

定軸圧下で動的荷重を受ける梁の弾塑性応答について

修 行 稔*

On the Elasto-Plastic Response of A Beam-Column subjected to Dynamic Loadings under Constant Axial Thrust.

by

Minoru SHUGYO

(Department of Structural Engineering)

This study is concerned with an analysis of the elasto-plastic response of a beam-column. Author treats on cases of a beam-column subjected to constant axial thrust and dynamically varied lateral loads. The moment-curvature relation used for the analysis is obtained by using the simulation program of stress-strain relation of mild steel formulated by the author and other. As result, it is shown that the final deformation of a beam-column due to axial and dynamic lateral loads is affected greatly by the faithfulness of representing numerically the stress-strain relation of the material in general.

1. 序

強い衝撃荷重を受ける鋼構造物の強度を解析するに当っては、鋼材の弾塑性変形を考慮しなければならないが、一般に、その構造の最終的な強度は、特に材料の応力～歪特性の影響を大きく受ける。本研究においては、著者らが提案した、精度の高い鋼の応力～歪特性の定式化プログラムを用いて、一定軸圧を受ける梁が動的横荷重を受ける時の、弾塑性応答の解析を行ない、従来の方法による解析結果と比較検討を行って、著者らの提案する応力～歪特性の定式化の重要性を示した。

従来、この種の解析においては、部材の復元力特性を、bilinear等の定常なループに仮定しており¹⁾、歪履歴の影響や、繰返し負荷による素材の加工硬化などの、実際の材料の持つ重要な特性をほとんど考慮していない。この為、構造物の質点系へのモデル化の粗さと相俟って、解析結果の信頼度は必ずしも十分とは言えない。これは、従来、任意変動繰返し荷重下の、素材の応力～歪特性の性質が充分には明らかになっておらず、繰返し応力～歪特性の予測が困難であったこ

とに起因している。著者ほか一名は、先に、多数の軟鋼棒の引張圧縮実験を行なって、その結果を基礎にして、電子計算機プログラムを作製することにより、任意に変動する繰返し引張圧縮荷重下の、素材の応力～歪曲線の子測が可能なることを示した²⁾。更に、前報³⁾において、梁の断面を分割してその各々の繊維に、この応力～歪関係を適用して得られた、梁の繰返し曲げモーメント～曲率関係に基づいて、軸圧の無い単純支持梁の弾塑性振動応答を解析し、bilinear型モーメント～曲率関係に基づく解析結果と比較検討した。

これに続き、本報では、軸圧の影響を検討するため、降伏圧縮荷重を p_y として軸圧 $p_0=0.3p_y$ の下での単純支持梁の弾塑性振動応答を解析し、軸圧の無い場合の応答と比較するとともに、素材の繰返し応力～歪特性として、著者らの提案したもの、およびbilinearモデルの二者を用い、これらの相異をも検討した。解析は前報と同様、梁を質点系に分割して、集中質量法⁴⁾で行ない、刻々と変化する、定軸圧下の断面剛性は、断面分割・試索法⁵⁾によって求めた。

2. 鋼材の繰返し応力～歪特性

軟鋼が、任意に変動する繰返し引張圧縮荷重を受け

* 構造工学科

る際の、応力～歪曲線の prediction について先に報告²⁾したが、その二、三の計算例を示す。単純引張曲線は省略するが、これは、弾性域と降伏領域の直線式、および加工硬化域の最小2乗法による近似式

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{sign}(\epsilon)E\epsilon & \sigma \leq |\epsilon| < \epsilon_y \\ \sigma &= \text{sign}(\epsilon)E(\epsilon)_y & \epsilon_y \leq |\epsilon| < \epsilon_{st} \\ \sigma &= \text{sign}(\epsilon) \{-3.38(|\epsilon| + 0.072)^{-1} + 63.8\} & \epsilon_{st} \leq \epsilon \end{aligned} \quad (1)$$

ただし E; 縦弾性係数=2.17×10⁴Kg/mm²

ϵ_y ; 降伏歪=0.001244

ϵ_{st} ; 歪硬化開始点の歪=0.0198

応力の単位は Kg/mm²。

で表示する。

Fig. 1 は、歪振幅 0.03 の完全両振り試験の結果と計算結果との比較である。図に示す如く、繰返しに入

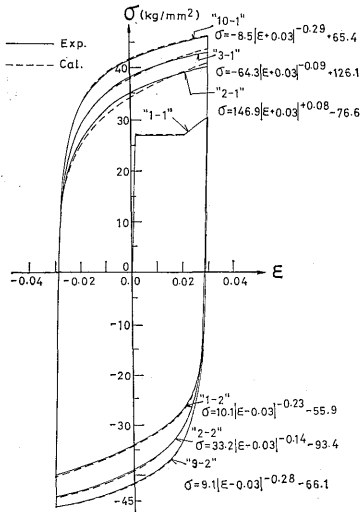


Fig. 1 Stress-strain relation under completely reversed strain amplitude of 0.03 and its expressions obtained by author's method.

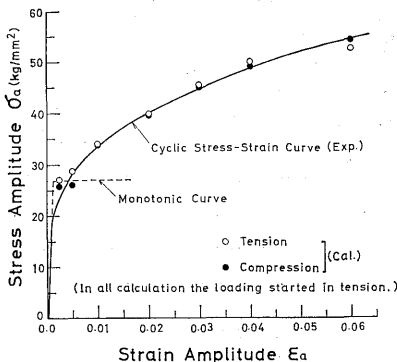


Fig. 2 Cyclic stress-strain curve.

った後の過程の表示式は、 $\sigma = q|\epsilon - r|^n + S$ の形である。Fig. 2 には、いろいろな歪振幅による完全両振り試験の結果得られる応力～歪曲線の先端を結んで得られる、いわゆる、cyclic stress-strain curve⁶⁾の実験値を実線で示し、Fig. 1 のような計算を行なった結果をプロットしている。両者とも10回繰返し時の値である。これらの図から、一定歪振幅下の繰返し応力～歪挙動が、かなりの精度で予測できることが認められる。Fig. 3 は、任意に変動する繰返し荷重が加えられた結果の一例である。このような一般的な変動負荷の場合でも、応力～歪特性を十分な精度で表現できることがわかる。この応力～歪曲線予測の電子計算機プログラムは、考えられるあらゆる負荷過程に対して破綻のない様考慮されており、除荷点の歪値あるいは応力値を与えれば、応力～歪履歴曲線を連続的に得ることができる。

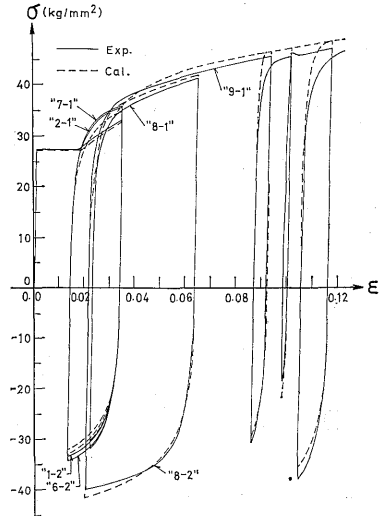


Fig. 3 Stress-strain relation under an arbitrarily varied cyclic load.

3. 定軸圧下の梁の曲げモーメント (M)～曲率 (φ) 関係

定軸圧下の梁の弾塑性動的応答を解析するには、定軸圧のもとで、一般的な変動曲げ荷重を受ける梁の、M～φ 関係が知られねばならない。これは、五十嵐らの方法⁴⁾で容易に得ることができる。解析に先だって、次のように仮定する。

- (1) 変形は一軸方向である
- (2) 梁の横断面は変形後も平面を維持する。
- (3) 断面に垂直な応力 σ 以外の応力成分は無い。
- (4) 各繊維の垂直応力 σ と垂直歪 ϵ の関係は、前章

で述べた、引張圧縮繰返し応力～歪特性で表現される。

以上の仮定により、定軸圧 P_0 のもとでの $M \sim \phi$ 関係は、次のようにして得られる。

- (1) 断面を曲げの軸に平行に N 個の微小要素に分割する。(Fig. 4)

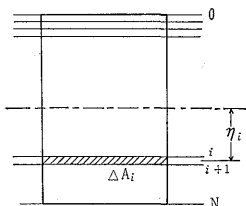


Fig. 4 Cross section.

- (2) 初期歪を $(\epsilon_b)_i$ で表わす。曲げ荷重が負荷される前の最初の段階では

$$\begin{aligned} (\epsilon_b)_i &= \epsilon_0 \\ \epsilon_0/\epsilon_y &= P_0/P_y \end{aligned} \quad (2)$$

である。ここで、 P_0 および P_y は、それぞれ定軸圧と圧縮降伏荷重であり、 ϵ_0 は P_0 に対応して断面に等分布した歪である。添字 i は断面の最外縁および分割線を表わす。

- (3) 断面に新たに加えられるべき、歪分布を仮定する。

$$\begin{aligned} (\epsilon)_0 &= \epsilon_g \\ (\epsilon)_N &= -\epsilon_v \end{aligned} \quad (3)$$

とすると、仮定(2)より、分割線 i 上の新しい歪は次のようになる。

$$(\epsilon)_i = (\epsilon_b)_i + \epsilon_g - (\epsilon_g + \epsilon_v) \cdot i/N \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

- (4) 仮定(4)により、前章で示した応力～歪関係式を用いて $(\epsilon)_i$ に対応する応力 $(\sigma)_i$ を計算する。曲げ荷重が繰返される場合、各分割線の除荷点の歪は当然異なった値となり、これに従って、応力～歪履歴曲線もそれぞれ違ったものになるので、それぞれの除荷点の歪値を記憶しておく必要がある。

- (5) 次式により断面軸力を計算する。

$$P_0' = \sum_{i=0}^{N-1} (\sigma)_i \cdot \Delta A_i \quad (5)$$

ここに、 $(\sigma)_i = \{(\sigma)_i + (\sigma)_{i+1}\}/2$

ΔA_i : 分割線 $i, i+1$ によって作られる微小要素の面積

- (6) 与えられた定軸圧 P_0 と、今求めた P_0' とを比較し、一致していなければ、step(3) に帰り、 ϵ_v

を変化させて、 P_0 と P_0' が等しくなるまで、(3)～(5) step を繰返す。

- (7) P_0 と P_0' がほぼ一致したら、次式により、曲げモーメントと曲率を計算する。

$$M = \sum_{i=0}^{N-1} (\sigma)_i \cdot \eta_i \cdot \Delta A_i \quad (6)$$

ここに η_i : 曲げの軸から分割線 $i, i+1$ の中点までの距離

$$\phi = \{(\epsilon)_0 - (\epsilon)_N\}/h \quad (7)$$

ここに h は断面の高さである。

- (8) $(\epsilon)_i$ を $(\epsilon_b)_i$ に置換えて、(3)～(7)step を繰返せば、定軸圧下の $M \sim \phi$ 曲線が得られる。

- (9) (3)において ϵ_g, ϵ_v の符号を逆転すれば、除荷および逆方向荷重の場合の $M \sim \phi$ 関係も、同様にして得ることができる。

Fig. 5～7 に、計算例として軸圧比 (P_0/P_y) がそれぞれ 0, 0.3, 0.5 の矩形断面梁に、同じ曲率履歴を与えた場合の $M \sim \phi$ 曲線を示す。断面寸法は 10×20 mmで、曲げ荷重は強軸回りに加えた。軸圧比が大きくなるにつれて、最初の塑性モーメント M_p は低下するが、繰返し変形による抵抗モーメントの上昇傾向

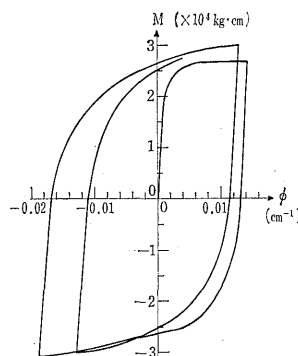


Fig. 5 Moment-curvature relation under no axial thrust.

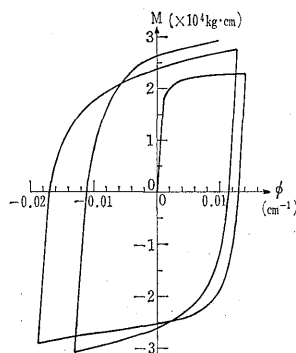


Fig. 6 Moment-curvature relation under constant axial thrust of $P_0=0.3P_y$.

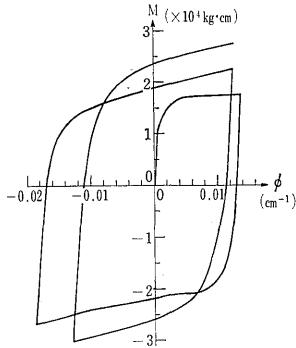


Fig. 7 Moment-curvature relation under constant axial thrust of $P_0=0.5P_y$.

は、軸圧比が大きくなる程、著しい。これらの曲線が実際の梁の挙動をどの程度正確に表現し得ているかは、実験によって確認しなければはっきり言う事はできないが、軟鋼梁の定軸圧下の弾塑性曲げ特性に関する五十嵐らの研究⁵⁾においてなされた実験の結果の傾向をよく表わしている。

なお、定軸圧のもとで繰返し曲げ荷重が加えられ、弾塑性変形を生ずる場合、分割された繊維一つ一つの応力～歪履歴が全て異なったものとなるため、曲げの中立軸は常に移動し、かつ軸方向の平均歪の蓄積が見られるが、これらの詳細については別に報告する予定である。また Fig. 5, 6 に対応する bilinear モデルは Fig. 11, 13 を参照されたい。

4. 定軸圧下の単純支持梁の弾塑性応答解析

解析法は、基本的には、前報³⁾と同様である。Fig. 8 のようにモデル化された梁において、各質点上の $M \sim \phi$ 関係は、前章で述べたように、それぞれの曲率の履歴に準じて各々異なった履歴曲線で求められる。ただし、この $M \sim \phi$ 履歴曲線は、あくまでも静的負荷時の繰返し応力～歪特性によって求められたものであるから、変形速度の影響を考慮しなければならないが、繰返し応力～歪特性のような複雑な変形過程に対する歪速度依存性に関しては、未だ明らかにされていないので、ここでは考慮しない。

さて、Fig. 8 の力学系に関する運動方程式は、次

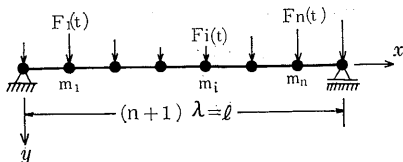


Fig. 8 Mathematical model of a simply supported beam.

のようになる。

$$m\ddot{y} = F(t) - R - Cy \tag{8}$$

ここに m : 質量行列

R : 梁の変形抵抗の列行列

C : 粘性減衰係行列

y, \dot{y}, \ddot{y} : 変位, 速度, 加速度の列行列

(8)式を解くには、 R が梁の任意の変形に対して求められねばならない。 R は $M \sim \phi$ 関係、変位の適合条件、および平衡条件から得られる。

(1) $M \sim \phi$ 関係

i 質点上の $M \sim \phi$ 関係が、前章で述べたような、滑らかな曲線で表わされるとし、曲げモーメントと曲率の現在値をそれぞれ、 L_i, ψ_i 、これからの微小変化をそれぞれ $\Delta M_i, \Delta \phi_i$ とすれば、次式が成り立つ。

$$M = L + K(\Phi - \psi) \tag{9}$$

ここに $K_{ij} = \Delta M_i / \Delta \phi_j \cdot \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

もし、 $\phi=0$ という条件が変形中に満足されれば、その点で i 点の断面は、除荷変形の状態に移るが、除荷点の値を L_i, ψ_i と置くことにより、常に(9)式が成り立つ。

(2) 適合条件

質点間で曲率の変化が線型であるとすれば、次の曲率 ϕ とたわみ y との関係が満足されねばならない。

$$y = \lambda^2 P \Phi \tag{10}$$

$$\text{ここに } P = H - Q - \frac{1}{6} I \tag{11}$$

$$H_{ij} = j \left(\frac{n+1-j}{n+1} \right)$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} i-j & (i > j) \\ 0 & (i \leq j) \end{cases}$$

I = 単位行列

(3) 平衡条件

Fig. 9 に示すような、軸圧 P_0 を受ける単純支持梁において、モーメント M 、抗力 R の間には次の関係がある。

$$M = \lambda S R + P_0 y \tag{12}$$

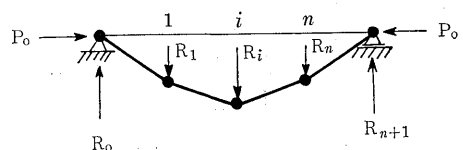


Fig. 9 Deformed beam model.

$$\text{ここに } P_{0ij} = \begin{cases} P_0 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$S = H - Q = P + \frac{1}{6}I \quad (13)$$

さて、(10)、(12)式を(9)式に代入して整理すれば次式を得る。

$$R = Ay + B \quad (14)$$

ここに

$$A = \lambda - 1S^{-1}(\lambda - 2KR^{-1} - P_0) \quad (15)$$

$$B = \lambda - 1S^{-1}(L - K\psi) \quad (16)$$

(14)式が得られれば、前報と同様に、次式を得る。

$$(D+A)y(t_2) = (D-A)y(t_1) + (\Delta t \cdot D - 2C)y(t_1) + G \quad (17)$$

ここに

$$D = \frac{4}{(\Delta t)^2}m + \frac{2}{\Delta t}C \quad (18)$$

$$G = F(t_1) - F(t_2) - 2B \quad (19)$$

Δt ; 微小時間々隔

5. 解析例および考察

梁は、 1×2 cm の矩形断面を有する単純支持梁とし、7 質点に分割した。加えられる軸圧 P_0 の値は $0.3P_y$ で、軸圧の無い場合、および bilinear 型 $M \sim \phi$ 関係を適用した場合の挙動と、それぞれ比較した。計算に用いた諸量は次の通りである。

素材の降伏応力 $\sigma_y = 2700 \text{ kg/cm}^2$

素材の弾性係数 $E = 2.17 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

歪硬化開始点の歪 $\epsilon_{st} = 0.0198$

断面分割数 $N = 20$
 梁の長さ $l = 50 \text{ cm}$
 梁の曲げ剛度 $EI = 1.447 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$
 梁の単位長さ当たりの重さ

$$m_0 = 0.0156 \text{ kg/cm}$$

梁の弾性振動固有周期

$$\tau_0 = 5.28 \times 10^{-3} \text{ sec}$$

時間々隔

$$\Delta t = T_0/5000$$

この梁の $M \sim \phi$ 履歴曲線は、Fig. 5~6 に示したようなものとなる。それぞれの軸圧での $M \sim \phi$ 関係に対応する bilinear 型モデルの塑性曲げモーメント M_p (軸圧比 $P_0/P_y = 0$) と M_p' ($P_0/P_y = 0.3$) は、それぞれ次のような値となる。

$$M_p = 2.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_p' = 2.25 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

M_p は、断面の上下端が降伏し始める時のモーメント (降伏曲げモーメント (M_y)) の約 1.46 倍となり、 M_p' は、断面の上下端のいずれかが降伏し始める時のモーメント (M_y') の約 1.78 倍となる。

動的横荷重は、 $F(x, t) = A \cdot g(t) \cdot f(x)$ の形で

$$f(x) = 1, \quad g(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t/\tau_0) & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ 0 & (\tau_0 < t) \end{cases}$$

とし、 A の値としては、静的な荷重で梁の中央部のモーメントが、 $1.46M_y$ 、および $1.46M_y'$ となるような等分布荷重 $F_0 = 8 \times (1.46M_y)/l^2$ と $F_0' = 8 \times (1.46M_y')/l^2$ とを用いた

Fig. 10 に $F(x, t) = F_0 \cdot g(t) \cdot f(x)$ に対する、各

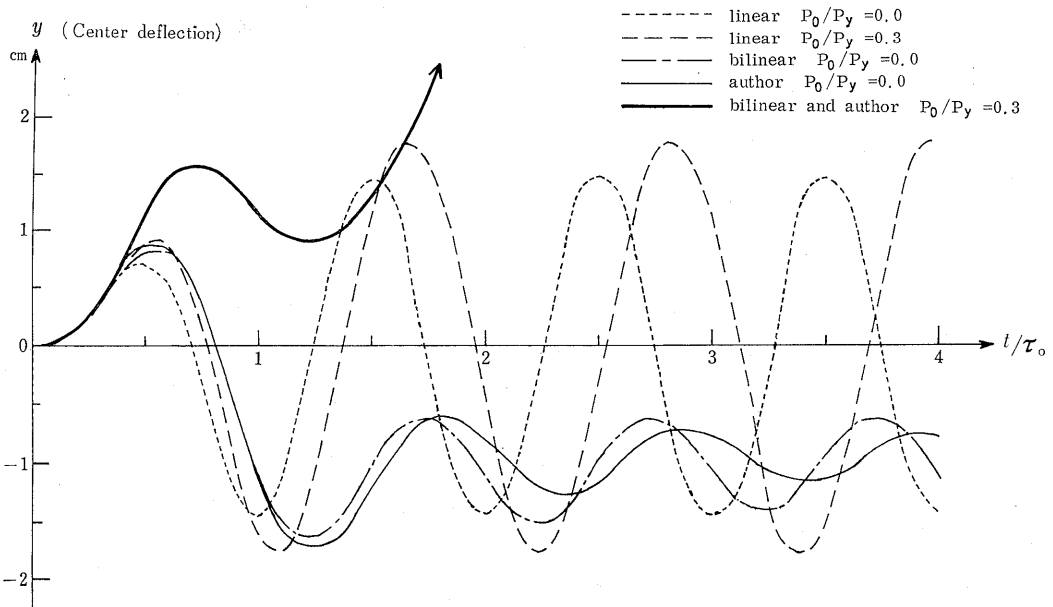


Fig. 10 Response curves to $F(x, t)$.

種の $M \sim \phi$ 関係に基づいた梁の中央部の応答を示す。解析法ならびにプログラムの妥当性を検討するために、まず、梁が弾性的な $M \sim \phi$ 特性を持つ時の応答を計算した。梁の弾性振動理論によると、ここで用いた梁の場合、軸圧 $P_0 = 0.3P_y$ の自由振動固有周期は、軸圧零の時の周期の 1.182倍となるが、自由振動領域において、本解析の結果の誤差は 1% 以内に納まっており、分割質点数および時間間隔はこれで充分であると考えられる。

さて軸圧零の梁の応答では、著者の求めた $M \sim \phi$ 特

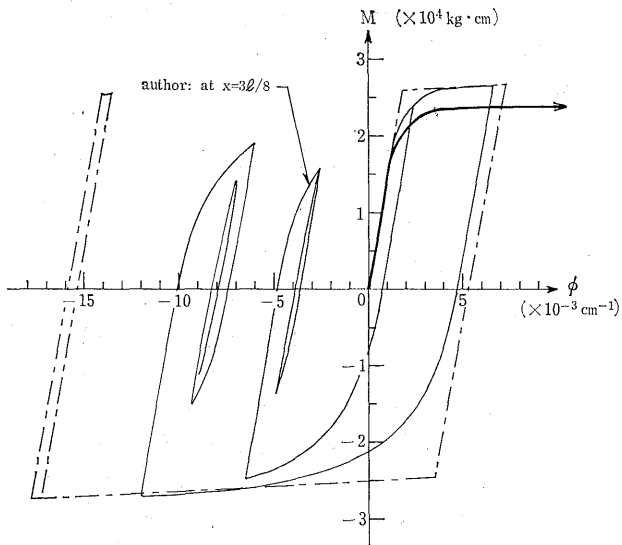


Fig. 11 $M \sim \phi$ hysteresis curves at the center due to $F(x, t)$.

性に基づくものと bilinear モデルに基づくものとに、最終的なたわみ量の差はほとんど見られない。しかし、前者は振動振幅の減衰が著しく、かなりの位相の遅れがある。Fig. 11 に、梁中央部の質点（質点 4）およびその一つ隣の質点（質点 3）の位置での、 $M \sim \phi$ 履歴曲線を示している。実線、鎖線等は Fig. 10 に示した応答曲線に対応している。梁中央部での最終的なたわみがほぼ同じであるにもかかわらず、 $M \sim \phi$ 履歴にはかなりの差がある。特に、質点 3 ($x = 3l/8$) においてその差が特徴的に現われており、bilinear モデルによるものは、図に示していないが、弾性限度が高くなるために、質点 3 においてはほとんど塑性化していない。これが原因となって、質点 4 が大きな塑性変形を起こさざるを得なくなっているものと思われる。梁全体の変形状態を知ろうとする時、著者の求めた $M \sim \phi$ 特性の重要性は明らかである。軸圧 $0.3P_y$ の加えられた梁は、図に見られるように塑性崩壊する。

Fig. 12 は $F'(x, t) = F_0' \cdot g(t) \cdot f(x)$ に対する応答である。軸圧のない場合の応答は、 $F(x, t)$ に対する応答に較べると著者のものおよび bilinear の両者とも永久変形量が少なくなる点は同じ傾向であるが、変形量そのものにはこの両者の間に顕著な差がある。軸圧のある梁の応答は、軸圧の影響として、最初に動的横荷重負が荷された方向への変形が助長され、その方向に最終たわみが偏移する。また、周期が長くなるが、その割合は軸圧のない梁に比べ

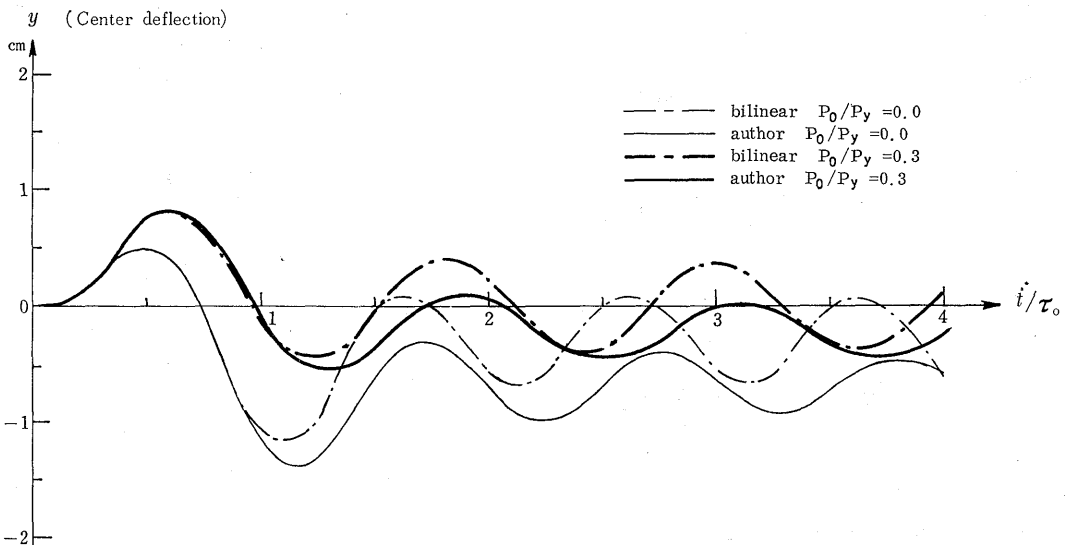


Fig. 12 Response curves to $F'(x, t)$.

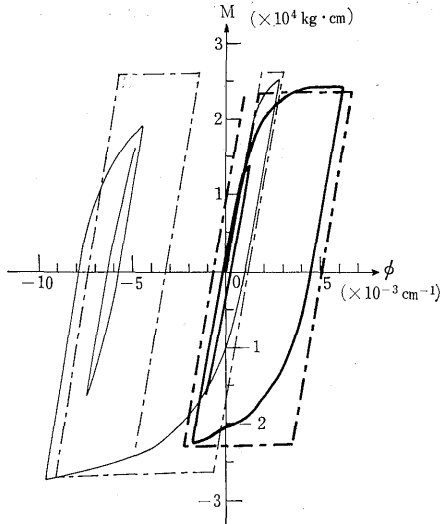


Fig. 13 $M\sim\phi$ hysteresis curves at the center due to $F'(x, t)$.

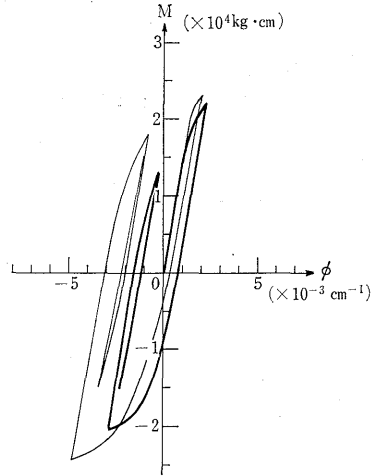


Fig. 14 $M\sim\phi$ hysteresis curves at $x=3l/8$ due to $F'(x, t)$.

て約 1.17 倍程度であり、弾性梁の特性とほぼ同じであると言える。著者の求めた $M\sim\phi$ 特性によるものが、bilinear のものに比べて、最終振幅が約半分となり、かなりの位相の遅れがあるのは、軸圧のない場合と同様である。Fig. 13. 14 はそれぞれ、 $F'(x, t)$ に対する 梁中央部および質点 3 ($x=3l/8$) の位置での $M\sim\phi$ 履歴曲線を示している。実線、鎖線等は Fig. 12 の応答曲線に対応している。bilinear モデルによるものは、 $x=3l/8$ においては軸圧の有る場合も無い場合も共に弾性限内にとどまっているため、図示していない。 $F(x, t)$ に対する $M\sim\phi$ 履歴曲線についても述べた様に、質点 3 における $M\sim\phi$ 履歴が梁の応答に重要な役割を果しており、特に $P_0=0.3P_y$ 下での $M\sim\phi$ 履歴において、梁中央部の残留曲率よりも質点 3 の位置での残留曲率が大きくなっていることは注目すべき現象である。

6. 結 語

梁の曲げ振動特性に寄与する大きな要素である $M\sim\phi$ 関係として、従来多く使用されている bilinear 型のものおよび著者の提案する滑らかな、そして変形履歴の影響をも含んだ $M\sim\phi$ 関係の両者を適用し、定軸圧 $P_0=0.3P_y$ を受ける単純支持された矩形断面の梁柱の、動的横荷重に対する応答を解析し、軸圧のない場合の応答と比較した。その結果をまとめると、

- (1) 定軸圧下での梁の繰返し $M\sim\phi$ 関係において、最初の負荷時の塑性モーメント値は軸圧の影響により低下するが、繰返し弾塑性曲げによる抵抗モ

- ーメントの上昇度は軸圧の大きいほど大きい。
- (2) 軸圧の影響により、動的横荷重負荷後の最終たわみが最初撓んだ方向に偏移するが、振幅値にはほとんど変化がない。また、軸圧による周期の変化は弾性梁の特性に類似している。これらの点に関しては、bilinear と著者のものとの間に大きな差は無い。
- (3) 軸圧の有無にかかわらず、著者の求めた $M\sim\phi$ 関係による応答は、bilinear のものに比べて最終振幅が著しく減少し、位相が遅れる結果となる。また、梁中央部の最終的なたわみ量および梁の中央部付近の $M\sim\phi$ 履歴には顕著な差が認められ、梁の弾塑性曲げ振動挙動を知る上において、著者の提案する $M\sim\phi$ 特性の重要性が示された。

おわりに、本研究を行うにあたり御指導を賜った、九州大学工学部栖原二郎教授に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) W. D. Iwan : Response of Multi-Degree-of-Freedom Yielding Systems., Proc. of the ASCE, No. EM2, 1968
- 2) J. Suhara and M. Shugyo : On the Prediction of Stress-Strain Relations of Mild Steel subjected to Arbitrarily Varied Low Cycle Loads by means of Computer., Proc. of the 17th Japan Congress on Materials Research, 1974
- 3) 修行 稔 : 動的荷重を受ける梁の動的応答解析,

- 長崎大学工学部研究報告, 第 4 号, 昭和48年
- 4) A. C. Heidebrecht, et al : Dynamic Analysis of Inelastic Multi Degree System., Jour, of the ASCE, No. EM6, 1963
- 5) S. Igarashi, C. Matsui, et al : Inelastic Behaviours of Structural Steel Sections under Alternative Loadings., Trans. of A. I. J., No. 169, 1970
- 6) B. I. Sandor : Fundamentals of CYCLIC STRESS AND STRAIN., The University of Wisconsin Press, 1972