

周期荷重による円弧はりの面外不安定

築 地 恒 夫*

Instability of A Circular Beam due to Periodic Loads

by

Tsuneo TSUIJI

(Structural Engineering)

The dynamical out-of-plane instability of a circular beam with a thin-walled double symmetric cross-section due to uniformly distributed radial loads, $q=q_0+q_0\cos\tau t$, is investigated in the present paper.

The method proposed by Bolotin are used to determine the boundary of instability regions.

Equations used in analysis are nondimensionalized by using the characteristic values of the out-of-plane buckling and vibration of the circular beam. These nondimensionalized equations yield the unified instability regions for beams with different cross-sectional constants and central angles.

1. ま え が き

半径方向に作用する等分布荷重による円弧はりの面外座屈に関しては、すでに多くの研究がある。しかるに最近、時間に依存した荷重による構造物の安定、不安定問題が取り扱われるようになり、円弧はりに対しても、半径方向時間依存荷重による面内不安定の問題が研究されている¹⁾。

ここでは、時間に依存しない一様分布静荷重と、時間の周期関数で表わされる分布荷重とが、半径方向に同時に作用する場合の、円弧はりの面外不安定問題を取り扱う。

このような荷重が作用すると、作用周期荷重の円振動数と円弧はりの面外自由振動の円振動数との比がある特定な値の場合には、作用荷重の絶対値がはりの面外座屈荷重以下でも面外変形が誘起され、いわゆる係数励振不安定を起す。

この不安定の境界を決定するには、現在まだ研究の段階にあるが²⁾、その一方法として提案されている Bolotin の方法をここでは用いることにする。

円弧はりとは二軸対称断面を有するものとし、荷重は図心に作用する場合のみを取り扱う。断面定数、円弧はりの中心角の大きさ、作用する静分布荷重の大きさが、不安定境界におよぼす影響を調べた。

2. 基礎方程式

(a) 動不安定に関する微分方程式

座標は Fig. 1 のように、円弧はりの図心線に沿って z 軸、 z 軸の曲率中心方向に x 軸、 y 軸を x 、 z 軸と右手系をなすように定める。

ここで取り扱う円弧はりとは、薄肉の二軸対称断面を有し、断面の主軸は x 、 y 軸と一致しているものとする。また、はりの断面形状は長さ方向に変化していないものとする。 z 軸の曲率半径は R である。

はりとは両端で、 y 軸まわりの回転は可能であるが、 x 、 z 軸まわりの回転は拘束され、しかも x 、 y 方向変位もまた拘束されている場合を取り扱う。

荷重は断面の図心に、周期的に変動する分布荷重と一様分布静荷重が同時に x 方向に作用するものとする (Fig. 1 参照)。

上記荷重によって生ずる円弧はりの面外不安定振動を表わす微分方程式は、分布静荷重による円弧はりの面外座屈に関する微分方程式³⁾に、慣性力の項を付加することにより、次のように表わされる。

$$EI_y \left(\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + EI_\omega \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \right) - GJ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

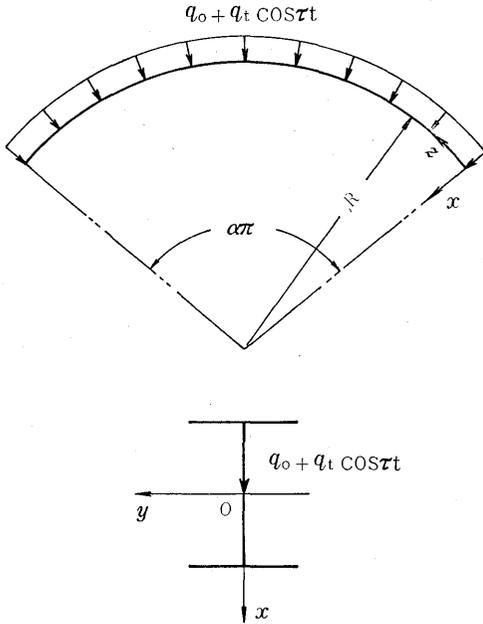


Fig. 1 Coordinates

$$\begin{aligned}
 &+ q(t)R \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\gamma^2}{R} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] \\
 &+ mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\
 EI_\omega \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \right) - EI_y \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right. \\
 &\left. - \frac{\theta}{R} \right) - GJ \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + q(t)R\gamma^2 \\
 &\times \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + mI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (1) a, b
 \end{aligned}$$

ここで、 v は図心の y 方向変位、 θ は Z 軸まわりの断面の回転角で、いずれも座標 z および t 時間の関数である。また、 A 、 I_x 、 I_y 、 I_ω 、 J 、 I_p 、 γ^2 はいずれも断面定数で、次の定義に従う。

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A dA, \quad I_x = \int_A x^2 dA, \quad I_y = \int_A y^2 dA, \\
 I_\omega &= \int_A \omega^2 dA \\
 J &= \int_A \left[\left(y - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dA, \\
 I_p &= I_x + I_y \\
 \gamma^2 &= \frac{1}{A} (I_x + I_y) \quad (2)
 \end{aligned}$$

ここで、 ω は断面の図心に関する単位曲げねじれ関数である。

(1) 式中の E 、 G は材料の縦弾性係数、横弾性係数であり、 m は円弧はりの質量である。

さらに、分布荷重 $q(t)$ は

$$q(t) = q_0 + q_t \cos \tau t \quad (3)$$

のように、時間に無関係な等分布静荷重 q_0 、および円振動数 τ 、振幅 q_t をもつ時間に依存した荷重 $q_t \cos \tau t$ からなる。

数値解析の都合上、(1) 式を次のように無次元表示する。

まず、変位および断面定数を無次元化して、それぞれ

$$V = \frac{v}{R}, \quad \theta = \theta, \quad L = \frac{z}{l}$$

$$C_\omega = \frac{EI_\omega}{EI_y R^2}, \quad C_j = \frac{GJ}{EI_y}, \quad C_r = \frac{\gamma^2}{R^2} \quad (4)$$

と表わす。ここに、 l は円弧はりの全長である。

つぎに、時間 t を、分布静荷重 q_0 作用下での円弧はりの一次面外自由振動の円振動数 $\beta(q_0)$ によって、次のように無次元化する。

$$T = \beta t$$

円弧はりの面外静座屈荷重 q_{cr} を用いて、荷重の大きさの割合を示す荷重パラメータ μ を(6)式のように定義する。

$$\mu = \frac{q_t}{q_{cr} - q_0} \quad (6)$$

(5)、(6) 式を用いると、荷重(3)式は次のように無次元表示される。

$$\frac{q}{q_{cr}} = Q + \mu(1-Q) \cos \Theta T \quad (7)$$

ここで、 $Q = \frac{q_0}{q_{cr}}$ 、 $\Theta = \tau/\beta$ である。

微分方程式(1)は、(4)、(5)、(7) 式を用いて次のように無次元表示される。

$$\begin{aligned}
 (1+C_\omega) \frac{\partial^4 V}{\partial L^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left[C_j - \lambda_k(1+C_r) \{ Q \right. \\
 \left. + \mu(1-Q) \cos \Theta T \} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} + \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \\
 + C_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial L^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left[(1+C_j) - \lambda_k C_r \{ Q \right. \\
 \left. + \mu(1-Q) \cos \Theta T \} \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial L^2} = 0 \\
 C_\omega \frac{\partial^4 V}{\partial L^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left[(1+C_j) - \lambda_k C_r \{ Q + \mu(1 \right. \\
 \left. - Q) \cos \Theta T \} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} + C_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial L^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\times \left[C_J - \lambda_k C_\gamma \{ Q + \mu(1-Q) \cos \theta T \} \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial L^2} \\ + \left(\frac{l}{R} \right)^4 \theta + \lambda_\omega^2 C_\gamma \left(\frac{l}{R} \right)^4 \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} = 0 \quad (8) a, b$$

ここに、 λ_k は分布静荷重による円弧はりの面外座屈固有値、 λ_ω は分布静荷重 q_0 作用下での、円弧はりの面外自由振動の第1固有値で、それぞれ次式で表わされる。

$$\lambda_k = \frac{qR^3}{EI_y}, \quad \lambda_\omega^2 = \frac{mAR^4}{EI_y} \beta^2 \quad (9) a, b$$

(b) 分布静荷重による面外座屈に関する微分方程式

周期的な荷重による円弧はりの動不安定を解析するにあたって、(8)式からわかるように、分布静荷重による座屈固有値 λ_k を求める必要がある。

(8)式で時間に関する項を無視し、変位 V , θ を L のみの関数と考えると、円弧はりの等分布荷重による面外座屈に関する微分方程式が、次のように得られる。

$$(1+C_\omega) \frac{d^4 V}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J \frac{d^2 V}{dL^2} + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 \\ \times (1+C_\gamma) \frac{d^2 V}{dL^2} + C_\omega \frac{d^4 \theta}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) \\ \times \frac{d^2 \theta}{dL^2} + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma \frac{d^2 \theta}{dL^2} = 0 \\ C_\omega \frac{d^4 V}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) \frac{d^2 V}{dL^2} \\ + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma \frac{d^2 V}{dL^2} + C_\omega \frac{d^4 \theta}{dL^4} \\ - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J \frac{d^2 \theta}{dL^2} + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma \frac{d^2 \theta}{dL^2} \\ + \left(\frac{l}{R} \right)^4 \theta = 0 \quad (10) a, b$$

ここで、 $Q=1$ である。

(c) 分布静荷重作用下での面外振動に関する微分方程式

静的な等分布荷重 q_0 が作用すると、円弧はりの面外自由振動の振動固有値は当然低下する。分布荷重作用下での円弧はりの面外振動を表わす微分方程式は、(8)式で時間に依存した荷重項を無視し、変位 V , θ を次のように仮定することにより得られる。

$$V = e^{iT} \bar{V}(L), \quad \theta = e^{iT} \bar{\theta}(L) \quad (11)$$

ここに、 \bar{V} , $\bar{\theta}$ は L のみの関数であり、 $i = \sqrt{-1}$ である。

微分方程式は、

$$(1+C_\omega) \frac{d^4 \bar{V}}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left[C_J - \lambda_k (1+C_\gamma) Q \right] \\ \times \frac{d^2 \bar{V}}{dL^2} - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 \bar{V} + C_\omega \frac{d^4 \bar{\theta}}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 \\ \times (1+C_J - \lambda_k C_\gamma Q) \frac{d^2 \bar{\theta}}{dL^2} = 0 \\ C_\omega \frac{d^4 \bar{V}}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J - \lambda_k C_\gamma Q) \frac{d^2 \bar{V}}{dL^2} \\ + C_\omega \frac{d^4 \bar{\theta}}{dL^4} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (C_J - \lambda_k C_\gamma Q) \frac{d^2 \bar{\theta}}{dL^2} \\ + \left(\frac{l}{R} \right)^4 \bar{\theta} - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 C_\gamma \bar{\theta} = 0 \quad (12) a, b$$

である。(12)式には等分布静荷重がパラメータとして含まれており、したがって求められた振動固有値 λ_ω は Q の関数である。

3. 解析法

微分方程式(8)の解として、次の級数解を仮定する。

$$V = \sum f_i(T) u_i(L), \quad \theta = \sum g_j(T) u_j(L) \\ (i=1,3,5) \quad (j=1,3,5) \quad (13)$$

ここで、 $u_p(p=1,3,5)$ は両端固定の真直なはりの曲げ振動に関する P 次の固有関数である。また、 f_i, g_j は時間 T の未知関数である。

(13)式を用い、(8)式にガレルキン法を適用すると、未知関数 f_i, g_j に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\sum_i \left[(1+C_\omega) F_{iI} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J G_{iI} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_\gamma) G_{iI} \{ Q + \mu(1-Q) \times \right. \\ \left. \cos \theta T \} \right] f_i + \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 \sum_i H_{iI} \frac{d^2 f_i}{dT^2} \\ + \sum_j \left[C_\omega F_{jI} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) G_{jI} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{jI} \{ Q + \mu(1-Q) \times \right. \\ \left. \cos \theta T \} \right] g_j = 0 \\ (i, I, j=1,3,5)$$

$$\sum_i \left[C_\omega F_{iJ} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) G_{iJ} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{iJ} \{ Q + \mu(1-Q) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \cos \Theta T \} \left[f_i + \sum_j \left[C_\omega F_{jJ} \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J G_{jJ} + \left(\frac{l}{R} \right)^4 H_{jJ} \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_j \{ Q + \mu(1-Q) \cos \Theta T \} \right] \right. \\ & \left. \times g_j + \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 C_\gamma \sum_j H_{jJ} \frac{d^2 g_j}{dT^2} = 0 \right. \\ & \left. (i, j, J=1, 3, 5) \right] \quad (14) \text{ a, b} \end{aligned}$$

ここで, F_{pq} , G_{pq} , H_{pq} はそれぞれ,

$$\begin{aligned} F_{pq} &= \int_0^1 \frac{d^4 u_p}{dL^4} u_q dL, \quad G_{pq} = \int_0^1 \frac{d^2 u_p}{dL^2} u_q dL \\ H_{pq} &= \int_0^1 u_p u_q dL \quad (15) \end{aligned}$$

である.

荷重パラメータ μ と荷重の円振動数 Θ が或る特定の組合せになると, (14) 式の解が時間とともに増大し, 発散してしまう. すなわち, 円弧はりの面外変位 V , θ が時間とともに限りなく増加することになり, 動的に不安定となる. このような動不安定を生ずる μ , Θ の値を決定するのが本研究の目的である.

縦軸に Θ , 横軸に μ を取った $\Theta \sim \mu$ 平面を作ると, この平面上に Θ , μ の組合せによって, 解が安定な部分と不安定な領域が生ずる. この両者の境界を決定するために, Bolotin の方法³⁾ を用いる.

すなわち, 安定, 不安定の境界では, (14) 式は周期 $2T_h$, および周期 T_h を有する周期解が存在するとし, それぞれ同周期で囲まれた領域が解が発散する不安定領域となる.

- (i) 周期 $2T_h$ を有する解で囲まれる第 1 次不安定領域

$2T_h$ の周期を有する解として

$$\begin{aligned} f_i &= a_i \sin \frac{\Theta T}{2} + b_i \cos \frac{\Theta T}{2} \quad (i=1, 3, 5) \\ g_j &= c_j \sin \frac{\Theta T}{2} + d_j \cos \frac{\Theta T}{2} \quad (j=1, 3, 5) \quad (16) \end{aligned}$$

を仮定する. ここで, a_i , b_i , c_j , d_j は未知定数である.

(16) 式を (14) a 式に代入し, 任意の T に対して (14) a 式が成り立つためには, $\sin \Theta T/2$, $\cos \Theta T/2$ の係数がそれぞれ 0 とならねばならない.

すなわち,

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[(1+C_\omega) F_{iI} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J G_{iI} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_\gamma) G_{iI} \{ Q - \frac{\mu}{2}(1-Q) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 H_{iI} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \Big] a_i \\ & + \sum_j \left[C_\omega F_{jI} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) G_{jI} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{jI} \{ Q - \frac{\mu}{2}(1-Q) \} \right] c_j \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[(1+C_\omega) F_{iI} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J G_{iI} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_\gamma) G_{iI} \{ Q + \frac{\mu}{2}(1-Q) \} \right. \\ & - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 H_{iI} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \Big] b_i \\ & + \sum_j \left[C_\omega F_{jI} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) G_{jI} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{jI} \{ Q + \frac{\mu}{2}(1-Q) \} \right] d_j \\ & = 0 \quad (17) \text{ a, b} \\ & (i, I, j=1, 3, 5) \end{aligned}$$

である.

また (16) 式を (14) b 式に代入し, 同様に $\sin \Theta T/2$, $\cos \Theta T/2$ の係数がそれぞれ 0 となる条件より, 次の 2 式が求まる.

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[C_\omega F_{iJ} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) G_{iJ} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{iJ} \{ Q - \frac{\mu}{2}(1-Q) \} \right] a_i \\ & + \sum_j \left[C_\omega F_{jJ} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J G_{jJ} \right. \\ & \left. + \left(\frac{l}{R} \right)^4 H_{jJ} + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{jJ} \times \right. \\ & \left. \left\{ Q - \frac{\mu}{2}(1-Q) \right\} - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 C_\gamma H_{jJ} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \right] c_j = 0 \\ & \sum_i \left[C_\omega F_{iJ} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 (1+C_J) G_{iJ} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{iJ} \{ Q + \frac{\mu}{2}(1-Q) \} \right] b_i \\ & + \sum_j \left[C_\omega F_{jJ} - \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_J G_{jJ} \right. \\ & \left. + \left(\frac{l}{R} \right)^4 H_{jJ} + \lambda_k \left(\frac{l}{R} \right)^2 C_\gamma G_{jJ} \{ Q + \right. \\ & \left. \frac{\mu}{2}(1-Q) \} - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R} \right)^4 C_\gamma H_{jJ} \times \right. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \Big] d_j = 0 \quad (i, j, J=1, 3, 5) \quad (18) a, b$$

(17)a, (18)a 式の未知定数 a_i, c_j の係数より成るマトリックスの値が0となる条件より, 周期 $2T_h$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1A_{iI} + 2A_{iI} \left[Q \pm \frac{\mu}{2}(1-Q) \right] - 3A_{iI} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 & 1B_{jI} + 2B_{jI} \left[Q \pm \frac{\mu}{2}(1-Q) \right] \\ \hline 1B_{iJ} + 2B_{iJ} \left[Q \pm \frac{\mu}{2}(1-Q) \right] & 1C_{jJ} + 2B_{jJ} \left[Q \pm \frac{\mu}{2}(1-Q) \right] - 2C_{jJ} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 \\ \hline \end{array} = 0$$

(i, I=1, 3, 5)
(j, J=1, 3, 5) (19)

と表わさる。ここで,

$$\begin{aligned} 1A_{pq} &= (1+C_\omega) F_{pq} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_J G_{pq} \\ 2A_{pq} &= \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_\gamma) G_{pq} \\ 3A_{pq} &= \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{pq} \\ 1B_{pq} &= C_\omega F_{pq} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) G_{pq} \\ 2B_{pq} &= \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma G_{pq} \\ 1C_{pq} &= C_\omega F_{pq} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_J G_{pq} + \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{pq} \\ 2C_p &= \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R}\right)^4 C_\gamma H_{pq} \end{aligned}$$

である。

(19) 式で正符号は上境界を, 負符号は下境界を与える。

(ii) 周期 T_h を有する解で囲まれる第2次不安定領域

周期 T_h を有する解を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} f_i &= a_i + b_i \sin \Theta T + c_i \cos \Theta T \quad (i=1, 3, 5) \\ g_j &= d_j + e_j \sin \Theta T + h_j \cos \Theta T \quad (j=1, 3, 5) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで, $a_i, b_i, c_i, d_j, e_j, h_j$ は未知定数である。

仮定した解 (21) 式を (14) 式に代入し, 時間に無関係な定数項, $\sin \Theta T, \cos \Theta T$ の係数がそれぞれ0となる条件より, 次の6式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_i \left[(1+C_\omega) F_{iI} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_J G_{iI} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_\gamma) Q G_{iI} \right] a_i \\ + \sum_i \frac{1}{2} \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_\gamma) \mu (1-Q) \times \\ G_{iI} c_i + \sum_j \left[C_\omega F_{jI} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) \times \right. \end{aligned}$$

の解によって囲まれる第1次不安定領域の下境界が求まる。また (17)b, (18)b 式より, 同様にして第1次不安定領域の上境界が求まる。

すなわち, 第1次不安定境界決定式は

$$\begin{aligned} G_{jI} + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma Q G_{jI} \Big] d_j \\ + \sum_j \frac{1}{2} \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma \mu (1-Q) G_{jI} h_j = 0 \\ \sum_i \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_\gamma) \mu (1-Q) G_{iI} a_i \\ + \sum_i \left[(1+C_\omega) F_{iI} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_J G_{iI} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_\gamma) Q G_{iI} \right. \\ \left. - \lambda_\omega^2 \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{iI} \Theta^2 \right] c_i \\ + \sum_j \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma \mu (1-Q) G_{jI} d_j \\ + \sum_j \left[C_\omega F_{jI} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) G_{jI} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma Q G_{jI} \right] h_j = 0 \\ (i, I, j=1, 3, 5) \\ \sum_i \left[C_\omega F_{iJ} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) G_{iJ} \right. \\ \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma Q G_{iJ} \right] a_i \\ + \sum_i \frac{1}{2} \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma \mu (1-Q) G_{iJ} c_i \\ + \sum_j \left[C_\omega F_{jJ} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma G_{jJ} \right. \\ \left. + \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{jJ} + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma Q G_{jJ} \right] d_j \\ + \sum_j \frac{1}{2} \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_\gamma \mu (1-Q) G_{jJ} h_j \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma \mu} (1-Q) G_{iJ} a_i \\ & + \sum_i \left[C_{\omega} F_{iJ} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) G_{iJ} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} Q G_{iJ} \right] c_i \\ & + \sum_j \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma \mu} (1-Q) G_{jJ} d_j \\ & + \sum_j \left[C_{\omega} F_{jJ} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} G_{jJ} \right. \\ & \left. + \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{jJ} + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} Q G_{jJ} \right. \\ & \left. - \lambda_{\omega}^2 \left(\frac{l}{R}\right)^4 C_{\gamma} H_{jJ} \textcircled{2} \right] h_j = 0 \end{aligned} \quad (i, j, J=1, 3, 5) \quad (22) \text{ a, b, c, d}$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[(1+C_{\omega}) F_{iI} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} G_{iI} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_{\gamma}) Q G_{iI} \right. \\ & \left. - \lambda_{\omega}^2 \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{iI} \textcircled{2} \right] b_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1,3,5} \left[C_{\omega} F_{jI} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) G_{jI} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} Q G_{jI} \right] e_j = 0 \end{aligned} \quad (i, j, I=1, 3, 5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[C_{\omega} F_{iJ} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 (1+C_J) G_{iJ} \right. \\ & \left. + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} Q G_{iJ} \right] b_i \\ & + \sum_j \left[C_{\omega} F_{jJ} - \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_J G_{jJ} \right. \\ & \left. + \left(\frac{l}{R}\right)^4 H_{jJ} + \lambda_k \left(\frac{l}{R}\right)^2 C_{\gamma} G_{jJ} \right. \\ & \left. - \lambda_{\omega}^2 \left(\frac{l}{R}\right)^4 C_{\gamma} H_{jJ} \textcircled{2} \right] e_j = 0 \end{aligned} \quad (i, j, J=1, 3, 5) \quad (23) \text{ a, b}$$

(22), (23) 式より, 周期 T_h の解で囲まれた第 2 次不安定領域の上境界, および下境界を決定する方程式が, それぞれ次のように求まる.

$1A_{iI} + 2A_{iI} Q$	$\frac{1}{2} 2A_{iI} \mu (1-Q)$	$1B_{jI} + 2B_{jI} Q$	$\frac{1}{2} 2B_{jI} \mu (1-Q)$	= 0
$2A_{iI} \mu (1-Q)$	$1A_{iI} + 2A_{iI} Q - 3A_{iI} \textcircled{2}$	$2B_{jI} \mu (1-Q)$	$1B_{jI} + 2B_{jI} Q$	
$1B_{iJ} + 2B_{iJ} Q$	$\frac{1}{2} 2B_{iJ} \mu (1-Q)$	$1C_{jJ} + 2B_{jJ} Q$	$\frac{1}{2} 2B_{jJ} \mu (1-Q)$	
$2B_{iJ} \mu (1-Q)$	$1B_{iJ} + 2B_{iJ} Q$	$2B_{jJ} \mu (1-Q)$	$1C_{jJ} + 2B_{jJ} Q - 2C_{jJ} \textcircled{2}$	

(i, I=1, 3, 5)
(j, J=1, 3, 5) (24)

$1A_{iI} + 2A_{iI} - 3A_{iI} \textcircled{2}$	$1B_{jI} + 2B_{jI} Q$	= 0
$1B_{iJ} + 2B_{iJ} Q$	$1C_{jJ} + 2B_{jJ} Q - 2C_{jJ} \textcircled{2}$	

(i, I=1, 3, 5)
(j, J=1, 3, 5) (25)

4. 解析結果

ここに取り扱う円弧はりの断面定数, および中心角はそれぞれ,

$C_{\omega}=0 \sim 10^{-2}$, $C_J=10^{-3} \sim 1$, $C_{\gamma}=10^{-4}$, $\alpha=1/4 \sim 1$ である.

(a) 分布静荷重による面外座屈固有値
座屈変形を (13) 式と同様, 真直なはりの自由曲げ

振動の固有関数の和と仮定し, ガレルキン法を (10) a, b 式に適用して得られる, 未知定数 f_i, g_j (ただし, この場合は f_i, g_j は時間に無関係な定数) に関する斉次の多元連立方程式より, 座屈固有値 λ_k が求まる.

解析結果を図示したのが Fig.2, Fig. 3 で, いずれも横軸は円弧はりの中心角, 縦軸は座屈固有値であ

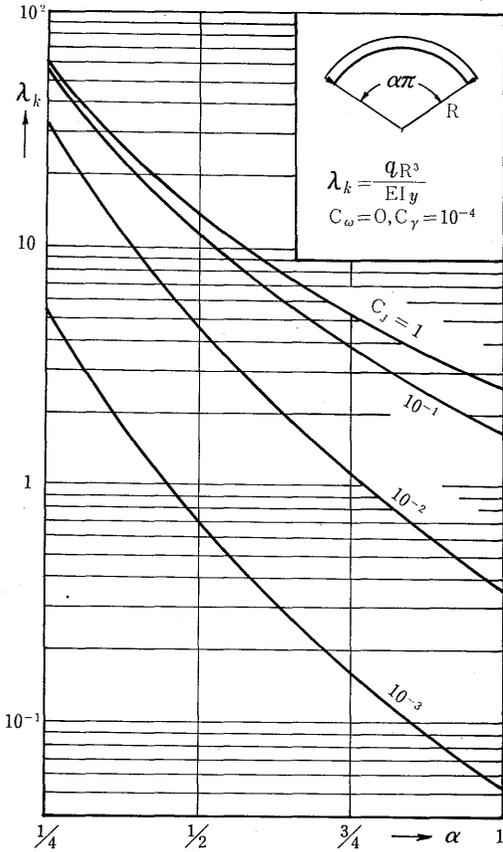


Fig. 2 Characteristic values of buckling

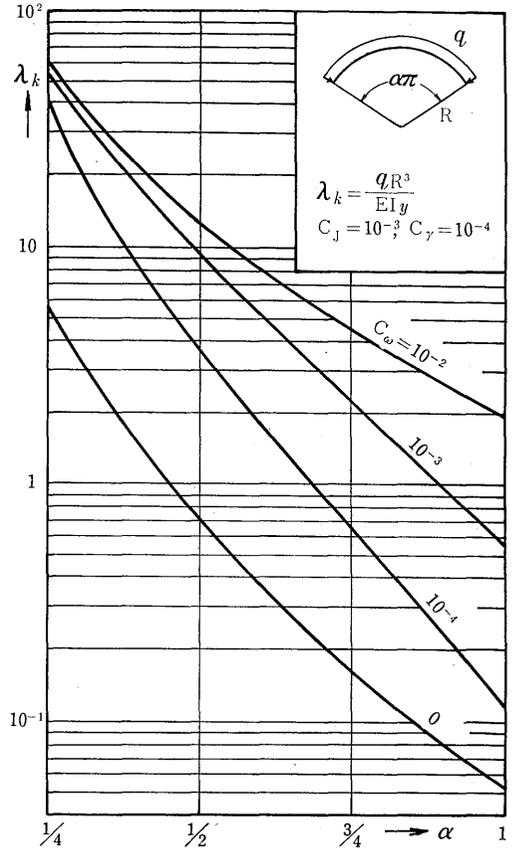


Fig. 3 Characteristic values of buckling

る。Fig. 2 は曲げねじれ剛性 $C_\omega=0$ の場合、ねじり剛性 C_J をパラメータとして、中心角を変化させた時の座屈固有値の変化を示したものである。中心角の増加、 C_J の減少にともなって、 λ_k の値は急激に小さくなっている。Fig. 3 はねじり剛性一定の場合、曲げねじれ剛性をパラメータとして、 λ_k の変化を示したものである。

(b) 等分布静荷重作用下での面外振動固有値

解関数を座屈の場合と同形に仮定し、(12) a, b 式にガレルキン法を適用すると、分布静荷重 q_0 が作用している場合の、円弧はり面外自由振動固有値 λ_ω を求める式が得られる。

ここでは、最終目的である、円弧はりの面外不安定振動の解析に必要な第1固有値のみを求める。

Fig. 4 は中心角が $\pi/4$ 、 $C_\omega=0$ 、 $C_J=10^{-4}$ である円弧はりに作用している分布静荷重 Q の大きさを変えた時、面外振動の第1振動固有値 λ_ω がいかに変化するかを示したものである。 Q が大きくなると、当然 λ_ω は小さくなり、 $Q=1$ すなわち面外座屈荷重と一致すると、振動固有値は0となる。また同図には λ_ω

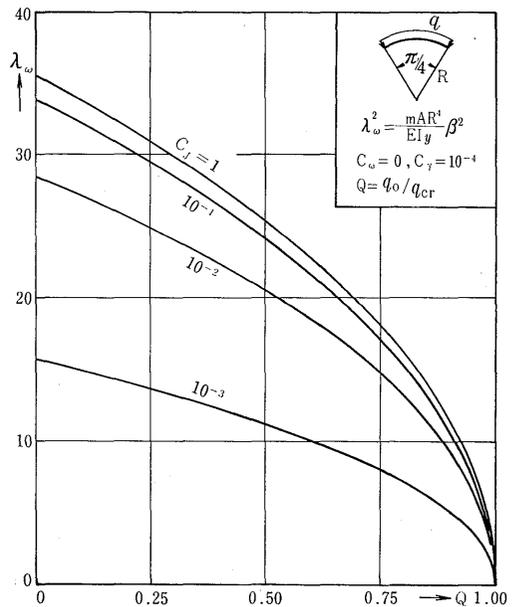


Fig. 4 Characteristic values of vibration under radial loads Q

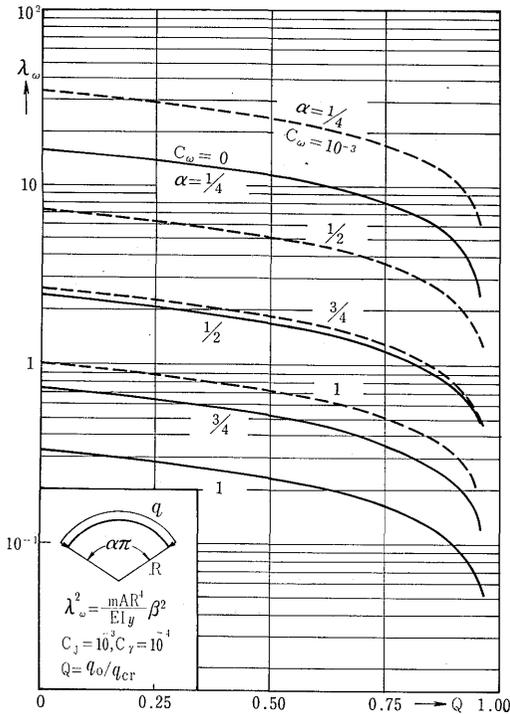


Fig. 5 Characteristic values of vibration under radial loads Q

Table 1 Values of Θ at the boundary of instability regions ($C_\omega=0, C_\gamma=10^{-4}, Q=0.5, \alpha=1/4$)

Region		First					Second				
C_J	Bound μ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
10^{-3}	Upper	2.000	2.116	2.225	2.328	2.426	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.876	1.741	1.593	1.429	1.000	0.986	0.940	0.852	0.721
10^{-2}	Upper	2.000	2.116	2.224	2.327	2.424	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.877	1.743	1.596	1.432	1.000	0.985	0.939	0.854	0.717
10^{-1}	Upper	2.000	2.119	2.231	2.338	2.440	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.586	1.421	1.000	0.985	0.937	0.850	0.711
1	Upper	2.000	2.119	2.231	2.338	2.439	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.587	1.421	1.000	0.985	0.937	0.850	0.711

Table 2 Values of Θ at the boundary of instability regions ($C_\omega=10^{-3}, C_J=10^{-3}, C_\gamma=10^{-4}, Q=0.5$)

α	Bound μ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$1/4$	Upper	2.000	2.119	2.232	2.339	2.440
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.586	1.420
$1/2$	Upper	2.000	2.119	2.231	2.337	2.439
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.587	1.421
$3/4$	Upper	2.000	2.119	2.230	2.335	2.436
	Lower	2.000	1.874	1.738	1.589	1.423
1	Upper	2.000	2.120	2.232	2.339	2.440
	Lower	2.000	1.874	1.737	1.588	1.422

におよぼすねじり剛性係数 C_J の影響も示してある。

Fig. 5 は $C_J=10^{-3}, C_\gamma=10^{-4}$ の円弧はりの中心角の大きさ, および C_ω をパラメータとして, 分布静荷重の増加による, λ_ω の値の低下の様子を示したものである。

(c) 円弧はりの動的不安定

円弧はりの断面形状, 中心角, 分布静荷重の大きさが与えられると, 作用荷重の円振動数と荷重パラメータの値によって誘起される不安定振動発生境界が, (29) 式, および (24), (25) 式より計算される。

Table 1 は $C_\omega=0, C_\gamma=10^{-4}, \alpha=1/4, Q=0.5$ の場合, はりのねじり剛性 C_J を変化させて, 不安定領域の上境界, 下境界での Θ の値の変化を示したものである。

Table 2 は $C_\omega=10^{-3}, C_J=10^{-3}, C_\gamma=10^{-4}, Q=0.5$ の値を持つ円弧はりの中心角の大きさによる, 不安定領域境界での Θ の変化を示す。

Table 3 は $C_\omega=0, C_J=1, C_\gamma=10^{-4}, Q=0.5$ の円弧はりの中心角を変化させた場合の, 不安定領域境界を示す Θ の値である。

Table 4 は $C_\omega=0, C_J=10^{-3}, C_\gamma=10^{-4}, \alpha=$

$1/4$ の場合, 不安定振動を起す Θ の値におよぼす, 分布静荷重 Q の影響を示したものである。

以上, Table 1~4 からわかるように, 二軸対称断面を有する円弧はりの, 半径方向周期分布荷重による面外不安定振動は, (4), (5) 式および (7) 式で示される無次元化を行なうと, ねじり剛性, 曲げねじり剛性, 中心角, 分布静荷重の大きさにかかわらず, $\Theta \sim \mu$ 面にほぼ一定の不安定領域を作る。

いま代表的に, $C_\omega=0, C_J=1, C_\gamma=10^{-4}, \alpha=1/4, Q=0.5$ の場合の不安定領域を $\Theta \sim \mu$ 面上で示すと, Fig. 6 の斜線を施した部分である。 $\Theta=2$ 近傍

Table 3 Valuer of Θ at the boundary of instability regions
($C_\omega=0, C_J=1, C_r=10^{-4}, Q=0.5$)

Region		First					Second				
α	Bound μ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
1/4	Upper	2.000	2.116	2.225	2.328	2.426	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.876	1.741	1.593	1.429	1.000	0.985	0.937	0.850	0.711
1/2	Upper	2.000	2.119	2.232	2.338	2.440	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.586	1.421	1.000	0.985	0.937	0.850	0.710
3/4	Upper	2.000	2.119	2.232	2.338	2.440	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.586	1.420	1.000	0.985	0.936	0.850	0.710
1	Upper	2.000	2.120	2.232	2.339	2.440	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Lower	2.000	1.873	1.736	1.587	1.421	1.000	0.985	0.937	0.850	0.711

Table 4 Values of Θ at the boundary of instability regions
($C_\omega=0, C_J=10^{-3}, C_r=10^{-4}, \alpha=1/4$)

Q	Bound μ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00	Upper	2.000	2.112	2.217	2.315	2.409
	Lower	2.000	1.879	1.748	1.603	1.441
0.25	Upper	2.000	2.114	2.221	2.322	2.417
	Lower	2.000	1.877	1.744	1.598	1.435
0.50	Upper	2.000	2.116	2.225	2.328	2.426
	Lower	2.000	1.876	1.741	1.593	1.429
0.75	Upper	2.000	2.118	2.230	2.336	2.437
	Lower	2.000	1.873	1.737	1.588	1.425

の不安定領域が1次の不安定域であり、 $\Theta=1$ 近傍が2次の不安定領域である。1次の不安定領域が2次の不安定領域に比較して、はるかに広いことがわかる。

5. むすび

二軸対称断面を有する円弧はりに、静的な等分布荷重、および時間に関して周期的に変化する動的な分布荷重が作用して生ずる、面外不安定振動について解析を行なった。

不安定領域境界の決定には Bolotin の方法を用いた。静的な分布荷重による円弧はりの面外座屈固有値、および静的な分布荷重作用状態での円弧はりの面外自由振動固有値を用いて、関係式を無次元表示することにより、 $\Theta \sim \mu$ 面上での不安定領域は、断面定数、はりの中心角、静的分布荷重の大ききにはほぼ無関係となり、一つの曲線で表わすことが出来る。

$\Theta=2$ 近傍の第1不安定領域は、 $\Theta=1$ 近傍の第2次不安定域に比較してはるかに広い。

以上の理論的解析とあわせて、今後実験的研究が必要である。実験的研究には、周期的荷重をいかにして作用させ、しかも不安定領域境界付近で生ずる、偏心荷重による振動、試験片の初期不整による振動等による作用荷重の変動の取り扱い、不安定境界の判定等多くの問題がある。

6. 文 献

- (1) Bolotin, V. V. ; The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., 1964.
- (2) 杉山, 川越, 岩壺 ; 係数励振不安定問題のシミュレーションにおける不安定基準, 第15回構造強度に関する講演会講演集, 昭48
- (3) Vlasov, V.Z. ; Thin-Walled Elastic Beams, National Science Foundation, 1961

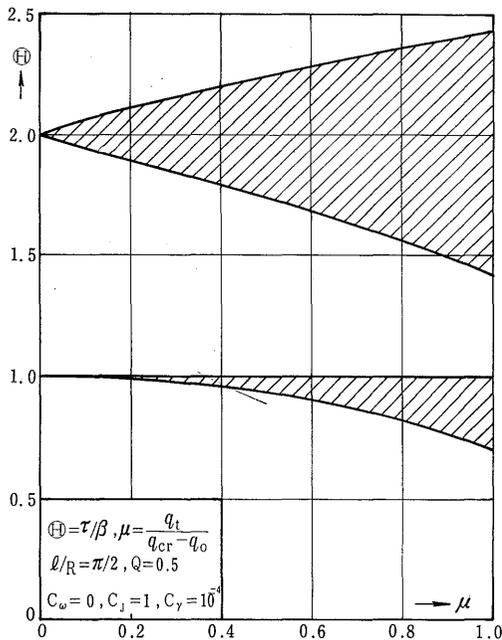


Fig. 6 Distribution of instability regions