薄肉断面を有する円弧はりの振動

神代律子*，山下　務*，築地恒夫*

Vibration of A Thin-Walled Circular Beam

by

Ritsuko KUMASHIRO
(Structural Engineering)

Tsutomu YAMASHITA
(Structrual Engineering)

Tsuneo TSUIJI
(Structural Engineering)

Vibration of A Thin-Walled Circular Beam

The vibration of a circular beam with a thin-walled cross-section is presented in this paper.

The general equations of vibration for the circular beam, which include the effect of axial elongation, are derived from the Hamilton's principle.

The Galerkin method is used to compute the characteristic values of vibration for beams with H and channel cross-sections.

A specimen with a H section, which is made of acrylic resin, is tested to verify analytical results. The results show that relatively good correlation exists between them.

1. まえがき

円形曲りはりの振動解析については，すでに多くの研究が行われている．[1),2)]

ここでは，薄肉の断面を有する細長い円弧はりの振動を，図心軸方向の伸縮を含めた一般的形で解析する．これは細長いはりにおいては軸方向の伸びを無視する場合も多いが，より一般性をもたせるため，伸縮を考慮した振動の基礎式を導き，ガレルキン法[3)]により解析する．

取り扱う円弧はりの断面はH型及び溝型であり，両端は支持または固定である．

さらに裏付けとなる実験を行った．モデルはアクリル樹脂を接着して$\frac{1}{4}$円の円弧はりを作った．

計算値と理論値の振動数の比較を行ったが，わりに合っている結果がでた．

* 構造工学科

2. 座　標

対象とする円弧はりは断面寸法が長さに比較して小さい細長いはりで，断面は軸方向に一定であり，曲率

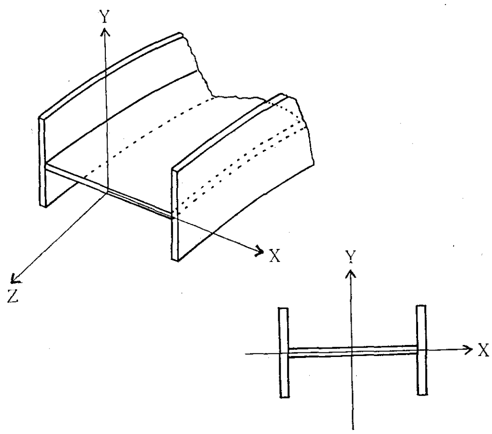


Fig. 1 Coordinates

半径はＲである．

座標軸は，はりの断面内に，断面の主軸と一致するようにＸ，Ｙ軸を，長さ方向にＺ軸を右手系をなすように定める．（Fig.1）

また，はりの両端での境界条件は，変位がはりの両端で拘束されている場合（両端単純支持または両端固定）のみを取り扱う．

3.　振動に関する基礎方程式

振動に関する基礎方程式をハミルトンの原理より導く．

はりの断面内の任意点の変位を $U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$, $W(x, y, z, t)$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
U &= u(z, t) - y\cdot\theta(z, t) \\
V &= v(z, t) + x\cdot\theta(z, t) \\
W &= w(z, t) - x\Gamma_u - y\Gamma_v + \omega\Gamma_\theta
\end{aligned} \tag{1}
$$

と表わされる．

u, v, w：　断面の図心のＸ，Ｙ，Ｚ方向変位

θ：　図心まわりの回転角

ω：　図心に関する曲げねじれ関数

$$
\Gamma_u = \frac{\partial u}{\partial z} + K_y w, \quad \Gamma_v = \frac{\partial v}{\partial z} - K_x w
$$

$$
\Gamma_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial z} + K_x\Gamma_u + K_y\Gamma_v \tag{2}
$$

$$
K_x = \frac{1}{R}\sin\alpha, \quad K_y = \frac{1}{R}\cos\alpha
$$

α：図心線の法線方向とＸ軸のなす角

円弧はりが自由振動をしている場合，ハミルトンの原理は次のように表わされる．

$$
\delta I = \delta\int_0^t\int_0^l (\Pi_s - T)\,dz\,dt = 0 \tag{3}
$$

Π_s は歪エネルギ，Ｔは運動エネルギで，それぞれ次のように書き表わされる．

$$
\begin{aligned}
\Pi_s = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[& A\Gamma_w^2 + I_x\Omega_u^2 + I_y\Omega_v^2 + I_\omega\Omega_\theta^2 + 2I_{xy}\Omega_u\Omega_v - 2I_{x\omega}\Omega_u\Omega_\theta \\
& - 2I_{y\omega}\Omega_v\Omega_\theta\Big]dz + \frac{G}{2}\int_0^l J\Gamma_\theta^2 dz
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
T = \frac{1}{2}\int_0^l m\int_A\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right] dA\,dz \tag{5}
$$

ｍ：はりの単位体積あたりの質量

ここで，断面定数は次の定義に従う．

$$
A = \int_A dA, \quad I_x = \int_A x^2 dA, \quad I_y = \int_A y^2 dA
$$

$$
I_{xy} = \int_A xy\,dA, \quad I_{x\omega} = \int_A x\omega\,dA, \quad I_{y\omega} = \int_A y\omega\,dA
$$

$$
I_\omega = \int_A \omega^2 dA, \quad J = \int_A\left[\left(y - \frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dA \tag{6}
$$

Ｅ：縦弾性係数，　Ｇ：横弾性係数

また，

$$
\Gamma_w = \frac{\partial w}{\partial z} - K_y u + K_x v, \quad \Omega_u = \frac{\partial\Gamma_u}{\partial z} - K_x\theta
$$

$$
\Omega_v = \frac{\partial\Gamma_v}{\partial z} - K_y\theta, \qquad \Omega_\theta = \frac{\partial\Gamma_\theta}{\partial z} \tag{7}
$$

である．

（５）式を（３）式に代入すると

$$
\delta\int_0^t\int_0^l\left[\Pi_s - \frac{1}{2}m\int_A\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dA\right\}\right] dz\,dt = 0 \tag{8}
$$

を得る．

$t=0$，$t=t$ で $U=U_0$，$U=U_t$，$V=V_0$，$V=V_t$，$W=W_0$，$W=W_t$ を満足しているものとすれば，ハミルトンの原理（８）は

$$
\int_0^t\int_0^l\left[\delta\Pi_s + m\int_A\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)\delta U + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)\delta V + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)\delta W\right\} dA\right] dz\,dt = 0 \tag{9}
$$

と書ける．

（９）式に（１）式及び（４）式を代入して，部分積分を行い，はり内部で δu, δv, δw, $\delta\theta$ が互いに独立であること，さらに定常振動を考慮すると円弧はりの振動に関する微分方程式が次のように求まる．

$$
\begin{aligned}
& E\frac{d^2}{dz^2}(I_x\Omega_u + I_{xy}\Omega_v - I_{x\omega}\Omega_\theta) \\
& - E\frac{d}{dz}\left\{K_x\frac{d}{dz}(I_{x\omega}\Omega_u + I_{y\omega}\Omega_v - I_\omega\Omega_\theta)\right\} \\
& - G\frac{d}{dz}(K_x J\Gamma_\theta) - EAK_y\Gamma_w \\
& - m\omega^2\left[Au - \underline{\frac{d}{dz}(I_x\Gamma_u + I_{xy}\Gamma_v - I_{x\omega}\Gamma_\theta)} \right. \\
& \left. \underline{+ \frac{d}{dz}\left\{K_x(I_{x\omega}\Gamma_u + I_{y\omega}\Gamma_v - I_\omega\Gamma_\theta)\right\}}\right] = 0
\end{aligned}
$$

$$
E\frac{d^2}{dz^2}(I_{xy}\Omega_u + I_y\Omega_v - I_{y\omega}\Omega_\theta)
$$

$$-E\frac{d}{dz}\left\{K_y\frac{d}{dz}(I_{x\omega}\Omega_u+I_{y\omega}\Omega_v-I_\omega\Omega_\theta)\right\}$$

$$-G\frac{d}{dz}(K_yJ\Gamma_\theta)+EK_xA\Gamma_w$$

$$-m\omega^2\Big[Av-\frac{d}{dz}\underline{(I_{xy}\Gamma_u+I_y\Gamma_v-I_{y\omega}\Gamma_\theta)}$$

$$\underline{+\frac{d}{dz}\Big\{K_y(I_{x\omega}\Gamma_u+I_{y\omega}\Gamma_v-I_\omega\Gamma_\theta\Big\}}\Big]=0$$

$$-E\frac{d}{dz}(A\Gamma_w)-EK_y\frac{d}{dz}(I_x\Omega_u+I_{xy}\Omega_v$$

$$-I_{x\omega}\Omega_\theta)$$

$$+EK_x\frac{d}{dz}(I_{xy}\Omega_u+I_y\Omega_v-I_{y\omega}\Omega_\theta)$$

$$-m\omega^2\Big[Aw+\underline{K_y(I_x\Gamma_u+I_{xy}\Gamma_v-I_{x\omega}\Gamma_\theta)}$$

$$\underline{-K_x(I_{xy}\Gamma_u+I_y\Gamma_v-I_{y\omega}\Gamma_\theta)}\Big]=0$$

$$-E\frac{d^2}{dz^2}(I_{x\omega}\Omega_u+I_{y\omega}\Omega_v-I_\omega\Omega_\theta)$$

$$-EK_x(I_x\Omega_u+I_{xy}\Omega_v-I_{x\omega}\Omega_\theta)$$

$$-EK_y(I_{xy}\Omega_u+I_y\Omega_v-I_{y\omega}\Omega_\theta)-G\frac{d}{dz}(J\Gamma_\theta)$$

$$-m\omega^2\Big[(I_x+I_y)\theta+\frac{d}{dz}(I_{x\omega}\Gamma_u+I_{y\omega}\Gamma_v-I_\omega\Gamma_\theta)$$

$$\Big]=0 \qquad (12)$$

また，はりの両端での境界条件は，

$$\left|\Big[E(I_x\Omega_u+I_{xy}\Omega_v-I_{x\omega}\Omega_\theta)\Big]\delta\Gamma_u\right|_0^l=0$$

$$\left|E(I_{xy}\Omega_u+I_y\Omega_v-I_{y\omega}\Omega_\theta)\,\delta\Gamma_v\right|_0^l=0 \qquad (13)$$

$$\left|\Big[-E(I_{x\omega}\Omega_u+I_{y\omega}\Omega_v-I_\omega\Omega_\theta)\Big]\delta\Gamma_\theta\right|_0^l=0$$

となる．

ここで——を付した項は断面の回転慣性に関係する項である．以後の計算では回転慣性項は無視する．

4. 無 次 元 化

(12) 式，(13) 式を数値解析をする都合上，次のような無次元化を行う．

変位：$\bar U=\frac{u}{a}$，$\bar V=\frac{v}{a}$，$\bar W=\frac{w}{a}$，$\bar\theta=\theta$

座標：$\bar x=\frac{x}{a}$，$\bar y=\frac{y}{a}$，$L=\frac{z}{l}$，$\bar a=\frac{a}{l}$

幾何学的量：$D_u=\frac{l}{a}\Gamma_u$，$D_v=\frac{l}{a}\Gamma_v$，

$D_\theta=l\Gamma_\theta$

$D_w=\frac{l}{a}\Gamma_w$，

$C_u=\frac{l^2}{a}\Omega_u$，$C_v=\frac{l^2}{a}\Omega_v$，$C_\theta=l^2\Omega_\theta$

曲率：$\Phi_x=K_xl$，$\Phi_y=K_yl$

断面定数：$\bar A=\frac{a^2A}{I_y}$，$\bar J=\frac{J}{I_y}$，$\bar I_x=\frac{I_x}{I_y}$，$\bar I_{xy}=\frac{I_{xy}}{I_y}$，$\bar I_{x\omega}=\frac{I_{x\omega}}{I_ya}$，$\bar I_{y\omega}=\frac{I_{y\omega}}{I_ya}$，$\bar I_\omega=\frac{I_\omega}{I_ya^2}$

a ；断面の代表寸法

l ；はりの全長

以上のような無次元化を行うと（2），（7）式は，次のようになる．

$$D_u=\frac{d\bar U}{dL}+\Phi_y\bar W,\quad D_v=\frac{d\bar V}{dL}-\Phi_x\bar W$$

$$D_\theta=\frac{d\bar\theta}{dL}+\bar a\Phi_x\frac{d\bar U}{dL}+\bar a\Phi_y\frac{d\bar V}{dL}$$

$$D_w=\frac{d\bar W}{dL}-\Phi_y\bar U+\Phi_x\bar V$$

$$C_u=\frac{d^2\bar U}{dL^2}+\frac{d}{dL}(\Phi_y\bar W)-\Phi_x\frac{1}{\bar a}\bar\theta$$

$$C_v=\frac{d^2\bar V}{dL^2}-\frac{d}{dL}(\Phi_x\bar W)-\Phi_y\frac{1}{\bar a}\bar\theta$$

$$C_\theta=\frac{dD_\theta}{dL}=\frac{d^2\theta}{dL^2}+\bar a\left(\Phi_x\frac{d\bar U}{dL}\right)$$

$$+\bar a\frac{d}{dL}\left(\Phi_y\frac{d\bar V}{dL}\right) \qquad (14)$$

次に微分方程式も無次元化して

$$\frac{d^2}{dL^2}(\bar I_xC_u+\bar I_{xy}C_v-\bar I_{x\omega}C_\theta)$$

$$-\bar a\frac{d}{dL}\Big[\Phi_x\frac{d}{dL}(\bar I_{x\omega}C_u+\bar I_{y\omega}C_v-\bar I_\omega C_\theta)\Big]$$

$$-\frac{\bar A}{\bar a^2}\Phi_yD_w-\frac{1}{\bar a}\frac{G}{E}\frac{d}{dL}(\Phi_x\bar JD_\theta)-\lambda^2\bar U=0$$

$$\frac{d^2}{dL^2}(\bar I_{xy}C_u+\bar I_yC_v-\bar I_{y\omega}C_\theta)$$

$$-\frac{d}{dL}\Big[\Phi_y\bar a\frac{d}{dL}(\bar I_{x\omega}C_u+\bar I_{y\omega}C_v-\bar I_\omega C_\theta)\Big]$$

$$+\frac{A}{\bar a^2}\Phi_xD_w-\frac{G}{E}\frac{1}{\bar a}\frac{d}{dL}(\Phi_y\bar JD_\theta)-\lambda^2V=0$$

$$-\frac{d}{dL}\left(\frac{\bar{A}}{\bar{a}^2}D_w\right)-\Phi_y\frac{d}{dL}(\bar{I}_xC_u+\bar{I}_{xy}C_v$$

$$-\bar{I}_{x\omega}C_\theta)+\Phi_x\frac{d}{dL}(\bar{I}_{xy}C_u+\bar{I}_yC_v-I_{y\omega}C_\theta)$$

$$-\lambda^2\overline{W}=0$$

$$-\frac{d^2}{dL^2}(\bar{I}_{x\omega}C_u+\bar{I}_{y\omega}C_v-\bar{I}_\omega C_\theta)$$

$$-\frac{1}{\bar{a}}\Phi_x(\bar{I}_xC_u+\bar{I}_{xy}C_v-\bar{I}_{x\omega}C_\theta)$$

$$-\frac{1}{\bar{a}}\Phi_y(\bar{I}_{xy}C_u+\bar{I}_yC_v-\bar{I}_{y\omega\theta}C)$$

$$-\frac{G}{E}\frac{1}{\bar{a}^2}\frac{d}{dL}(\bar{J}D_\theta)$$

$$-\lambda^2\frac{1}{\bar{A}}(\bar{I}_x+\bar{I}_y)\bar{\theta}=0 \qquad (15)$$

ここで $\lambda^2=\frac{mAl^4}{EI_y}\omega^2$ （λ：振動の固有値）

となる.

また境界条件はそれぞれ次のように無次元表示される.

$$\left|(\bar{I}_xCu+\bar{I}_{xy}Cv-\bar{I}_{x\omega}C_\theta)\,\delta D_u\right|_0^1=0$$

$$\left|(\bar{I}_{xy}Cu+\bar{I}_yCv-\bar{I}_{y\omega}C_\theta)\,\delta D_v\right|_0^1=0$$

$$\left|[-(\bar{I}_{x\omega}C_u+\bar{I}_{y\omega}C_v-\bar{I}_\omega C_\theta)]\,\delta D_\theta\right|_0^1=0 \qquad (16)$$

5. 解 析 方 法

実際問題を解析するには微分方程式（15）式を（16）式の境界条件のもとで解かねばならないが，一般には不可能で数値解析法によらねばならない．ここではガレルキン法を用いる.

変位 $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\overline{W}$, $\bar{\theta}$ を次のように，真直なはりの自由曲げ振動の固有関数の和として表わす.

$$\bar{U}=\sum_i a_i\,u_i(L),\qquad \overline{W}=\sum_p c_p\,w_p(L)$$

$$\bar{V}=\sum_j b_j\,v_j(L),\qquad \bar{\theta}=\sum_q d_q\,\theta_q(L) \qquad (17)$$

$$(i,\ j,\ p,\ q=1,\ 2\ \cdots)$$

固有関数は，一般的に u, v, w, θ に関して次のように表わされる.

$$f_i=\sin\gamma_iL-\beta\sinh\gamma_iL-\alpha_i(\cos\gamma_iL-\cosh\gamma_iL)$$

両端固定の場合

u, v, θ ; $\beta=0$, $\alpha_i=(\sin\gamma_i-\sinh\gamma_i)/(\cos\gamma_i-\cosh\gamma_i)$

γ_i ; $\cos\gamma_i\cosh\gamma_i=1$ の根

w ; $\beta=0$, $\alpha_i=0$

γ_i ; $\sin\gamma_i=0$ の根

両端支持の場合

u, v, w, θ ; $\beta=0$, $\alpha_i=0$

γ_i ; $\sin\gamma_i=0$ の根

（17）式を用いガレルキン法を適用すると未知定数 a_i, b_j, c_p, d_q に関する斉次連立方程式が得られ，それより次の振動方程式が得られる.

$$|A-\lambda^2B|=0 \qquad (18)$$

ここで A, B は次に示すマトリックスである.

$$A=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}\\A_{41}&A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{vmatrix}B_{11}&0&0&0\\0&B_{22}&0&0\\0&0&B_{33}&0\\0&0&0&B_{44}\end{vmatrix} \qquad (19)$$

A_{ij}, B_{ij} (i =1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3 ,4) のマトリックスの各要素は次に示す通りである.

A_{11} の要素 (i=1,……,n_1,I=1,……,n_1)

$$A_{iI}=(\bar{I}_x-2\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{x\omega}+\Phi_x^2\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\int_0^1\frac{d^4u_i}{dL^4}u_I\,dL$$

$$-\frac{G}{E}\Phi_x^2\,\bar{J}\int_0^1\frac{d^2u_i}{dL^2}u_I\,dL+\frac{\bar{A}}{a^2}\Phi_y^2\times$$

$$\int_0^1 u_iu_I\,dL$$

$$+\left|(I_x-2\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{x\omega}+\Phi_x{}^2\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\frac{d^2u_i}{dL^2}\frac{du_I}{dL}\right|_0^1$$

A_{12} の要素 (j=1,……,n_2,I=1,……,n_1)

$$A_{jI}=(\bar{I}_{xy}-\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+\Phi_x\Phi_y\bar{a}^2I_\omega)\times$$

$$\int_0^1\frac{d^4v_j}{dL^4}u_I\,dL$$

$$-\frac{G}{E}\Phi_x\Phi_y\,\bar{J}\int_0^1\frac{d^2v_j}{dL^2}u_I\,dL-\frac{\bar{A}}{\bar{a}^2}\Phi_x\Phi_y$$

$$\times\int_0^1 v_j\,u_I\,dL$$

$$+\left|(\bar{I}_{xy}-\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+\Phi_x\Phi_y\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\right.$$

$$\left.\times\frac{d^2v_j}{dL^2}\frac{du_I}{dL}\right|_0^1$$

A_{13} の要素 (p=1,……,n_3,I=1,……,n_1)

$$A_{pI}=(\Phi_y\bar{I}_x-\Phi_x\bar{I}_{xy}-\Phi_x\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}+\Phi_x^2\bar{a}\bar{I}_{y\omega})$$
$$\times\int_0^1\frac{d^3w_p}{dL^3}\ u_I\ dL$$
$$-\frac{\bar{A}}{\bar{a}^2}\Phi_y\int_0^1\frac{dw_p}{dL}\ u_I\ dL$$
$$+\Big|(\Phi_y\bar{I}_x-\Phi_x\bar{I}_{xy}-\Phi_x\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}+\Phi_x^2\bar{a}\bar{I}_{y\omega})$$
$$\times\frac{dw_p}{dL}\ \frac{du_I}{dL}\Big|_0^1$$

A_{14} の要素 $(q=1,\cdots\cdots,n_4,I=1,\cdots\cdots,n_1,)$

$$A_{qI}=-(\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{d^4\theta_q}{dL^4}\ u_I\ dL$$
$$-\Big(\Phi_x\bar{I}_x+\Phi_y\bar{I}_{xy}-\Phi_x^2\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+$$
$$\frac{G}{E}\Phi_x\bar{J}\Big)\frac{1}{\bar{a}}$$
$$\times\int_0^1\frac{d^2\theta_q}{dL^2}u_I\ dL+\Big|-(\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}^2\bar{I}_\omega)$$
$$\times\frac{1}{\bar{a}}\ \frac{d^2\theta_q}{dL^2}\ \frac{du_I}{dL}\Big|_0^1$$

A_{21} の要素 $(i=1,\cdots\cdots,n_1,J=1,\cdots\cdots,n_2)$

$$A_{iJ}=(\bar{I}_{xy}-\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+\Phi_x\Phi_y\bar{a}\bar{I}_\omega)$$
$$\times\int_0^1\frac{d^4u_i}{dL^4}\ v_J\ dL$$
$$-\frac{G}{E}\Phi_x\Phi_y\bar{J}\int_0^1\frac{d^2u_i}{dL^2}v_J\ dL-\frac{\bar{A}}{\bar{a}^2}\times$$
$$\Phi_x\Phi_y\int_0^1u_iv_J\ dL$$
$$+\Big|(\bar{I}_{xy}-\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+\Phi_x\Phi_y\bar{a}^2\bar{I}_\omega)$$
$$\times\frac{d^2u_i}{dL^2}\ \frac{dv_J}{dL}\Big|_0^1$$

A_{22} の要素 $(j=1,\cdots\cdots,n_2,J=1,\cdots\cdots,n_2)$

$$A_{jJ}=(\bar{I}_y-2\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+\Phi_y^2\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\int_0^1\frac{d^4v_j}{dL^4}\ v_J\ dL$$
$$-\frac{G}{E}\Phi_y^2\ \bar{J}\int_0^1\frac{d^2v_j}{dL^2}v_J\ dL+\frac{\bar{A}}{\bar{a}^2}\Phi_x^2\times$$
$$\int_0^1v_j\ v_J\ dL$$
$$+\Big|(\bar{I}_y-2\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{y\omega}+\Phi^2{}_y\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\frac{d^2v_j}{dL^2}\ \frac{dv_J}{dL}\Big|_0^1$$

A_{23} の要素 $(p=1,\cdots\cdots,n_3,J=1,\cdots\cdots,n_2)$

$$A_{pJ}=-(\Phi_x\bar{I}_y-\Phi_y\bar{I}_{xy}+\Phi_y^2\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\Phi_ya I_{y\omega})$$
$$\times\int_0^1\frac{d^3w_p}{dL^3}\ v_J\ dL$$
$$+\frac{\bar{A}}{a^2}\Phi_x\int_0^1\frac{dw_p}{dL}\ v_J\ dL$$
$$+\Big|-(\Phi_x\bar{I}_y-\Phi_y\bar{I}_{xy}+\Phi_y^2\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{y\omega})$$
$$\times\frac{dw_p}{dL}\ \frac{dv_J}{dL}\Big|_0^1$$

A_{24} の要素 $(q=1,\cdots\cdots,n_4,J=1,\cdots\cdots,n_2)$

$$A_{qJ}=-(\bar{a}\bar{I}_{y\omega}-\Phi_y\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{d^4\theta_q}{dL^4}\ v_J\ dL$$
$$-(\Phi_y\bar{I}_y+\Phi_x\bar{I}_{xy}-\Phi_x\Phi_y\ \bar{a}\ \bar{I}_{x\omega}-\Phi_y^2\bar{a}\bar{I}_{y\omega}$$
$$+\frac{G}{E}\Phi_y\bar{J})\ \frac{1}{\bar{a}}$$
$$\times\int_0^1\frac{d^2\theta_q}{dL^2}\ v_J\ dL\ +\Big|-(\bar{a}\bar{I}_{y\omega}-\Phi_y\ \bar{a}^2\times$$
$$\bar{I}_\omega)\ \frac{1}{\bar{a}}\ \frac{d^2\theta_q}{dL^2}\ \frac{dv_J}{dL}\Big|_0^1$$

A_{31} の要素 $(i=1,\cdots\cdots,n_1,P=1,\cdots\cdots,n_3)$

$$A_{iP}=-(\Phi_y\bar{I}_x-\Phi_x\bar{I}_{xy}-\Phi_x\Phi_y\bar{I}\bar{a}_{x\omega}+\Phi_x^2\times$$
$$\bar{a}\bar{I}_{y\omega})\int_0^1\frac{d^3u_i}{dL^3}\ w_P\ dL$$
$$+\frac{\bar{A}}{a^2}\ \Phi_y\int_0^1\frac{du_i}{dL}\ w_P\ dL$$

A_{32} の要素 $(j=1,\cdots\cdots,n_2,P=1,\cdots\cdots,n_3)$

$$A_{jP}=(\Phi_x\bar{I}_y-\Phi_y\bar{I}_{xy}+\Phi_y^2\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\Phi_y\bar{a}\times$$
$$I_{y\omega})\int_0^1\frac{d^3v_j}{dL^3}\ wp\ dL$$
$$-\frac{\bar{A}}{\bar{a}^2}\ \Phi_x\int_0^1\frac{dv_j}{dL}\ wp\ dL$$

A_{33} の要素 $(p=1,\cdots\cdots,n_3,P=1,\cdots\cdots,n_3)$

$$A_{pP}=-(\Phi_y^2\ \bar{I}_x+\Phi_x^2\ \bar{I}_y-2\ \Phi_x\Phi_y\bar{I}_{xy}+\frac{\bar{A}}{a^2})$$
$$\times\int_0^1\frac{d^2w_p}{dL^2}\ wp\ dL$$

A_{34} の要素 $(q=1,\cdots\cdots,n_4,P=1,\cdots\cdots,n_3)$

$$A_{qP}=(\Phi_y\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{y\omega})\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{d^3\theta_q}{dL}\times$$
$$w_P\ dL$$

$$+\left[\Phi_x\Phi_y\bar{I}_x-\Phi_x\Phi_y\bar{I}_y-(\Phi_x^2-\Phi_y^2)\bar{I}_{xy}\right]$$

$$\times\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{d\theta_q}{dL}\,wp\,dL$$

A_{41} 要素の $(i=1,\cdots\cdots,n_1,Q=1,\cdots\cdots,n_4)$

$$A_{iQ}=-(\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}^2\bar{I}_\omega)\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{d^4u_i}{dL^4}\theta_Q\,dL$$

$$-\left[\Phi_x\bar{I}_x+\Phi_y\bar{I}_{xy}-\Phi_x^2\,\bar{a}\,\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\Phi_y\times\bar{I}_{y\omega}\bar{a}+\frac{G}{E}\Phi_x\bar{J}\right]\frac{1}{\bar{a}}$$

$$\times\int_0^1\frac{d^2u_i}{dL^2}\theta_Q\,dL+\left|-(\bar{a}\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}^2\times\bar{I}_\omega)\frac{1}{\bar{a}}\frac{d^2u_i}{dL^2}\frac{d\theta_Q}{dL}\right|_0^1$$

A_{42} の要素 $(j=1,\cdots\cdots,n_2,Q=1,\cdots\cdots,n_4)$

$$A_{jQ}=-(\bar{a}\bar{I}_{y\omega}-\Phi_y\bar{a}^2\,\bar{I}_\omega)\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{d^4v_j}{dL^4}\theta_Q\,dL$$

$$-\left[\Phi_y\bar{I}_y+\Phi_x\bar{I}_{xy}-\Phi_x\Phi_y\,\bar{a}\,\bar{I}_{x\omega}-\Phi_y^2\,\bar{a}\times\bar{I}_{y\omega}+\frac{G}{E}\Phi_y\,\bar{J}\right]\frac{1}{\bar{a}}$$

$$\times\int_0^1\frac{d^2v}{dL^2}\theta_Q\,dL+\left|-(\bar{a}\bar{I}_{y\omega}-\Phi_y\bar{a}^2\times\bar{I}_\omega)\frac{1}{\bar{a}}\frac{d^2v_j}{dL^2}\frac{d\theta_Q}{dL}\right|_0^1$$

A_{43} の要素 $(p=1,\cdots\cdots,n_3,Q=1\cdots\cdots,n_4)$

$$A_{pQ}=-(\Phi_y\,\bar{a}\,\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\bar{a}\bar{I}_{y\omega})\frac{1}{\bar{a}}$$

$$\times\int_0^1\frac{d^3w_p}{dL_3}\theta_Q\,dL$$

$$-\left[\Phi_x\Phi_y\bar{I}_x-\Phi_x\Phi_y\bar{I}_y-(\Phi_x^2-\Phi_y^2)\times\bar{I}_{xy}\right]\frac{1}{\bar{a}}\int_0^1\frac{dw_p}{dL}\theta_Q\,dL$$

$$+\left|-(\Phi_y\,\bar{a}\,\bar{I}_{x\omega}-\Phi_x\,\bar{a}\bar{I}_{y\omega})\frac{1}{\bar{a}}\times\frac{dw_p}{dL}\frac{d\theta_Q}{dL}\right|_0^1$$

A_{44} の要素 $(q=1,\cdots\cdots,n_4,Q=1,\cdots\cdots,n_4)$

$$A_{qQ}=\bar{a}^2\,\bar{I}_\omega\frac{1}{\bar{a}^2}\int_0^1\frac{d^4\theta_q}{dL^4}\theta_Q\,dL$$

$$+\left(2\Phi_x\bar{a}\,\bar{I}_{x\omega}+2\Phi_y\,\bar{a}\bar{I}_{y\omega}-\frac{G}{E}\bar{J}\right)$$

$$\times\frac{1}{\bar{a}^2}\int_0^1\frac{d^2\theta_q}{dL^2}\theta_Q\,dL$$

$$+(\Phi_x^2\,\bar{I}_x+\Phi_y^2\,\bar{I}_y+2\Phi_x\,\Phi_y\,\bar{I}_{xy})\frac{1}{\bar{a}^2}$$

$$\times\int_0^1\theta_q\,\theta_Q\,dL$$

$$+\left|\bar{a}^2\bar{I}_\omega\frac{1}{\bar{a}^2}\frac{d^2\theta_q}{dL^2}\frac{d\theta_Q}{dL}\right|_0^1$$

$B_{11}=B_{22}=B_{33}=\mathbb{I}$ （$\mathbb{I}$：単位マトリックス）

$B_{44}=\dfrac{1}{\bar{A}}(\bar{I}_x+\bar{I}_y)\,\mathbb{I}$

6. 解析結果及び考察

取り扱う断面は2軸対称のH型と，1軸対称の溝型である．したがって図心線の法線方向とX軸とが一致するので $\Phi_x=0$ となる．

図心とせん断中心が一致しているH型断面の円弧はりでは，$v-\theta$（Y軸方向の曲げ振動とねじれ振動）の連成振動と $u-w$（X軸方向の曲げ振動と図心軸方向の振動）の連成振動とに分離する．溝型断面の場合は u，v，w，θ がすべて連成した形で振動が起こる．

また，いずれの断面にしても，振動は対称振動，非対称振動に分離する．解析も，対称，非対称に分けて行い，H型断面ではさらに，$v-\theta$，$u-w$に分離して行う．これらを考慮すると近似項数も3項あるいは4

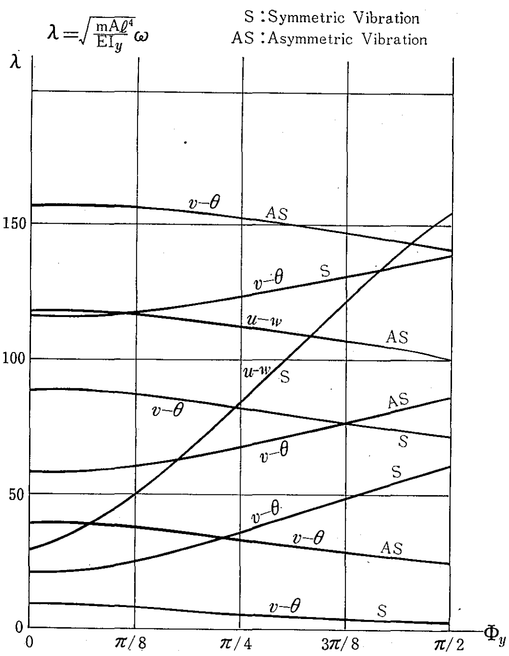


Fig. 2 Characteristic values (Pin-ends, H section)

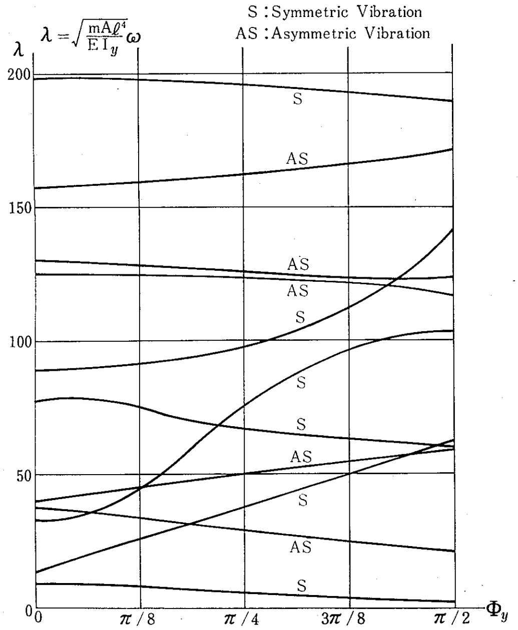


Fig. 3 Characteristic values (Pin-ends, Channel section)

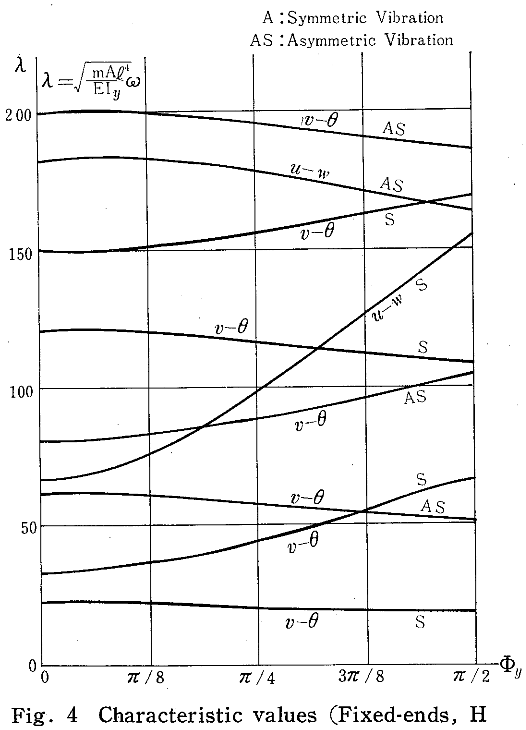


Fig. 4 Characteristic values (Fixed-ends, H section)

項をとれば充分の精度を得ることができる.

曲率を変化させたときの振動の固有値は Fig. 2, 3, 4, 5 に, 両端を固定した場合の振動モードは Fig. 6, 7 に示す. これらの図より次のことがわかる. (図中Sは対称, A Sは非対称振動をあらわす)

i) H型断面の場合

曲率＝0 すなわち真直なはりでは, u, v, w, θ は各々独立し, 曲率が少しでもあると u−w, v−θ の連成振動となる.

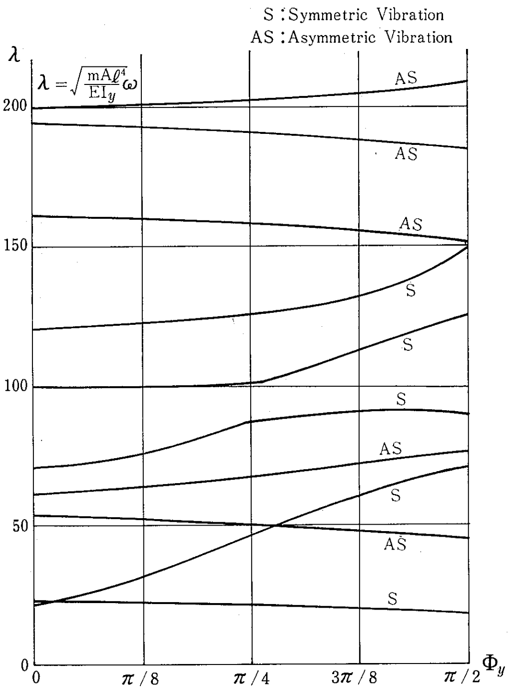
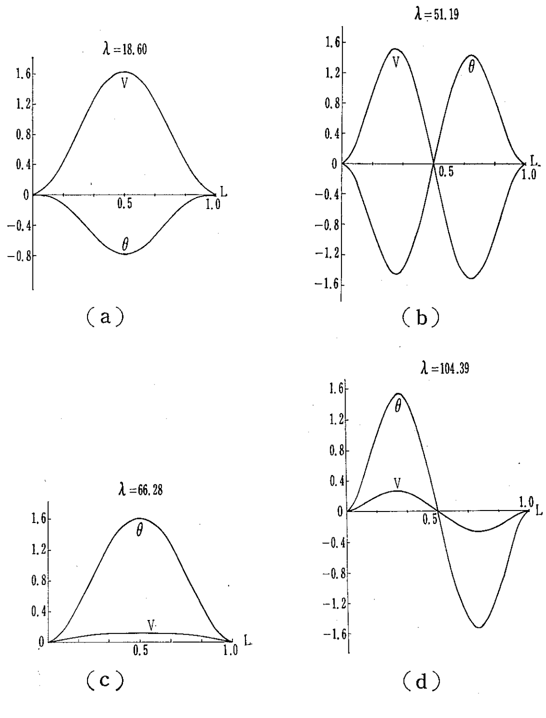


Fig. 5 Characteristic values (Fixed-ends, Channel section)



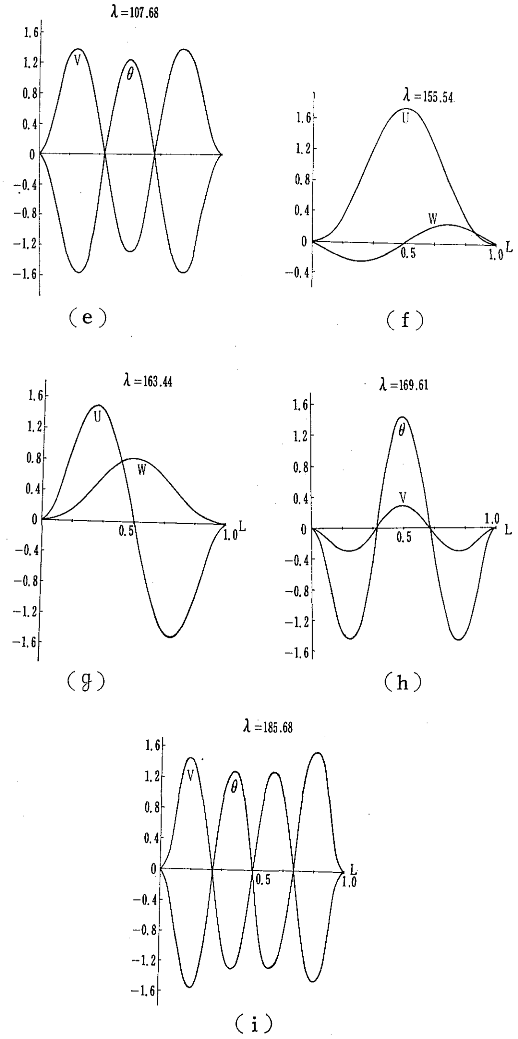


Fig. 6　Vibrating modes (Fixed-ends, H section)

固定の場合：固有値は真直なはりでは次の順序であらわれる．①Ｙ方向曲げ振動１次，②ねじり振動１次，③Ｙ方向曲げ振動２次，④Ｘ方向の曲げ振動１次，⑤ねじり振動２次，⑥Ｙ方向曲げ振動３次，⑦ねじり振動３次，⑧Ｘ方向の曲げ振動２次，⑨Ｙ方向曲げ振動４次．

曲率が増すにしたがい，真直なはりのＹ方向曲げ振動に相当する固有値は減少の傾向にあり，ねじり振動に相当する固有値は増加し，Ｘ軸方向の曲げ振動に相当する固有値は，対称振動は増加し，非対称振動は減る傾向を示す．

支持の場合：真直なはりで固有値が③と④が入れがわるだけで，曲率の増加に伴う固有値の変化の状態は固定と同様である．

ii)　溝型断面の場合

真直なはり（曲率＝０）では ｖ と ｗ は各々独立し，

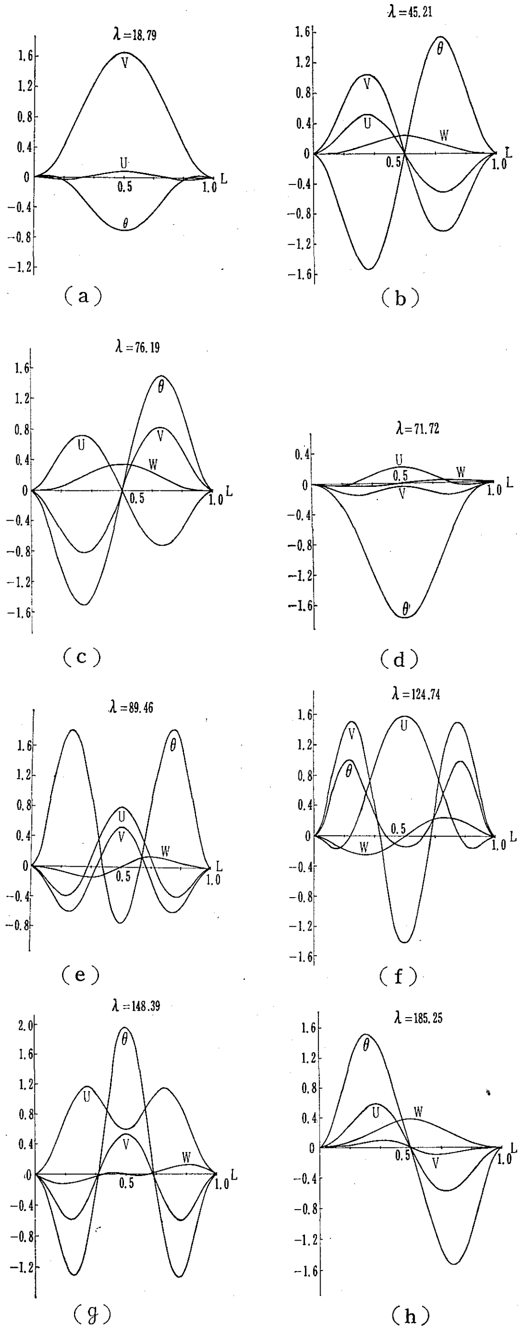


Fig. 7　Vibrating modes (Fixed-ends, Channel section)

ｕ と θ は連成振動となる．曲率が加われば，ｕ，ｖ，ｗ，θ の連成振動となる．

固定の場合：次の順序で真直なはりの固有値があらわれる．①Ｘ方向の曲げと，ねじれの連成振動１次，②Ｙ方向曲げ振動１次，③Ｘ方向の曲げとねじれの連成振動２次，④Ｙ方向曲げ振動２次，⑤Ｘ方向の曲げとねじれの連成振動３次，⑥Ｘ方向の曲げとねじれの連

成振動4次，⑦Y方向曲げ振動3次，⑧X方向の曲げとねじれの連成振動4次，⑨X方向曲げとねじれの連成振動5次，⑩Y方向曲げ振動4次.
曲率が増すにしたがい真直なはりのY方向曲げ振動の1次に相当する固有値は減少し，2，3，4次に相当する固有値は増加の傾向を示す．また真直なはりでX方向の曲げとねじりの連成振動に相当する固有値は，対称振動では曲率の増加にしたがって増大し，非対称振動では減少する.
支持の場合：真直なはりにおける固有値のあらわれ方は固定の場合と順序は違うが，Y方向曲げ振動に相当する固有値の示す傾向は固定の場合と同様である.

7. 実　験

7. 1 実験方法

はりの両端を固定して取り付けた試験片を振動させるには，CR 発振器より 0～2000 Hz を発振させ増幅器によりゲインをアップしたものを動電型加振器の入力として使用する.

共振状態を判別するには，試験片に接着させた歪ゲージにより動的歪をオシロスコープのY軸へ入れ，リサージュ図形によって調べる.
CR 発振器からの周波数は正確な値を読みとるためにディジタル式周波数カウンターを使用する.
使用した測定器類は，菊水 ORC － 27型 RC 発振器，ナショナル VP 454A型周波数カウンター，菊水553P型オシロスコープ，共和ダイナミックストレンメータ及びゲージ，ナック製 NV 002型加振器，山水 BA－60型低周波増幅器である.
配線は Fig. 8 の通りである.
試験片の振動モードを判別するために，重量の転い細粒状の砂を着色したものを使用する.
試験片の両端固定のための治具は，形鋼及び機械加工したものを利用してコンクリート床の上に固定する.

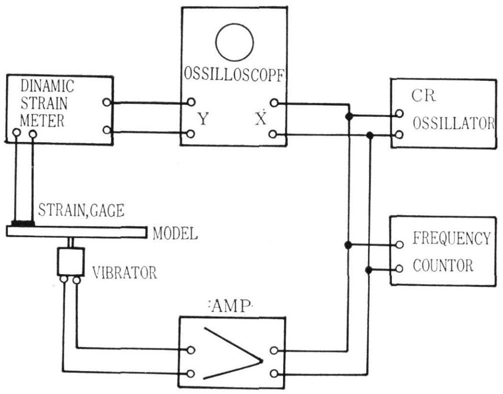


Fig. 8

この装置は両端の固定条件を満足するように設けたものである．装置の取り付けの状態は Fig. 9 に示す.

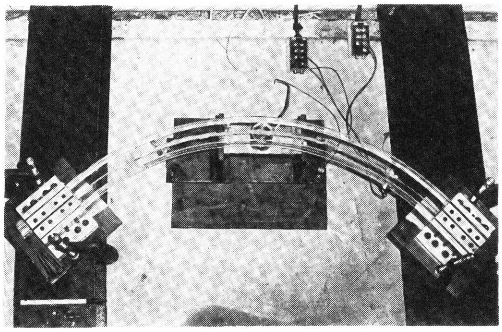


Fig. 9　Test specimen setup

7. 2 試験片

試験片の材質はアクリル樹脂で，接着により作る．寸法は Fig. 10 の通りである．試験片の両端は，固定するために 100 mm ずつの取付部を設けた.

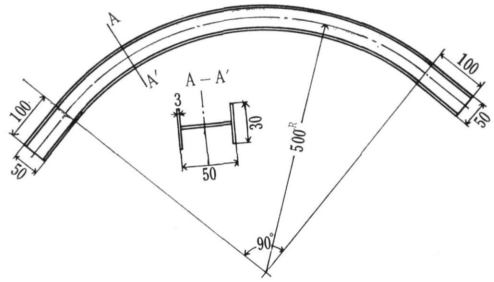


Fig.10　Dimensions of a test specimen

7. 3 実験結果及び考察

実験結果は Table. 1 の通りである.
この表は理論解析の固有値および計算値と実験値の比較である．表の空白の部分は u－w 方向の振動であるが装置の構造上の都合で実験できなかった．その他は，v－θ 方向（Y方向の曲げとねじれの振動）である.
計算値を求めるために材料の物理定数 $\sqrt{E/m}$ を知る必要がある．よって，試験片と同一の材料を用いて単体加工したものを使用し，ダイナミックストレンメータ，ビジグラフ等の測定器類を用いて片持ばりの振動実験を行い，測定し導き出した定数 $\sqrt{E/m}$ を使った.
計算値と実験値の若干の差は，単体加工した材料の定数と接着剤による接着加工した試験片の実験値の差異のためとも考えられる.
試験片の振動モードの代表的な例は Fig. 11 の通りである．点線の部分は着色砂の集まりの状態を示す．太い実線は理論解析からの節の箇所を示す．なお細い

Table 1 Natural frequency of the H section circular beam (central angle $\pi/2$)

λ	18.6	51.2	66.3	104.4	107.7	155.5	163.4	169.4	185.7
Calculation	60.1	165.4	214.1	337.2	347.9	502.3	527.8	547.2	599.8
Experiment	61	156	234	308	334	—	—	525	575

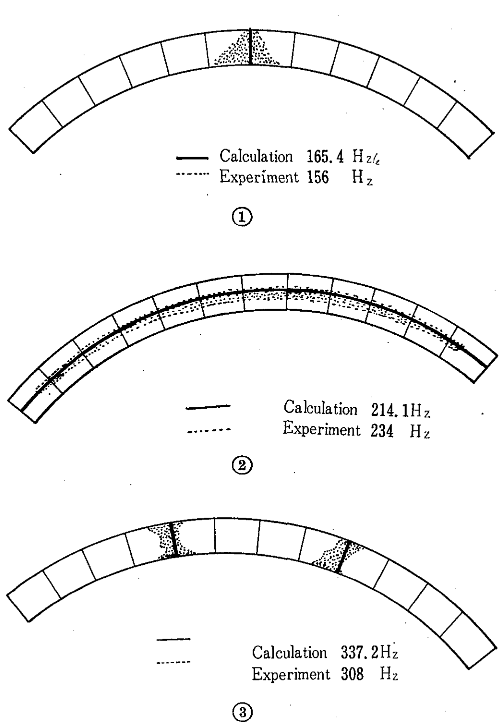


Fig.11 Comparison of vibrating modes

実線は状態と判別するために便宜的にしるしたものである.

8. むすび

薄肉の断面（H型と溝型）をもつ円弧はりの振動解析を行った．図心軸の伸縮を考慮した一般的形での振動解析と，裏付けとして行った実験とが，振動数の比較で，わりによく合っていることがたしかめられた．

細長いはりの場合，図心軸は伸縮しないと仮定することができる．伸縮を無視したときと，今回のように伸縮を考慮した場合の比較を行ってみることは大切であり，現在検討中である．

9. 文　献

(1) S. Komatsu and H.Nakai : Study on Free Vibration of Curved Girder Bridges, Trans. of JSCE, No.136 Dec. (1966)

(2) 山崎徳也・崎山毅：薄肉断面を有する円形曲りはりの面外自由振動，九大工学集報，第41巻4号

(3) 林毅・村外志夫・変分法，コロナ社