}
$$

$$
((O_{ij}^{x}))=\begin{pmatrix}
O_{11}^{x11}+\Lambda_{11}^{x} & O_{11}^{x12} & \cdots\cdots & O_{ij}^{x11} & \cdots\cdots & O_{rs}^{x11} \\
O_{11}^{x12} & O_{12}^{x12}+\Lambda_{12}^{x} & \cdots\cdots & O_{ij}^{x12} & \cdots\cdots & O_{rs}^{x12} \\
\hdashline
O_{11}^{xij} & O_{12}^{xij} & \cdots\cdots & O_{ij}^{xij}+\Lambda_{ij}^{x} & \cdots\cdots & O_{rs}^{xij} \\
\hdashline
O_{11}^{xrs} & O_{12}^{xrs} & \cdots\cdots & O_{ij}^{xrs} & \cdots\cdots & O_{rs}^{xrs}+\Lambda_{rs}^{x}
\end{pmatrix}
$$

$$
((O_{ij}^{y}))=\begin{pmatrix}
O_{11}^{y11} & O_{12}^{y11} & \cdots\cdots & O_{rs}^{y11} & \cdots\cdots & O_{rs}^{y11} \\
O_{11}^{y12} & O_{12}^{y12} & \cdots\cdots & O_{ij}^{y12} & \cdots\cdots & O_{rs}^{y12} \\
\hdashline
O_{11}^{yij} & O_{12}^{yij} & \cdots\cdots & O_{ij}^{yij} & \cdots\cdots & O_{rs}^{yij} \\
\hdashline
O_{11}^{yrs} & O_{12}^{yrs} & \cdots\cdots & O_{ij}^{yrs} & \cdots\cdots & O_{rs}^{yrs}
\end{pmatrix}
$$

$$
O_{ij}^{kq}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m\pi}{kmn}\Gamma_{ij}(m,\ n)\sin m\pi\xi_i\ \sin n\pi\eta_{ij}\cos m\pi\xi_k\ \sin n\pi\eta_q
$$

$$
O_{ij}^{xkq}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m\pi}{kmn}\Gamma_{ij}^{x}(m,\ n)\cos m\pi\xi_i\ \sin n\pi\eta_j\ \cos m\pi\xi_k\ \sin n\pi\eta_q
$$

$$
O_{ij}^{ykq}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m\pi}{kmn}\Gamma_{ij}^{y}(m,\ n)\sin m\pi\xi_i\ \cos n\pi\eta_j\ \cos m\pi\xi_k\ \sin n\pi\eta_q
$$

$$
((K_{ij}^{y1}))=\begin{pmatrix}
\sin S_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_1 & \cos S_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_1 & \sinh K_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_1 & \cosh K_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_1 \\
\sin S_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_2 & \cos S_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_2 & \sinh K_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_2 & \cosh K_1\xi_1\cdot N\pi\cos N\pi\eta_2 \\
\hdashline
\sin S_1\xi_i\cdot N\pi\cos N\pi\eta_j & \cos S_1\xi_i\cdot N\pi\cos N\pi\eta_j & \sinh K_1\xi_i\cdot N\pi\cos N\pi\eta_j & \cosh k_1\xi_i\cdot N\pi\cos N\pi\eta_j \\
\hdashline
\sin S_1\xi_r\cdot N\pi\cos N\pi\eta_s & \cos S_1\eta_r\cdot N\pi\cos N\pi\eta_s & \sinh K\xi_r\cdot N\pi\cos N\pi\eta_s & \cosh k_1\xi_r\cdot N\pi\cos N\pi\eta_s
\end{pmatrix}
$$

$$
((K_{ij}^{y2}))=\begin{pmatrix}
\sin M\pi\xi_1\cdot S_2\cos S_2\eta_1 & -\sin M\pi\xi_1\cdot S_2\sin S_2\eta_1 & \sin M\pi\xi_1\cdot K_2\cosh K_2\eta_1 & \sin M\pi\xi_1\cdot K_2\sinh K_2\eta_1 \\
\sin M\pi\xi_1\cdot S_2\cos S_2\eta_2 & -\sin M\pi\xi_1\cdot S_2\sin S_2\eta_2 & \sin M\pi\xi_1\cdot K_2\cosh K_2\eta_2 & \sin M\pi\xi_1\cdot K_2\sinh K_2\eta_2 \\
\hdashline
\sin M\pi\xi_i\cdot S_2\cos S_2\eta_j & -\sin M\pi\xi_i\cdot S_2\sin S_2\eta_j & \sin M\pi\xi_i\cdot K_2\cosh K_2\eta_j & \sin M\pi\xi_i\cdot K_2\sinh K_2\eta_j \\
\hdashline
\sin M\pi\xi_r\cdot S_2\cos S_2\eta_s & -\sin M\pi\xi_r\cdot S_2\sin S_2\eta_s & \sin M\pi\xi_r\cdot K_2\cosh K_2\eta_s & \sin M\pi\xi_r\cdot K_2\sinh K_2\eta_s
\end{pmatrix}
$$

$$
((Q_{ij}))=\begin{pmatrix}
Q^{11}_{11} & Q^{11}_{12} & \cdots\cdots & Q^{11}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{11}_{rs}\\
Q^{12}_{11} & Q^{12}_{12} & \cdots\cdots & Q^{12}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{12}_{rs}\\
\hline
Q^{ij}_{11} & Q^{ij}_{12} & \cdots\cdots & Q^{ij}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{ij}_{rs}\\
\hline
Q^{rs}_{11} & Q^{rs}_{12} & \cdots\cdots & Q^{rs}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{rs}_{rs}
\end{pmatrix}
$$

$$
((Q^{x}_{ij}))=\begin{pmatrix}
Q^{x11}_{11} & Q^{x11}_{12} & \cdots\cdots & Q^{x11}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{x11}_{rs}\\
Q^{x12}_{11} & Q^{x12}_{12} & \cdots\cdots & Q^{x12}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{x12}_{rs}\\
\hline
Q^{xij}_{11} & Q^{xij}_{12} & \cdots\cdots & Q^{xij}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{xij}_{rs}\\
\hline
Q^{xrs}_{11} & Q^{xrs}_{12} & \cdots\cdots & Q^{xrs}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{xrs}_{rs}
\end{pmatrix}
$$

$$
((Q^{y}_{ij}))=\begin{pmatrix}
Q^{y11}_{11}+\Lambda^{y}_{11} & Q^{y11}_{12} & \cdots\cdots & Q^{y11}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{y11}_{rs}\\
Q^{y12}_{11} & Q^{y12}_{12}+\Lambda^{y}_{12} & \cdots\cdots & Q^{y12}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{y12}_{rs}\\
\hline
Q^{yij}_{11} & Q^{yij}_{12} & \cdots\cdots & Q^{yij}_{ij}+\Lambda^{y}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{yij}_{rs}\\
\hline
Q^{yrs}_{11} & Q^{yrs}_{12} & \cdots\cdots & Q^{yrs}_{ij} & \cdots\cdots & Q^{yrs}_{rs}+\Lambda^{y}_{rs}
\end{pmatrix}
$$

$$
Q^{kq}_{ij}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{Kmn}\,\Gamma_{ij}\,(m,\ n)\ \sin m\pi\xi_i\ \sin n\pi\eta_j\ \sin m\pi\xi_k\ \cos n\pi\eta_q
$$

$$
Q^{xkq}_{ij}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{Kmn}\,\Gamma^{x}_{ij}\,(m,\ n)\ \cos m\pi\xi_i\ \sin n\pi\eta_j\ \sin m\pi\xi_k\ \cos n\pi\eta_q
$$

$$
Q^{ykq}_{ij}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{Kmn}\,\Gamma^{y}_{ij}\,(m,\ n)\ \sin m\pi\xi_i\ \cos n\pi\eta_j\ \sin m\pi\xi_k\ \cos n\pi\eta_q
$$

式 (17)，(22) および式 (27) が未知数 Ax～Dx，Ay～Dy，垂直反力 Vkq および x，y 方向の反力モーメントM^{x}_{kl}, M^{y}_{kq} を求めるための基本連立方程式の全構成内容であるが，定数項はいずれも零である．したがって，解が存在するためには，上述の連立方程式の係数行列式の値が零でなければならないことからいわゆる振動数方程式が次のようにえられる．

$$
\begin{vmatrix}
((K^{1}_{0}))_{44} & ((0))_{44} & ((0)) & ((0)) & ((0))\\
((0))_{44} & ((K^{2}_{0}))_{44} & ((0)) & ((0)) & ((0))\\
\hline
((K^{1}_{ij})) & ((K^{2}_{ij})) & ((H_{ij})) & ((H^{x}_{ij})) & ((H^{y}_{ij}))\\
((K^{x1}_{ij})) & ((K^{x2}_{ij})) & ((O_{ij})) & ((O^{x}_{ij})) & ((O^{y}_{ij}))\\
((K^{y1}_{ij})) & ((K^{y2}_{ij})) & ((Q_{ij})) & ((Q^{x}_{ij})) & ((Q^{y}_{ij}))
\end{vmatrix}=0 \qquad (28)
$$

上式より無梁板構造の固有値λ したがって振動数 ω が算定されるが，その演算にあたっては上式を直接計算する代わりに，次の 3 式に分解のうえ計算してもよい．

$$\left| ((K_0^1))_{44} \right| = 0 \qquad (29-1)$$

$$\left| ((K_0^2))_{44} \right| = 0 \qquad (29-2)$$

$$\begin{vmatrix} ((H_{ij})) & ((H_{ij}^x)) & ((H_{ij}^y)) \\ ((O_{ij})) & ((O_{ij}^x)) & ((O_{ij}^y)) \\ ((Q_{ij})) & ((Q_{ij}^x)) & ((Q_{ij}^y)) \end{vmatrix} = 0 \qquad (29-3)$$

式（29−1）および式（29−2）は式（28）の必要条件であるが，十分条件でなく，したがって，これよりえられる固有値群の中には本題の固有値として不要なものも含まれている．要不要の判別は，式(29−1)，(29−2）よりえられる固有値を式（28）左辺に代入してえられる演算結果が零となるか否かを検討すればよく，当然ながら零となる場合のみが本題の固有値である．なお，式（29−1)，(29−2）からえられる固有値はその誘導過程より明らかなように，周辺単純支持矩形板の固有値と一致するゆえ，これらを直接解く必要はなく，式（6）から簡単に算出することができる．また，振動モードは周辺単純支持矩形板のそれと同じ式(5）の形で与えられることは容易に理解できるであろう．

式（28）の第1行〜第8行におけら第9列以後の行列要素がいずれも零であるゆえ．式（29−3）よりえられる固有値は全て式（28）の固有値となる．なお，この場合には，規準関数Wにおける積分定数Ax〜Dx，Ay〜Dyがすべて零となるゆえ，振動モードが特殊解の項のみで与えられることになる．

特例として，点支持される無梁板構造では，式（29−1)，(29−2）はそのまま成立するが，式（29−3）が次のように簡略化され，文献(6)の結果に合致する．

$$\left| ((\overline{H}_{ij})) \right| = 0 \qquad (30)$$

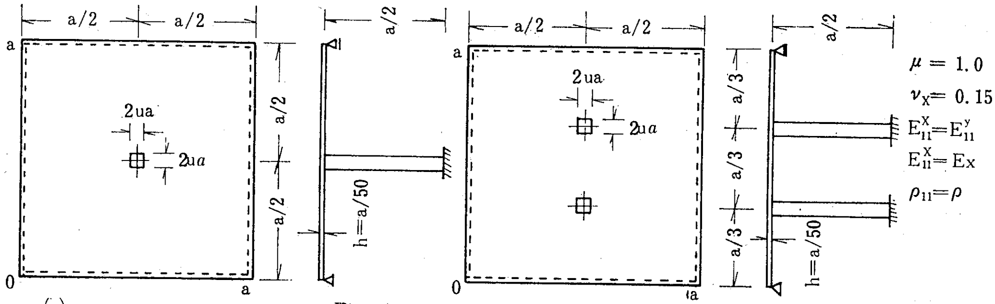
ここに，$H_{ij}^{kq} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Kmn} \sin m\pi\xi_i \sin n\pi\eta_j \sin m\pi\xi_k \sin n\pi\eta_q$

3. 1本柱無梁板構造

Fig. 2(a）に示すように，辺長比 $\mu=1.0$ なる周辺単純支持正方形板が板中央で正方形断面の柱に剛結支持される無梁板構造の自由振動問題を論ずれば次のとおりである．

柱の沈下がないものとすれば，本題の振動数方程式は式（29−3）から次のようにえられる．

$$\begin{vmatrix} H_{11}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & O_{11}^{x11} + \Lambda_{11}^x & 0 \\ 0 & 0 & Q_{11}^{y11} + \Lambda_{11}^y \end{vmatrix} = 0 \qquad (31)$$



(a) Fig. 2 (b)

ここに，

$$H_{11}^{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{11}(m,n)}{Kmn} \sin^2\frac{m\pi}{2} \sin^2\frac{n\pi}{2},\quad \Gamma^{11}(m,n) = \frac{1}{mn\pi^2 uv} \sin m\pi u \sin n\pi v$$

$$O_{11}^{x11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{11}^x(m,n)}{Kmn} \cos^2\frac{m\pi}{2} \sin^2\frac{n\pi}{2},\quad \Gamma_{11}^x(m,n) = \frac{3}{mn\pi^2 u^2 v} \left(\frac{\sin m\pi u}{m\pi u} - \cos m\pi u\right) \sin n\pi v$$

$$Q_{11}^{y11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{11}^y(m,n)}{Kmn} \sin^2\frac{m\pi}{2} \cos^2\frac{n\pi}{2},\quad \Gamma_{11}^y(m,n) = \frac{3}{mn\pi^2 uv^2} \left(\frac{\sin n\pi v}{n\pi v} - \cos n\pi v\right) \sin m\pi u$$

$\Lambda x_{11}, \Lambda y_{11}$; Fig. 2 (a) に示す諸値を代入して
　えられる固有値 λ の関数

式 (31) の左辺の行列式はその非対角要素が全て零となるゆえ，次の3式に分解することができる．

$$H_{11}^{11}=0 \tag{32-1}$$

$$O_{11}^{x11}+\Lambda_{11}^{x}=0 \tag{32-2}$$

$$Q_{11}^{y11}+\Lambda_{11}^{y}=0 \tag{32-3}$$

したがって式 (32−1) ～ (32−3) および式 (29−1), (29～2) または式 (6) より本構造の固有値 λ を求めることができる．柱幅の大きさ u, v が 0.02 および 0.04 の2例について，異方性パラメーター χ を1.0 (等方性)，1.1, 1.3 および 1.5 とした場合の固有値 λ を3次まで求めれば Table 2 に示す結果をうる．

χ	次数	u=v=0.02	u=v=0.04
1.0	1	7.1972 ⓑ,ⓒ	7.3336 ⓐ
	2	7.2809 ⓐ	7.6329 ⓑ,ⓒ
	3	8.8858 ⓓ	no change
1.1	1	7.2283 ⓑ	7.4201 ⓐ
	2	7.3266 ⓒ	7.6704 ⓑ
	3	7.3668 ⓐ	7.7702 ⓒ
1.3	1	7.2884 ⓑ	7.5676 ⓐ
	2	7.5136 ⓐ	7.7389 ⓑ
	3	7.5607 ⓒ	8.0185 ⓒ
1.5	1	7.3433 ⓑ	7.6893 ⓐ
	2	7.6353 ⓐ	7.8001 ⓑ
	3	7.7702 ⓒ	8.2390 ⓒ

Table. 2

Table 2 において固有値の右肩に付した記号ⓐ，ⓑ，ⓒは λ がそれぞれ式 (32−1)，(32−2)，(32−3) からえられることを明らかにしたもので，また ⓓ は式 (29−1) および式 (29−2) の両式または式 (6) からえられることを示すものである．

固有値 λ が明らかとなれば振動モードが算出可能となる．Table 2 に示す固有値群のうち，ⓐ 印を付した固有値は垂直反力の項のみからえられるゆえ，その振動モードは x=a/2 および y=b/2 に対称な次式で与えられ，柱が垂直反力のみの作用を受けることになる．

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{11}(m,n)}{\mathrm{snm}\pi}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \tag{33}$$

また，x 方向の反力モーメントの項からえられるⓑ印を付した固有値の振動モードは，x=a/2 に逆対称かつ y=b/2 に対称な次式で表わされる．

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{11}^{x}(m,n)}{\mathrm{Kmn}}\cos\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \tag{34}$$

同様にⓒの場合には x=a/2 に対称かつ y=b/2 に逆対称な次式がえられる．

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{11}^{y}(m,n)}{\mathrm{Kmn}}\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \tag{35}$$

なお，ⓑおよびⓒの場合には柱がそれぞれ x,y 方向の反力モーメントの作用を受けることがわかる．

χ=1.0 すなわち等方性の場合には式 (34) と式 (35) は形および大きさともに全く同じモードを与えるが，異方性の場合には当然ながら大きさの異なるモードとなる．χ=1.0 でかつ u=0.02 に対してⓐ，ⓑ，ⓒの各ケースの振動モードを描けば，Fig.3 のⓐ，ⓑ，ⓒ に示すとおりである．

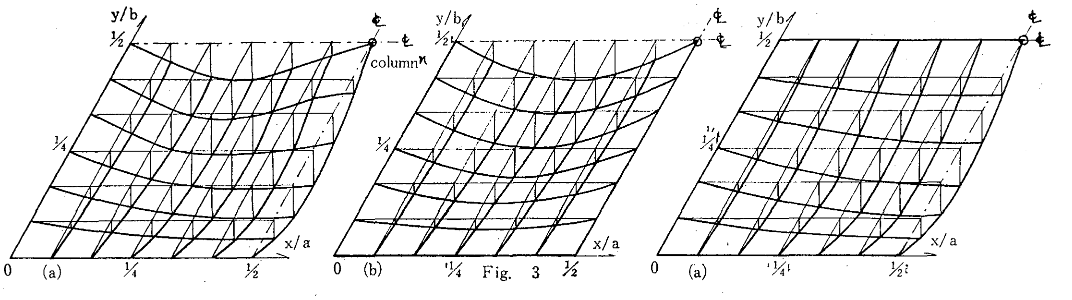


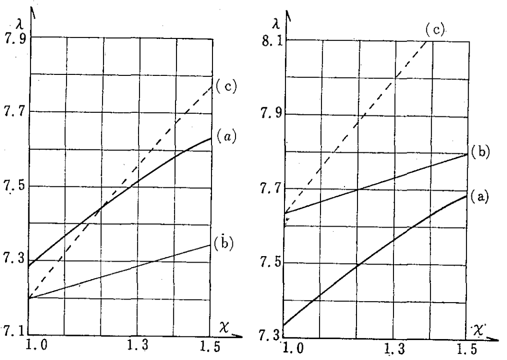
Fig. 3

ⓓの場合は，2.でもふれたように周辺単純支持正方形板の固有値のうち，式（28）の振動数方程式を満足するものである．したがって，本例では x=a/2 および y=b/2 を節線とするモードがこれに該当し，次式で与えられる．

$$W=A\sin 2\pi\xi\ \sin 2\pi\eta \tag{36}$$

これより，ⓓの場合には柱は垂直反力および反力モーメントのいずれの作用をも受けないことがわかる．

Table 2 の結果を用いて，剛比 χ の変化による固有値 λ の変動を図示すれば，Fig4（a），（b）のようにえられる．図より λ は χ にほぼ比例して増加する



(a) u= 0.02　Fig. 4　(b) u= 0.04

が，その増加の割合がかなり大きく実用上無視することができない．また増加の傾向はⓐ，ⓑ，ⓒの各ケースとも u の大きさにそれ程大きな影響を受けていないといえる．等方性（χ=1.0）の場合には，ⓑ，ⓒの固有値は当然ながら合致するが，χ の増大による λ の増加の割合はⓑに比べてⓒの方が大である．これは χ の増大に伴なって y 方向の板の剛性が x 方向のそれに比べて大きくなることからうなづけるであろう．

x=a/4　および　y=b/4　の断面のⓐの振動モードを χ=1.0 および χ=1.5 の場合について図示し比較対照すれば Fig. 5 のとおりである．

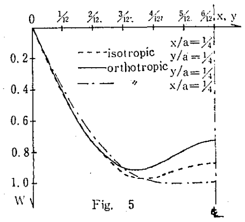


Fig. 5

以上の事実から当然のことではあるが鉄筋コンクリートスラブなどの直交異方性板を等方板とみなして振動解析するにはかなり無理があるといえ，厳密解析の必要性が確認される．

次に，柱幅 u および v が固有値 λ に及ぼす影響を検討するために，χ=1.0 とおいて，各種の u. v に対して λ を算出すれば，Table 3 の結果がえられ，これらをプロットすれば Fig. 6 のようにえられる．

次数	u=v=0.0	u=v=0.02	u=v=0.04	u=v=0.06
1	7.0248 ⓑ,ⓒ	7.1972 ⓑ,ⓒ	7.3336 ⓐ	7.4077 ⓐ
2	7.2608 ⓐ	7.2809 ⓐ	7.6329 ⓑ,ⓒ	8.1758 ⓑ,ⓒ
3	8.8858 ⓓ	no change	〃	〃

Table. 3

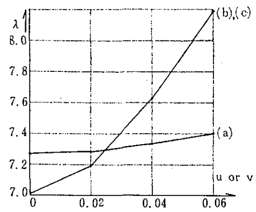
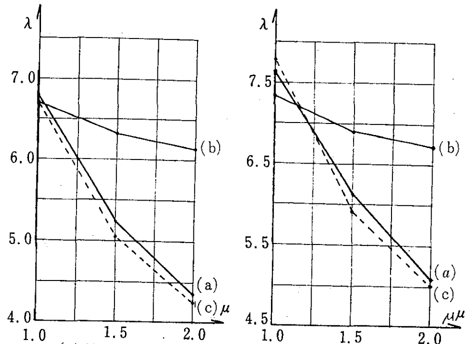


Fig. 6

なお，u=v=0 の場合の固有値は式（29−1），（29−2）および式（30）より求めたものである．ⓑ およびⓒの場合は，λ の算定に柱の反力モーメントしたがって柱の曲げ剛性の影響が含まれることになるゆえ，λ は u，v の増加に伴なって著しく増大する．ⓐの場合は，柱の垂直反力の項のみで λ が決定され，したがって，λ に対する u，v の影響は小さい．さらに，ⓓの場合は柱に何等の反力をも生ぜず，λ は余関数の項から決定されるゆえ，u，v の変化に対して全く無関係である．このことは，本題の解析にあたり，柱断面の中央1点のみで中間柱と板の変形条件をたてたことに起因するもので，柱の剛域を考慮する物合には異なる結果をうることになるであろう．

Fig. 2 に示す無梁板構造において，板の辺長比 μ を種々変化させた場合の固有値 λ をプロットすれば Fig.7 の結果がえられる．図より，等方性および直交異方性の両ケースとも μ が増大すれば λ が減少する



(a) χ=1.0　Fig.7　(b) χ=1.5

ことがわかるが，ⓑの場合，すなわち x 方向に反力モーメントを生ずるごとき固有値は，ⓐ，ⓒの場合に比較して μ の変化による影響が少ないといえる．このことは μ が増大するにつれて，板全体の剛性が減少することおよび x 方向に比べて y 方向の剛性が低くなることに起因するものである．

4．2本柱無梁板構造

Fig.2 (b) に示すように，柱が y 方向に2本配列される場合には，式 (29－3) からえられる振動数方程式は次の2式に分解される．

$$\begin{vmatrix} H_{11}^{11} & H_{12}^{11} & H_{11}^{y11} & H_{12}^{y11} \\ H_{11}^{12} & H_{12}^{12} & H_{11}^{y12} & H_{12}^{y12} \\ Q_{11}^{11} & Q_{12}^{11} & Q_{11}^{y11}+\Lambda_{11}^{y} & Q_{12}^{y11} \\ Q_{11}^{12} & Q_{12}^{12} & Q_{11}^{y12} & Q_{12}^{y12}+\Lambda_{12}^{y} \end{vmatrix} = 0 \qquad (37)$$

$$\begin{vmatrix} O_{11}^{x11}+\Lambda_{11}^{x} & O_{12}^{x11} \\ O_{11}^{x12} & O_{12}^{x12}+\Lambda_{12}^{x} \end{vmatrix} = 0 \qquad (38)$$

式(37)から垂直反力および y 方向の反力モーメントを生ずるようなモードをもつ固有値 λ が，また式 (38) から x 方向の反力モーメントを生ずるようなモードをまつ λ がそれぞれ独立に算定される．前節3と同様に χ の各値に対する λ を3次まで求めれば，Table 4 に示すようにえられる．なお，本例では3次までの固有値の中に式 (29－1) および式 (29－2) よりえられる固有値は含まれない．

式 (37) からえられる固有値のモードに関する式は，式 (39) に示す連立方程式を解いて適当な未知数に対する他の全ての未知数の比を算出のうえ，式 (15) に代入すれば式 (40) のように求められる．

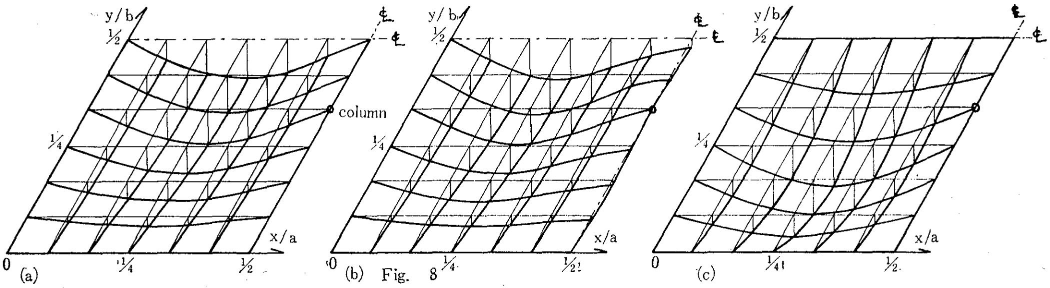
χ	次数	$u=v=0.02$		$u=v=0.04$	
1.0	1	7.2784 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$	7.9101 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$
	2	8.1042 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00205$	8.1615 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00520$
	3	8.9945 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$	9.3530 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$
1.1	1	7.3097 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$	7.9449 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$
	2	8.1425 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00196$	8.1982 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00547$
	3	9.0968 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$	9.4650 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$
1.3	1	7.3677 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$	8.0080 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$
	2	8.2099 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00179$	8.2629 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00558$
	3	9.2851 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$	9.6540 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$
1.5	1	7.4207 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$	8.0647 ⓑ	$m_{11}^x = m_{12}^x = 1.0$
	2	8.2683 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00165$	8.3192 ⓐ	$v_{11} = v_{12} = 1.0$ $m_{11}^y = -m_{12}^y = 0.00562$
	3	9.4560 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$	9.8213 ⓑ	$m_{11}^x = -m_{12}^x = 1.0$

Table. 4

$$\begin{pmatrix} H^{11}_{11} & H^{11}_{12} & H^{y11}_{11} & H^{y11}_{12} \\ H^{12}_{11} & H^{12}_{12} & H^{y12}_{11} & H^{y12}_{12} \\ Q^{11}_{11} & Q^{11}_{12} & Q^{y11}_{11}+\Lambda^{y}_{11} & Q^{y11}_{12} \\ Q^{12}_{11} & Q^{11}_{12} & Q^{y12}_{11} & Q^{y12}_{12}+\Lambda^{y}_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{11} \\ \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{M}^{y}_{11} \\ \mathbf{M}^{y}_{12} \end{Bmatrix} = 0 \tag{39}$$

$$W=V_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{Kmn} \{v_{1j}\ \Gamma_{1j}(m,\ n)\ \sin\frac{m\pi}{2}\ \sin n\pi\beta_j + m^{y}_{1j}\ \Gamma^{y}_{1j}(m,\ n)\ \sin\frac{m\pi}{2}$$

$$\cos n\pi\beta_j\}\ \sin m\pi\xi \cdot \sin n\pi\eta \tag{40}$$



(a) (b) Fig. 8 (c)

ここに，$v_{1j}=\mathbf{V}_{1j}/V_0$，$m_{1j}=\mathbf{M}^{y}_{1j}/V_0$，

$\beta_1=1/3$，$\beta_2=2/3$

式 (37) からえられる固有値 λ に対して，$v_{11}=1.0$ とおいた場合の V_{12}，m^{y}_{11} および m^{y}_{12} の値を算出すれば Table 4 の固有値のⓐを付した行に示すとおりである．

同様に，式 (38) からえられる λ に対して，規準関数が次のように算定れさる．

$$W=M^{x}_{0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{Kmn}\ m^{x}_{1j}\ \Gamma^{x}_{1j}$$

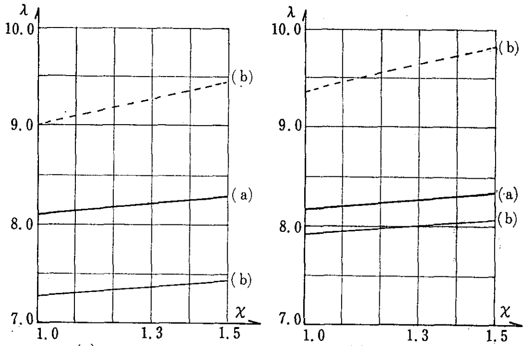
$$(m,n)\ \cos\frac{m\pi}{2} \sin n\pi\beta_j\ \sin m\pi\xi\ \sin n\pi\eta \tag{41}$$

ここに，$m^{x}_{1j}=\mathbf{M}^{x}_{1j}/M^{x}_{0}$

上式において m^{x}_{11} を 1.0 とした場合 m^{x}_{12} の値は Table 4 の固有値にⓑを付した行に示すとおりである．なお，この場合 m^{x}_{12} の値は 1.0 または −1.0 のどちらかとなるが，1.0 の場会は $y=b/2$ に対称なモードになり，−1.0 の場合は逆対称なモードになる．

$u=0.02$ でかつ $\chi=1.0$ の場合の 1～3 の振動モードを求めれば Fig. 8 に示すとおりである．

Table 4 の諸値を用いて，剛比 χ と固有値 λ との関係をプロットすれば，Fig. 9 の結果がえられる．これより，本例の 2 本柱無梁板構造でも 1 本柱無梁板構造と同様の傾向を示し，y 方向に波が 2 個存在する場合の固有値 λ ($m^{x}_{11}=1.0$，$m^{x}_{12}=-1.0$) が χ の影響を著るしく受けることがわかる．



(a) u=0.02 Fig. 9 (b) u=0.04

5．結　語

本論文は柱支持される直交異方性無梁板構造の固有値およびモードの算定法を提案するとともに，１本および２本柱無梁板構造を対象として，その固有値に及ぼす板の x，y 方向の剛比，柱幅および辺長比の影響を種々検討したものであるが，えられた結果を要約すれば次のとおりである．

（1）周辺単純支持直交異方性矩形板の周有値λは式（6）で与えられるが，この式（6）において$\chi=1+\varepsilon(\varepsilon<1)$と置き換え，$\varepsilon$に関してベキ級数展開する．しかるとき，$(N/\mu)^2/\{M^2+(N/\mu)^2\}<1$であるから，$\varepsilon$の１次の項まで採用して$\lambda$に関する近似とすることができる．すなわち，

$$\lambda \fallingdotseq \pi\sqrt{M^2+N^2/\mu^2}\ \{1+\frac{N^2/\mu^2}{4(M^2+N^2/\mu^2)}\varepsilon\}$$

$$=\pi\sqrt{M^2+N^2/\mu^2}\ \{1+\frac{1}{4(M^2\mu^2/N^2+1)}(\chi-1)\} \tag{42}$$

上式よりλが近似的にχに比例することおよびその比例定数は y 方向の波数 N が x 方向の波数Mより大きいほど大であることがわかる．この事実は前節3，4の数値解（Fig．4，9）を考察するとき柱支持される無梁板構造でもあてはまる．

（2）柱頭部において板のたわみ角の変化が大きいモードをもつ固有値は，柱の曲げ剛性の影響を受けて著しく変化するが，たわみ角の変化が零もしくはそれに近い場合の固有値は柱の剛性の影響は殆んど考えられない．

（3）式（6）より明らかなように，周辺単純支持矩形板の固有値は辺長比が増大すれば減少するが，同じことは無梁板構造でもいえ，y 方向の波数が x 方向の波数に比べて大きい場合にその傾向が大である．

最後に，本論文の数値計算には，九州大学の大型計算機 FACOM230－60 および本学の電算機 FACOM 270－20 を使用したことを付したことを付記する．

参　考　文　献

（1）堯天義久：横振動する無梁板構造の等価梁幅および自由振動周期　建築学会研究報告　第12号

（2）W．Nowacki ： Vikrations and Buckling of Rectangular Plates Simply Supported at [the Peripbery and at Several Point Inside, Archiwum Mekanikt Stosowanej, Warsaw, Poland, Vol. 5, 1953

（3）P. P. Lynm and N. Kambasar : Free Transverse Vibrations of Flat slabs, Pro ASCE, Vol. 95, EM1 Feb. 1969

（4）T. Yamasaki and T. Chishki : Free Vibration of Rectangular Plates Sapported by Edge-Sapports and Intermediate Props (Flat Slabs) , Pro Symp. on the Thin-Walled Structures and Space Structures, March, 1969

（5）樗木　武：無梁板構造の解法に関する研究（学位論文），1970

（6）樗木　武・篠崎　正：中間にて点支持される直交異方性矩形板の自由振動，第25回土木学会年次学術議演集，第1部　昭和45年11月

（7）S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger; Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, New York McGraw-Hill Book Co, p.366

（8）小野薫：振動撓角法とその実用化，建築学会論文集，第5号，1937