# 薄肉開き断面はりの座屈に関する基礎方程式

築地恒夫*

# On the Basic Stability Equations for Beams with Thin-Walled Open Sections

by

Tsuneo TSUIJI
(Structural Engineering)

The differential equations for the stability of a beam with a thin-walled open section are derived from the total potential energy of the beam in accordance with the variational principle. The main object of this study is to show the applicability of the concept of the initial stresses to the stability problems of the beams. By using exact initial stresses, including the transverse and warping shearing stresses, it is possible to derive mathematically the general stability differential equations and the correspoding boundary conditions.

The same procedure used in this study can be applied to the more complicated problems in geometry, namely the stability of the curved and twisted beams.

## 1. まえがき

薄肉の断面をもつ真直なはりの座屈に関する研究は，L. Prandtl に始まる数多くの研究者によって行なわれ，ほゞ完成されたと云える．それらの集大成として，S. Timoshenko および F.Bleich の著書(1)，(2)があり，さらに一般化され座屈理論として，V.Z.Vlasov の著書(3)および川井の研究(4)がある．

座屈に関する基礎方程式の誘導には，大別して二通りの方法が採用されている．その一つは，座屈変形後のはりの微小要素に対して力の釣合を考える方法で，文献(1)，(3)，(4)がこれに属する．他の一つは，座屈変形を起こしたはりに対して全ポテンシャルエネルギを求め，その停留原理より座屈に関する微分方程式を導く文献(2)の方法である．いずれも座屈によるはりの変形状態を十分考慮して式を誘導する必要があり，複雑な変形の幾何を用いなければならない．

以上の二方法とは別に，座屈変形に関する全ポテンシャルエネルギを求める場合，座屈直前の応力を初期応力とし，座屈をこのような初期応力のある弾性体の変形問題と考え，初期応力を含んだ全ポテンシャルエネルギを用いる方法が提案されている(5)。この方法に従うと，弾性体の座屈に関する微分方程式および境界条件を，面倒な変形の幾何を考えることなしに数学的に誘導することが出来るので都合がよい．しかも必要な項を見落すことがなく，さらに高次の微小項についてもその内容が明確になるので，取り扱う問題に対して適切な項の選択が可能となる．

ここでは，薄肉開き断面ばりの座屈に関する一般式を上記方法で導き，その際の問題点を指摘する．特に文献(5)の一般的な方法を，はりに適用する場合に生ずるはり理論特有の性質，例えば横荷重による剪断応力，各応力と荷重との対応など，をどのように取り扱うかを明らかにする．

## 2. 初期応力

はりに作用する荷重を漸次増大していくと，はり内に生じている応力もそれに従って増大し，ある値に到

*構造工学科

達するとそれまでの変形と全く異なった変形を生じ，分岐座屈を起す．この座屈変形が起る直前の応力を初期応力と呼び，以下に示すように断面の合力で表わす．座屈変形の際，この初期応力の大きさには変化がないものとする．

なお座標軸は，はりの断面内に断面の主軸と一致するように $x, y$ 軸を，長さ方向に $z$ 軸を右手系をなすように定める．また補助座標として，はりの断面肉厚の中央面に沿ってs軸，s軸に垂直に肉厚方向にn軸を Fig. 1 のように定める．

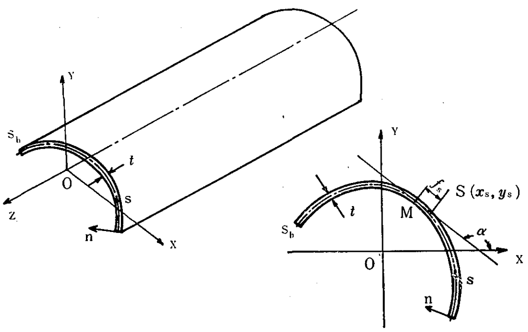


Fig. 1 Coordinates

**(a) 初期垂直応力 $\sigma_z^{(0)}$**

座屈直前の垂直応力 $\sigma_z^{(0)}$ は，断面の剪断中心 $S(x_s, y_s)$ の $x, y$ 方向変位 $u_0(z)$，$v_0(z)$，図心の $z$ 方向変位 $w_0(z)$，剪断中心まわりの回転角を $\theta_0(z)$ で表わすと

$$\sigma_z^{(0)}=E\left[\frac{dw_0}{dz}-x\frac{d^2u_0}{dz^2}-y\frac{d^2v_0}{dz^2}+\omega\frac{d^2\theta_0}{dz^2}\right] \tag{1}$$

である．

ここで，$E$ は材料の縦弾性係数，$\omega$ は剪断中心に関する断面の曲げねじれ関数である．$\sigma_z^{(0)}$ に関係した断面の合力，すなわち初期断面力をそれぞれ次のように定義する．

$$\begin{aligned}
&\int_A \sigma_z^{(0)}dA=P_z^{(0)}=EA\frac{dw_0}{dz}\\
&\int_A \sigma_z^{(0)}y\,dA=M_x^{(0)}=-EI_y\frac{d^2v_0}{dz^2}\\
&\int_A \sigma_z^{(0)}x\,dA=-M_y^{(0)}=-EI_x\frac{d^2u_0}{dz^2}\\
&\int_A \sigma_z^{(0)}\omega\,dA=M_\omega^{(0)}=EI_\omega\frac{d^2\theta_0}{dz^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$P_z^{(0)}$ は $z$ 方向軸力，$M_x^{(0)}$，$M_y^{(0)}$ は $x$, $y$ 軸まわりの曲げモーメント，$M_\omega^{(0)}$ は曲げねじりモーメントである．また $A$, $I_x$, $I_y$, $I_\omega$ は断面定数で次の定義に従う．

$$\begin{aligned}
&\int_A dA=A, \qquad \int_A x^2dA=I_x\\
&\int_A y^2dA=I_y, \qquad \int_A \omega^2dA=I_\omega
\end{aligned} \tag{3}$$

(2)式を用い初期垂直応力を初期断面力で書き表わすと(4)式のようになる．

$$\sigma_z^{(0)}=\frac{P_z^{(0)}}{A}-\frac{x}{I_x}M_y^{(0)}+\frac{y}{I_y}M_x^{(0)}+\frac{\omega}{I_\omega}M_\omega^{(0)} \tag{4}$$

一般に外荷重として，曲げねじりモーメント $M_\omega^{(0)}$ よりもむしろねじりモーメント $M_z^{(0)}$ が与えられるのが普通であり，従って(4)式右辺の最終項を $M_z^{(0)}$ の関数で書き表わす方が，外力と垂直応力の関係が明確になって都合がよい．しかし，$M_z^{(0)}$ と $M_\omega^{(0)}$ の関係は一般に複雑となり，式の誘導に不便なので，ここでは $M_\omega^{(0)}$ の関数で表わしておく．$M_z^{(0)}$，$M_\omega^{(0)}$ の関係は付録参照．

**(b) 初期剪断応力 $\tau_{xz}^{(0)}$，$\tau_{yz}^{(0)}$**

はり理論では，はりの変位関数から計算される剪断応力は St. Venant のねじりによるものだけで，横荷重による剪断応力，曲げねじり変形による剪断応力は，別にはりの微小要素の釣合より求める必要がある．ここでは先ずこれらを別々に取り扱い，それらの和として初期剪断応力 $\tau_{xz}^{(0)}$，$\tau_{yz}^{(0)}$ を考えることにする．

**(i) St. Venant のねじりによって生ずる初期剪断応力 ${}_s\tau_{xz}^{(0)}$，${}_s\tau_{yz}^{(0)}$**

はり側面で0となるような応力関数 $\Phi_0$ より，${}_s\tau_{xz}^{(0)}$，${}_s\tau_{yz}^{(0)}$ は次式のように導かれる[6]ものとする．

$${}_s\tau_{xz}^{(0)}=\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}, \quad {}_s\tau_{yz}^{(0)}=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \tag{5}$$

薄肉開き断面に対して $\Phi_0$ は近似的に(6)式で示される[7]．

$$\Phi_0=G\left(\frac{t^2}{4}-n^2\right)\frac{d\theta_0}{dz} \tag{6}$$

St. Venant のねじりモーメント $M_s^{(0)}$ は

$$M_s^{(0)}=\int_A\left[{}_s\tau_{yz}^{(0)}(x-x_s)-{}_s\tau_{xz}^{(0)}(y-y_s)\right]dA \tag{7}$$

であり，(5)式を代入して部分積分を行なうと

$$M_s^{(0)}=2\int_A\Phi_0\,dA \tag{8}$$

と応力関数で表わされる．

(8)式に(6)式を代入すると，

$$M_s^{(0)}=\frac{1}{3}Gt^3s_b\frac{d\theta_0}{dz}=GJ\frac{d\theta_0}{dz} \tag{9}$$

となる．ここで，$s_b$ は $s$ 軸に沿って測った中央面の長さであり，$J$ はねじり剛性係数である．

**(ii) 横荷重および曲げねじれ変形による初期剪断応力 ${}_z\tau^{(0)}_{xz}$, ${}_z\tau^{(0)}_{yz}$**

Fig. 2 に示すように，はりから切り出した微小要素の $z$ 方向の釣合を考える．薄肉断面ばりを対象にしているから，垂直応力 $\bar{\sigma}_z^{(0)}$，剪断応力 ${}_z\tau^{(0)}$ とも肉厚方向に変化していないと仮定出来る．

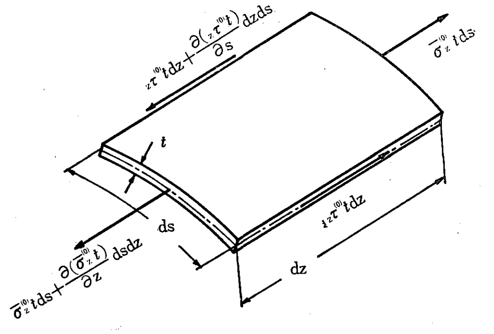


Fig. 2

従って，微小要素の $z$ 方向釣合式は，

$$\frac{\partial\left(\bar{\sigma}_z^{(0)}t\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left({}_z\tau^{(0)}t\right)}{\partial s}=0 \qquad (10)$$

となり，これより ${}_z\tau^{(0)}$ が次のように求まる．

$${}_z\tau^{(0)}=-\frac{1}{t}\int_0^s\frac{\partial\left(\bar{\sigma}_z^{(0)}t\right)}{\partial z}ds \qquad (11)$$

ここで，$s=0$ で ${}_z\tau^{(0)}t=0$，すなわち $s=0$ の辺には外力が作用していないものとしている．$\bar{\sigma}_z^{(0)}$ ははりの曲げおよび曲げねじれ変形に伴なう垂直応力で，

$$\bar{\sigma}_z^{(0)}=-\frac{x}{I_x}M_y^{(0)}+\frac{y}{I_y}M_x^{(0)}+\frac{\omega}{I_\omega}M_\omega^{(0)} \qquad (12)$$

である．

${}_z\tau^{(0)}$ の $x$，$y$ 方向成分は，断面中央面上の任意点 $M$ で引いた $s$ 軸の接線と $x$ 軸のなす角を $\alpha$ とすると (Fig. 1 参照)，

$$\begin{aligned}{}_z\tau_{xz}^{(0)}&={}_z\tau^{(0)}\cos\alpha\\ {}_z\tau_{yz}^{(0)}&={}_z\tau^{(0)}\sin\alpha\end{aligned} \qquad (13)$$

で表わされる．

全初期剪断応力 $\tau_{xz}^{(0)}$，$\tau_{yz}^{(0)}$ は上記両剪断応力 5)式および(13)式の和である．

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(0)}&={}_s\tau_{xz}^{(0)}+{}_z\tau_{xz}^{(0)}\\ \tau_{yz}^{(0)}&={}_s\tau_{yz}^{(0)}+{}_z\tau_{yz}^{(0)}\end{aligned} \qquad (14)$$

## 3. 座屈変位および歪成分

座屈によるはり内任意点の $x, y, z$ 方向変位 $U(x, y, z)$，$V(x, y, z)$，$W(x, y, z)$ は，断面の剪断中心の $x, y$ 方向変位 $u(z)$，$v(z)$ および剪断中心まわりの回転角 $\theta(z)$ により，(15)式のように表わされる．

$$\begin{aligned}U&=u-(y-y_s)\theta\\ V&=v+(x-x_s)\theta\\ W&=-x\frac{du}{dz}-y\frac{dv}{dz}+\omega\frac{d\theta}{dz}\end{aligned} \qquad (15)$$

ここで，座屈によるはりの図心軸長さは変わらないものとする．

これらの変位による歪成分 $\varepsilon_z$，$\varepsilon_{xz}$，$\varepsilon_{yz}$ を非線形項まで書くと，それぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned}\varepsilon_z&=e_z+\bar{e}_z\\ &=\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]\\ &=e_z+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\underline{e_z{}^2}\right]\\ \varepsilon_{xz}&=e_{xz}+\bar{e}_{xz}\\ &=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}+\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z}\right]\\ &=e_{xz}+\left[\underline{e_x\frac{\partial U}{\partial z}}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}+\underline{\frac{\partial W}{\partial x}e_z}\right]\\ \varepsilon_{yz}&=e_{yz}+\bar{e}_{yz}\\ &=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}+\left[\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z}\right]\\ &=e_{yz}+\left[\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\underline{e_y\frac{\partial V}{\partial z}}+\underline{\frac{\partial W}{\partial y}e_z}\right]\end{aligned} \qquad (16)$$

(16)式中＿＿の項はいずれも線形の歪を含んでいるので，他の項と比較すると小さく，従来のはり理論では無視されている．しかし文献(4)のように，ねじりモーメントによるはりの座屈に関する微分方程式を導く場合には，(16)式中の＿＿項を無視することは出来ない．

ここでは従来のはり理論に従って，簡単化された歪成分を用いることにする．変位成分(15)式を用いると，(16)式は

$$\begin{aligned}\varepsilon_z&=e_z+\bar{e}_z\\ &=-x\frac{d^2u}{dz^2}-y\frac{d^2v}{dz^2}+\omega\frac{d^2\theta}{dz^2}\\ &\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{du}{dz}-(y-y_s)\frac{d\theta}{dz}\right]^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{dv}{dz}+(x-x_s)\frac{d\theta}{dz}\right]^2\\ \varepsilon_{xz}&=e_{xz}+\bar{e}_{xz}\\ &=-\left(y-y_s-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\frac{d\theta}{dz}+\theta\left[\frac{dv}{az}+(x-x_s)\frac{d\theta}{dz}\right]\end{aligned} \qquad (17)$$

$$\varepsilon_{yz}=e_{yz}+\bar{e}_{yz}$$
$$=\left(x-x_s+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\theta}{dz}-\theta\left[\frac{du}{dz}-(y-y_s)\frac{d\theta}{dz}\right]$$

と歪成分が $u, v, \theta$ で書き表わされる．

## 4. 荷重および境界条件

$z=0$ 断面で完全に固定されたはりに，次のような荷重が作用するものとする．

(i) 断面内の点 $(x_1, y_1)$ に $x, y, z$ 方向に分布荷重 $\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z$ が作用する．

(ii) $z=l$ 断面内の点 $(x_2, y_2)$ に $x, y, z$, 方向に $\bar{P}_x$, $\bar{P}_y$, $\bar{P}_z$ が作用する．

(iii) $z=l$ 断面で $x, y$ 軸まわりに曲げモーメント $\bar{M}_x, \bar{M}_y$ が，剪断中心まわりにねじりモーメント $\bar{M}_z$ が作用する．

$z=0$ 断面は完全に固定であるから，

$$u=v=\theta=0 \qquad \frac{du}{dz}=\frac{dv}{dz}=\frac{d\theta}{dz}=0$$

なる幾何学的境界条件が与えられている．

また，はりは長さ方向に一定な断面を有するものとする．

## 5. 座屈に関する基礎方程式の誘導

4節で示した外荷重が作用し，初期応力（(4),(14)式）が存在するはりの座屈に関する仮想仕事の原理は，次のように書ける[5]．

$$\int_V \left[(\sigma_z+\sigma_z^{(0)})\,\delta(e_z+\bar{e}_z)+(\tau_{xz}+\tau_{xz}^{(0)})\,\delta(e_{xz}+\bar{e}_{xz})+(\tau_{yz}+\tau_{yz}^{(0)})\delta(e_{yz}+\bar{e}_{yz})\right]dV$$
$$-\int_0^l \bar{q}_x\delta\left[u-(y_1-y_s)\theta\right]dz$$
$$-\int_0^l \bar{q}_y\delta\left[v+(x_1-x_s)\theta\right]dz$$
$$-\int_0^l \bar{q}_z\delta\left[-x_1\frac{du}{dz}-y_1\frac{dv}{dz}+\omega_1\frac{d\theta}{dz}\right]dz$$
$$-\left|\bar{P}_x\,\delta[u-(y_2-y_s)\theta]\right|^l$$
$$-\left|\bar{P}_y\,\delta[v+(x_2-x_s)\theta]\right|^l$$
$$-\left|\bar{P}_z\,\delta\left(-x_2\frac{du}{dz}-y_2\frac{dv}{dz}+\omega_2\frac{d\theta}{dz}\right)\right|^l$$
$$-\left|\bar{M}_y\delta\left(\frac{du}{dz}\right)\right|^l-\left|-\bar{M}_x\delta\left(\frac{dv}{dz}\right)\right|^l$$
$$-\left|\bar{M}_z\delta\theta\right|^l=0 \tag{18}$$

ここで，$\sigma_z$, $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ は座屈変形によって生じた歪に対応する応力であり，$\omega_1$，$\omega_2$ は点 $(x_1, y_1)$，点 $(x_2, y_2)$ の曲げねじれ関数の値である．また，$|\ |^l$ は $z=l$ の値を示す．

(18)式の体積積分項は，はりの内力による仮想仕事である．$z$ に関する積分項以降は外荷重による仮想仕事である．

(18) 式で $\sigma_z\delta\bar{e}_z$，$\tau_{xz}\delta\bar{e}_{xz}$，$\tau_{yz}\delta\bar{e}_{yz}$ は座屈変位 $u$, $v, \theta$ に関する3次以上の項で，他の項と比較し小さいので無視すると，(18)は次のよう式になる．

$$\int_V[\sigma_z\delta e_z+\tau_{xz}\delta e_{xz}+\tau_{yz}\delta e_{yz}]\,dV$$
$$+\int_V[\sigma_z^{(0)}\delta\bar{e}_z+\tau_{xz}^{(0)}\delta\bar{e}_{xz}+\tau_{yz}^{(0)}\delta\bar{e}_{yz}]dV$$
$$+\int_V[\sigma_z^{(0)}\delta e_z+\tau_{xz}^{(0)}\delta e_{xz}+\tau_{yz}^{(0)}\delta e_{yz}]dV$$
$$-\int_0^l\bar{q}_x[\delta u-(y_1-y_s)\delta\theta]dz$$
$$-\int_0^l\bar{q}_y[\delta v+(x_1-x_s)\delta\theta]dz$$
$$-\int_0^l\bar{q}_z[-x_1\frac{d\delta u}{dz}-y_1\frac{d\delta v}{dz}+\omega_1\frac{d\delta\theta}{dz}]\,dz$$
$$-\left|\bar{P}_x[\delta u-(y_2-y_s)\delta\theta]\right|^l-\left|\bar{P}_y[\delta v+(x_2-x_s)\delta\theta]\right|^l$$
$$-\left|\bar{P}_z\left(-x_2\frac{d\delta u}{dz}-y_2\frac{d\delta v}{dz}+\omega_2\frac{d\delta\theta}{dz}\right)\right|^l$$
$$-\left|\bar{M}_y\frac{d\delta u}{dz}\right|^l-\left|-\bar{M}_x\frac{d\delta v}{dz}\right|^l-\left|\bar{M}_z\delta\theta\right|^l=0 \tag{19}$$

(19) 式で体積積分の第3積分項以降に注目し，歪を変位成分で表わし，部分積分を行なうと

$$\int_V\left[\sigma_z^{(0)}\left(-x\frac{d^2\delta u}{dz^2}-y\frac{d^2\delta v}{dz^2}+\omega\frac{d^2\delta\theta}{dz^2}\right)\right.$$
$$-\tau_{xz}^{(0)}\left(y-y_s-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\frac{d\delta\theta}{dz}$$
$$\left.+\tau_{yz}^{(0)}\left(x-x_s+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\delta\theta}{dz}\right]dV$$
$$-\int_0^l\bar{q}_x\,[\delta u-(y_1-y_s)\,\delta\theta]dz$$
$$-\int_0^l\bar{q}_y[\delta v+(x_1-x_s)\,\delta\theta]\,dz$$
$$-\int_0^l\bar{q}_z\left[-x_1\frac{d\delta u}{dz}-y_1\frac{d\delta v}{dz}+\omega_1\frac{d\delta\theta}{dz}\right]dz$$
$$-\left|\bar{P}_x[\delta u-(y_2-y_s)\delta\theta]\right|^l-\left|\bar{P}_y\,[\delta v+(x_2-x_s)\delta\theta]\right|^l$$
$$-\left|\bar{P}_z\left(-x_2\frac{d\delta u}{dz}-y_2\frac{d\delta v}{dz}+\omega_2\frac{d\delta\theta}{dz}\right)\right|^l$$
$$-\left|\bar{M}_y\frac{d\delta u}{dz}\right|^l+\left|\bar{M}_x\frac{d\delta v}{dz}\right|^l-\left|\bar{M}_z\delta\theta\right|^l$$
$$=\left|\left(M_y^{(0)}-\bar{M}_y+x_2\bar{P}_z\right)\frac{d\delta u}{dz}\right|^l$$
$$+\left|\left(-\frac{dM_y^{(0)}}{dz}-\bar{P}_x+x_1\bar{q}_z\right)\delta u\right|^l$$
$$+\left|\left(-M_x^{(0)}+\bar{M}_x+y_2\bar{P}_z\right)\frac{d\delta v}{dz}\right|^l$$
$$+\left|\left(\frac{dM^{\ 0)}}{dz}-\bar{P}_y+y_1q_z\right)\delta v\right|^l$$
$$+\left|\left(M_\omega^{(0)}-\omega_2\bar{P}_z\right)\frac{d\delta\theta}{dz}\right|^l$$
$$+\left|\left[-\frac{dM_\omega^{(0)}}{dz}+M_s^{(0)}-\bar{M}_z+\bar{P}_x(y_3-y_s)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\bar{P}_y(x_2-x_s)-\omega_1\bar{q}_z\right]\delta\theta\right|^l$$
$$+\int_0^l\left(\frac{d^2M_y^{(0)}}{dz^2}-\bar{q}_x-x_1\frac{d\bar{q}_z}{dz}\right)\delta u\,dz$$
$$+\int_0^l\left(-\frac{d^2M_x^{(0)}}{dz^2}-\bar{q}_y-y_1\frac{d\bar{q}_z}{dz}\right)\delta v\,dz$$

$$+\int_0^l\left[\frac{d^2M_\omega^{(0)}}{dz^2}-\frac{dM_s^{(0)}}{dz}+\bar{q}_x(y_1-y_s)-\bar{q}_y(x_1-x_s)+\omega_1\frac{d\bar{q}_z}{dz}\right]\delta\theta\,dz$$

と変形される．上式で各仮想変位に対応している力学条件式は，それぞれ座屈変形前のはりに関する平衡方程式，境界条件（$z=l$ 断面）であり，仮想変位によるポ テンシャルエネルギ の増加には無関係である．

結局はりの座屈に関する仮想仕事の原理は

$$\int_V[\sigma_z\delta e_z+\tau_{xz}\delta e_{xz}+\tau_{yz}\delta e_{yz}]dV+\int_V[\sigma_z^{(0)}\delta\bar{e}_z+\tau_{xz}^{(0)}\delta\bar{e}_{xz}+\tau_{yz}^{(0)}\delta\bar{e}_{yz}]dV=0 \qquad (20)$$

と表わすことが出来る．(20)式の第1積分項は，はりの座屈変形に対する内力の仮想仕事であり，第2積分項は初期応力と歪の非線形項からなる初期応力の仮想仕事である．

(20)式にフックの法則を適用し，初期応力が座屈変形により変化しないことを考慮すると，

$$\delta\int_V\left[\frac{1}{2}Ee_z^2+\frac{1}{2}Ge_{xz}^2+\frac{1}{2}Ge_{yz}^2+\sigma_z^{(0)}\bar{e}_z+\tau_{xz}^{(0)}\bar{e}_{xz}+\tau_{yz}^{(0)}\bar{e}_{yz}\right]dV=0 \qquad (21)$$

となる．全ポテンシャルエネルギとして$\Pi$を定義すると，(21)式は次のように表わされる．

$$\delta\Pi=0 \qquad (22)$$

ここで，

$$\Pi=\int_V\left[\frac{1}{2}Ee_z^2+\frac{1}{2}G\left(e_{xz}^2+e_{yz}^2\right)+\sigma_z^{(0)}\bar{e}_z+\tau_{xz}^{(0)}\bar{e}_{xz}+\tau_{yz}^{(0)}\bar{e}_{yz}\right]dV \qquad (23)$$

であり，$G$は材料の横弾性係数である．

座屈直前の応力分布状態を知れば，(21)式よりエネルギの直接解法(8) によっても座屈解析を行なうことが出来る．

ここでは4節の境界条件のもとで，汎関数(23)式を極値にする $u, v, \theta$ が満足するオイラーの方程式（はりの座屈に関する微分方程式）を，(22)式すなわち仮想仕事の原理(20)式より求めるのが目的である．

先ず(20)式の歪に(17)式を代入する．

$$\int_V\left[\sigma_z\left(-x\frac{d^2\delta u}{dz^2}-y\frac{d^2\delta v}{dz^2}+\omega\frac{d^2\delta\theta}{dz^2}\right)-\tau_{xz}\left(y-y_s-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\frac{d\delta\theta}{dz}+\tau_{yz}\left(x-x_s+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\delta\theta}{dz}\right]dV$$

$$+\int_V\sigma_z^{(0)}\left[\left\{\frac{du}{dz}-(y-y_s)\frac{d\theta}{dz}\right\}\left\{\frac{d\delta u}{dz}-(y-y_s)\frac{d\delta\theta}{dz}\right\}+\left\{\frac{dv}{dz}+(x-x_s)\frac{d\theta}{dz}\right\}\left\{\frac{d\delta v}{dz}+(x-x_s)\frac{d\delta\theta}{dz}\right\}\right]dV$$

$$+\int_V\tau_{xz}^{(0)}\left[\theta\left\{\frac{d\delta v}{dz}+(x-x_s)\frac{d\delta\theta}{dz}\right\}+\left\{\frac{dv}{dz}+(x-x_s)\frac{d\theta}{dz}\right\}\delta\theta\right]dV$$

$$-\int_V\tau_{yz}^{(0)}\left[\theta\left\{\frac{d\delta u}{dz}-(y-y_s)\frac{d\delta\theta}{dz}\right\}+\left\{\frac{du}{dz}-(y-y_s)\frac{d\theta}{dz}\right\}\delta\theta\right]dV=0 \qquad (24)$$

はり理論であるから，(24)式の体積積分を断面の面積積分とはりの長さ方向の積分に分け，先ず面積積分を行ない $z$ のみの関係式にする．

$$\int_0^l\left(M_y\frac{d^2\delta u}{dz^2}-M_x\frac{d^2\delta v}{dz^2}+M_\omega\frac{d^2\delta\theta}{dz^2}+M_s\frac{d\delta\theta}{dz}\right)dz$$

$$+\int_0^l\left[\left\{P_z^{(0)}\frac{du}{dz}-\left(M_x^{(0)}-y_sP_z^{(0)}\right)\frac{d\theta}{dz}\right\}\frac{d\delta u}{dz}+\left\{P_z^{(0)}\frac{dv}{dz}-\left(M_y^{(0)}+x_sP_z^{(0)}\right)\frac{d\theta}{dz}\right\}\frac{d\delta v}{dz}\right.$$

$$+\left\{-\left(M_x^{(0)}-y_sP_z^{(0)}\right)\frac{du}{dz}-\left(M_y^{(0)}+x_sP_z^{(0)}\right)\frac{dv}{dz}+\left(\gamma^2P_z^{(0)}+\beta_xM_x^{(0)}-\beta_yM_y^{(0)}+\beta_\omega M_\omega^{(0)}\right)\frac{d\theta}{dz}\right\}$$

$$\left.\times\frac{d\delta\theta}{dz}\right]dz$$

$$+\int_0^l\left[\left(\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA\right)\theta\frac{d\delta v}{dz}-\left(\int_A\tau_{yz}^{(0)}dA\right)\theta\frac{d\delta u}{dz}\right]dz$$

$$+\int_0^l\left[\int_A\{\tau_{xz}^{(0)}(x-x_s)+\tau_{yz}^{(0)}(y-y_s)\}dA\times\theta\frac{d\delta\theta}{dz}\right]dz$$

$$+\int_0^l\left[\left\{\left(\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA\right)\frac{dv}{dz}-\left(\int_A\tau_{yz}^{(0)}dA\right)\frac{du}{dz}\right\}\times\delta\theta\right]dz$$

$$+\int_0^l\left[\int_A\{\tau_{xz}^{(0)}(x-x_s)+\tau_{yz}^{(0)}(y-y_s)\}dA\times\frac{d\theta}{dz}\delta\theta\right]dz=0 \qquad (25)$$

ここで，座屈変形によって生ずる断面力はそれぞれ，

$$\int_A\sigma_z x\,dA=-M_y=-EI_x\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$\int_A\sigma_z y\,dA=M_x=-EI_y\frac{d^2v}{dz^2} \qquad (26)$$

$$\int_A\sigma_z\omega\,dA=M_\omega=EI_\omega\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

$$\int_A\left[\tau_{yz}\left(x-x_s+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)-\tau_{xz}\left(y-y_s-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right]dA=M_s=GJ\frac{d\theta}{dz}$$

である．

また，$\gamma^2, \beta_x, \beta_y, \beta_\omega$ は断面の特性を表わす断面定数で次のように定義する．

$$\gamma^2=\frac{1}{A}(I_x+I_y)+x_s^2+y_s^2$$

$$\beta_x=\frac{1}{I_y}\int_A y(x^2+y^2)dA-2y_s$$

$$\beta_y=\frac{1}{I_x}\int_A x(x^2+y^2)dA-2x_s \qquad (27)$$

$$\beta_\omega=\frac{1}{I_\omega}\int_A \omega(x^2+y^2)dA$$

(26)式を(25)式に代入し，部分積分を行ない，4節の境界条件を考慮すると，

$$\left|\left(EI_x\frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{d\delta u}{dz}\right|^l$$
$$+\left|\left[-EI_x\frac{d^3u}{dz^3}+P_z^{(0)}\left(\frac{du}{dz}+y_s\frac{d\theta}{dz}\right)-M_x^{(0)}\frac{d\theta}{dz}-\left(\int_A\tau_{yz}^{(0)}dA\right)\theta\right]\delta u\right|^l$$
$$+\left|\left(EI_y\frac{d^2v}{dz^2}\right)\frac{d\delta v}{dz}\right|^l$$
$$+\left|\left[-EI_y\frac{d^3v}{dz^3}+P_z^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}-x_s\frac{d\theta}{dz}\right)-M_y^{(0)}\frac{d\theta}{dz}+\left(\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA\right)\theta\right]\delta v\right|^l$$
$$+\left|\left(EI_\omega\frac{d^2\theta}{dz^2}\right)\frac{d\delta\theta}{dz}\right|^l$$
$$+\left|\left[-EI_\omega\frac{d^3\theta}{dz^3}+GJ\frac{d\theta}{dz}+P_z^{(0)}\left(\gamma^2\frac{d\theta}{dz}+y_s\frac{du}{dz}-x_s\frac{dv}{dz}\right)-M_x^{(0)}\left(\frac{du}{dz}-\beta_x\frac{d\theta}{dz}\right)-M_y^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}+\beta_y\frac{d\theta}{dz}\right)+M_\omega^{(0)}\beta_\omega\frac{d\theta}{dz}+\int_A\{\tau_{xz}^{(0)}(x-x_s)+\tau_{yz}^{(0)}(y-y_s)\}dA\,\theta\right]\delta\theta\right|^l$$
$$+\int_0^l\left[EI_x\frac{d^4u}{dz^4}-\frac{d}{dz}\left\{P_z^{(0)}\left(\frac{du}{dz}+y_s\frac{d\theta}{dz}\right)\right\}+\frac{d}{dz}\left(M_x^{(0)}\frac{d\theta}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left\{\left(\int_A\tau_{yz}^{(0)}dA\right)\theta\right\}\right]\delta u dz$$
$$+\int_0^l\left[EI_y\frac{d^4v}{dz^4}-\frac{d}{dz}\left\{P_z^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}-x_s\frac{d\theta}{dz}\right)\right\}+\frac{d}{dz}\left(M_y^{(0)}\frac{d\theta}{dz}\right)-\frac{d}{dz}\left\{\left(\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA\right)\theta\right\}\right]\delta v dz$$
$$+\int_0^l\left[EI_\omega\frac{d^4\theta}{dz^4}-GJ\frac{d^2\theta}{dz^2}-\frac{d}{dz}\left\{P_z^{(0)}\left(\gamma^2\frac{d\theta}{dz}+y_s\frac{du}{dz}-x_s\frac{dv}{dz}\right)\right\}+\frac{d}{dz}\left\{M_x^{(0)}\left(\frac{du}{dz}-\beta_x\frac{d\theta}{dz}\right)\right\}+\frac{d}{dz}\left\{M_y^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}+\beta_y\frac{d\theta}{dz}\right)\right\}-\frac{d}{dz}\left(M_\omega^{(0)}\beta_\omega\frac{d\theta}{dz}\right)-\int_A\left\{\frac{\partial\tau_{xz}^{(0)}}{\partial z}(x-x_s)+\frac{\partial\tau_{yz}^{(0)}}{\partial z}(y-y_s)\right\}dA\,\theta+\left(\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA\right)\frac{dv}{dz}-\left(\int_A\tau_{yz}^{(0)}dA\right)\frac{du}{dz}\right]\delta\theta\, dz=0 \qquad (28)$$

となる．

(28)式に含まれる初期剪断応力に関する面積積分は，次のように考えることにより初期断面力で表わされる．

$$\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA=\int_A({}_s\tau_{xz}^{(0)}+{}_z\tau_{xz}^{(0)})dA$$
$$=\int_A\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}+{}_z\tau^{(0)}\cos\alpha\right)dA$$
$$=\left|{}_z\tau^{(0)}xt\right|_0^{s_b}-\int_0^{s_b}\frac{\partial({}_z\tau^{(0)}t)}{\partial s}xds \qquad (29)$$

ここで，薄肉断面であるから$dA=tds$，また$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$および$\Phi_0$ははり側面で0であることを考慮してある．

$s=0$，$s=s_b$で${}_z\tau^{(0)}t=0$，すなわちはり断面のフランジ先端に外荷重が作用していないとすると，(29)式は第2項のみが残る．

(29)式に(11)式を代入すると．

$$\int_A\tau_{xz}^{(0)}dA=\int_A\frac{\partial\bar{\sigma}_z^{(0)}}{\partial z}xdA=-\frac{dM_y^{(0)}}{dz} \qquad (30)$$

となり，剪断応力の断面全体にわたる積分は，St. Venant のねじりによる剪断応力，および曲げねじり剪断応力に関係せず，その断面の剪断力に等しい．

同様にして，$\tau_{yz}^{(0)}$の合力は$y$方向剪断力である．

$$\int_A\tau_{yz}^{(0)}dA=\int_A\frac{\partial\bar{\sigma}_z^{(0)}}{\partial z}y\,dA=\frac{dM_x^{(0)}}{dz} \qquad (31)$$

また，$z=l$断面で

$$\int_A\left[\tau_{xz}^{(0)}(x-x_s)+\tau_{yz}^{(0)}(y-y_s)\right]_{z=l}dA$$
$$=\int_A\tau_{z=l}^{(0)}\left[(x-x_s)\cos\alpha+(y-y_s)\sin\alpha\right]dA$$
$$=\int_0^{s_b}\tau_{z=l}^{(0)}f_s(s)t\,ds \qquad (32)$$

ここで，$f_s$は剪断中心より断面内の任意点Mの接線に下した垂線とM点間の距離で，sの関数である．(Fig.1 参照)．

$z=l$断面では，$s=s_2$の点すなわち点$(x_2, y_2)$に剪断力$\bar{P}_x$，$\bar{P}_y$が作用しているから，それらのs方向の合力を$\bar{P}_s$とすると，δ関数を使って(32)式は

$$\int_A\left[\tau_{xz}^{(0)}(x-x_s)+\tau_{yz}^{(0)}(y-y_s)\right]_{z=l}dA$$
$$=\int_0^{s_b}\bar{P}_s\delta(s-s_2)f_s(s)ds$$
$$=\bar{P}_sf_s(s_2)$$
$$=\bar{P}_s[(x_2-x_s)\cos\alpha_2+(y_2-y_s)\sin\alpha_2]$$
$$=\bar{P}_x(x_2-x_s)+\bar{P}_y(y_2-y_s) \qquad (33)$$

と$\bar{P}_x$，$\bar{P}_y$で表わされる．

最後に，$\tau_{xz}^{(0)}$，$\tau_{yz}^{(0)}$の$z$に関する微分項は，はりの微小要素（Fig.3 参照）の$s$方向釣合を考えることにより，はりに作用している分布横荷重に関係してい

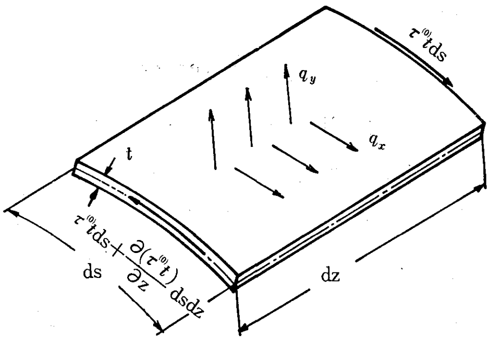


Fig. 3

ることがわかる．

いま $x$, $y$ 方向に分布荷重 $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ が作用していて，これらの s 方向の成分を $p_s$ とする．微小要素の s 方向釣合式は

$$\frac{\partial(\tau^{(0)}t)}{\partial z}=-\bar{p}_s \tag{34}$$

である．

(28)式中の剪断応力の $z$ に関する微分項は，

$$\int_A\left[\frac{\partial\tau_{xz}^{(0)}}{\partial z}(x-x_s)+\frac{\partial\tau_{yz}^{(0)}}{\partial z}(y-y_s)\right]dA$$
$$=\int_0^{s_b}\frac{\partial(\tau^{(0)}t)}{\partial z}\left[(x-x_s)\cos\alpha+(y-y_s)\sin\alpha\right]ds$$
$$=\int_0^{s_b}\frac{\partial(\tau^{(0)}t)}{\partial z}f_s(s)ds \tag{35}$$

(35)式に(34)式を代入すると，$\bar{p}_s$ の関数となる．しかるに，分布横荷重は $s=s_1$ の点，すなわち点 $(x_1, y_1)$ に $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ が作用しているので，それらの $s$ 方向合力を $\bar{q}_s$ とすると，$\delta$ 関数を用いることにより，(35)式は次のようになる．

$$\int_A\left[\frac{\partial\tau_{xz}^{(0)}}{\partial x}(x-x_s)+\frac{\partial\tau_{yz}^{(0)}}{\partial z}(y-y_s)\right]dA$$
$$=-\int_0^{s_b}\bar{p}_s f_s(s)\,ds$$
$$=-\int_0^{s_b}\bar{q}_s\delta(s-s_1)f_s(s)ds$$
$$=-\bar{q}_s f_s(s_1)$$
$$=-\left[\bar{q}_x(x_1-x_s)+\bar{q}_y(y_1-y_s)\right] \tag{36}$$

以上，(30)，(31)，(33)，(36)式を考慮して，はりの座屈に関する微分方程式および $z=l$ 断面での力学的境界条件が，(28)式より変分原理に従って求まる[8]．

微分方程式：

$$EI_x\frac{d^4u}{dz^4}-\frac{d}{dz}\left[P_z^{(0)}\left(\frac{du}{dz}+y_s\frac{d\theta}{dz}\right)\right]$$
$$+\frac{d^2}{dz^2}(M_x^{(0)}\theta)=0$$
$$EI_y\frac{d^4v}{dz^4}-\frac{d}{dz}\left[P_z^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}-x_s\frac{d\theta}{dz}\right)\right]$$
$$+\frac{d^2}{dz^2}(M_y^{(0)}\theta)=0$$
$$EI_\omega\frac{d^4\theta}{dz^4}-GJ\frac{d^2\theta}{dz^2}-\frac{d}{dz}\left[P_z^{(0)}\left(\gamma^2\frac{d\theta}{dz}+y_s\frac{du}{dz}\right.\right.$$
$$\left.\left.-x_s\frac{dv}{dz}\right)\right]+M_x^{(0)}\frac{d^2u}{dz^2}+M_y^{(0)}\frac{d^2v}{dz^2}-\frac{d}{dz}\left[\left(\beta_x M_x^{(0)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\beta_y M_y^{(0)}+\beta_\omega M_\omega^{(0)}\right)\frac{d\theta}{dz}\right]+\left[\bar{q}_x(x_1-x_s)\right.$$
$$\left.+\bar{q}_y(y_1-y_s)\right]\theta=0 \tag{37}$$

$z=l$ 断面の境界条件：

$$EI_x\frac{d^2u}{dz^2}=0$$
$$EI_x\frac{d^3u}{dz^3}-P_z^{(0)}\left(\frac{du}{dz}+y_s\frac{d\theta}{dz}\right)+\frac{d}{dz}(M_x^{(0)}\theta)=0$$
$$EI_y\frac{d^2v}{dz^2}=0$$
$$EI_y\frac{d^3v}{dz^3}-P_z^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}-x_s\frac{d\theta}{dz}\right)+\frac{d}{dz}(M_y^{(0)}\theta)=0$$
$$EI_\omega\frac{d^2\theta}{dz^2}=0 \tag{38}$$
$$EI_\omega\frac{d^3\theta}{dz^3}-GJ\frac{d\theta}{dz}-P_z^{(0)}\left(\gamma^2\frac{d\theta}{dz}+y_s\frac{du}{dz}\right.$$
$$\left.-x_s\frac{dv}{dz}\right)+M_x^{(0)}\left(\frac{du}{dz}-\beta_x\frac{d\theta}{dz}\right)+M_y^{(0)}\left(\frac{dv}{dz}\right.$$
$$\left.+\beta_y\frac{d\theta}{dz}\right)\underline{-M_\omega^{(0)}\beta_\omega\frac{d\theta}{dz}}$$
$$-\left[\bar{P}_x(x_2-x_s)+\bar{P}_y(y_2-y_s)\right]\theta=0$$

(37)式が任意荷重による薄肉開き断面をもつはりの，座屈に関する一般的な微分方程式である．はりの面内曲げ座屈，ねじれ座屈，曲げねじれ座屈のいずれの座屈解析にも適用することが出来る．また(38)式は，はり端での力学的境界条件である．

文献(3)では，荷重状態すなわち座屈の種類により微分方程式が別個に誘導されているが，それらを綜合すると上記(37)式と完全に一致している．文献(4)では，初期垂直応力の一要素である曲げねじりの項 $\frac{\omega}{I_\omega}M_\omega^{(0)}$ を無視しているので，微分方程式には $M_\omega^{(0)}$ に関係した項を含んでいない．しかし同文献では，$x$, $y$ 方向の曲げ変形に関して，ねじりモーメント $M_z^{(0)}$ の影響が考慮されており，ねじりモーメントによるはりの座屈を取扱うには，当然それらの項を考慮しなければならない．前述のように，$M_z^{(0)}$ の影響を考えるには，$\frac{\partial W}{\partial x}e_z$, $\frac{\partial W}{\partial y}e_z$ の項をも含めた剪断歪を用いる必要があり，その場合初期応力と初期断面力の関係が複雑になる．

力学的境界条件(38)式のうち——項を無視した式が，従来はりのねじりモーメントに関する座屈の境界条件として用いられている．断面形状が $x$, $y$ 軸に関して

対称（二軸対称断面）などの場合には関係ないが，非対称断面の場合には無視出来ない。

## 6. まとめ

座屈直前の応力を初期応力とし，そのような初期応力が存在するはりの変形問題を考えることにより，はりの一般的な微分方程式および境界条件を求めた．

(i) 初期応力の概念を用いると，はりの座屈に関する微分方程式および境界条件を，変分原理に従って数学的に導くことが出来，誘導の途中で無視する微小項の検討も可能である．

(ii) 初期剪断応力を St. Venant のねじりによる剪断応力と，横荷重による剪断応力，および曲げねじり剪断応力に分解して考えることにより，それらの合力である初期断面力との関係が明確になった．

(iii) ねじりモーメントに関する正確な境界条件が求められた．

さらに今後の問題として，ねじりモーメント $M_z^{(0)}$ の影響を考慮したより一般的な座屈方程式の誘導，薄肉の閉じた断面ばりの場合の検討がある．またこの方法を薄肉断面の曲線ばりに適用し，曲線ばりに関する一般的な座屈方程式および境界条件を求めることも重要な研究課題である．

## 7. 文　献

(1) S. Timoshenko and J. M. Gere: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co. (1961)

(2) F. Bleich : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co. (1952)

(3) V. Z. Vlasov: Thin-Walled Elastic Beams, National Science Foundation (1961)

(4) 川井忠彦：薄肉開断面材の安定に関する一般的理論，学位論文（昭36）

(5) K. Washizu : Variational Principle in Continuum Mechanics ,Univ. Washington Dept. Aero. Eng. Report 62-2 (1962), 52

(6) S. Timoshenko and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, McGraw-Hill BooK Co. (1951). 261

(7) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，第110号，（昭39）

(8) 林毅，村外志夫：変分法，コロナ社（昭36）

## 8 付　録

ねじりモーメント $M_z^{(0)}$, St. Venant のねじりモーメント $M_s^{(0)}$，曲げねじりモーメント $M_\omega^{(0)}$ の関係．

外荷重による任意断面のねじりモーメントを $M_z^{(0)}$ とすると，その断面での $M_s^{(0)}$，$M_\omega^{(0)}$ の間には次の関係がある．

$$-\frac{dM_\omega^{(0)}}{dz}+M_s^{(0)}=M_z^{(0)} \qquad (A-1)$$

$M_\omega^{(0)}, M_s^{(0)}$ を回転角 $\theta_0$ で表わすと

$$\left.\begin{aligned} M_\omega^{(0)}&=EI_\omega\frac{d^2\theta_0}{dz^2}\\ M_s^{(0)}&=GJ\frac{d\theta_0}{dz}\end{aligned}\right\} \qquad (A-2)$$

である．

(A−2) 式を用い，(A−1) を $M_s^{(0)}$ の微分方程式に書き直す．

$$\frac{d^2M_s^{(0)}}{dz^2}-\frac{GJ}{EI_\omega}M_s^{(0)}=-\frac{GJ}{EI_\omega}M_z^{(0)} \qquad (A-3)$$

(A−3) 式より $M_s^{(0)}$ が $M_z^{(0)}$ の関数として求まり，式に含まれる二つの積分定数は，はり両端の境界条件より決まる．

境界条件は次の三通りが考えられる．

(a) $z=0, z=l$ 両断面で曲げねじれ変形を拘束する場合，

$$\frac{d\theta_0}{dz}=0,\ \text{すなわち}\ M_s^{(0)}=0$$

($b$) $z=0,\quad z=l$ 両断面で曲げねじりモーメントが0の場合，

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2}=0,\ \text{すなわち}\frac{dM_s^{(0)}}{dz}=0$$

(c) (a)，($b$) の混合の場合

$M_s^{(0)}$ が求まれば $M_\omega^{(0)}$ は

$$M_\omega^{(0)}=\frac{EI_\omega}{GJ}\frac{dM_s^{(0)}}{dz} \qquad (A-4)$$

によって $M_s^{(0)}$ の関数，従って，荷重によるねじりモーメント $M_z^{(0)}$ の関数で表わすことが出来る．