砂の直接セン断試験における主応力軸の回転とその応用

落　合　英　俊*

Rotation of Principal Stress Axes in Direct Shear Tests of Sands and its Applications

by

Hidetoshi OCHIAI

(Department of Civil Engineering)

In direct shear tests, principal stress axes gradually rotate during the increase of shear stress τ under the constant normal stress σ_N. Besides, the strain increment in the horizontal direction is confined the condition of zero, wheares, it is not zero in the vertical direction.

In this paper, by modifying the relationship between the stress ratio on the horizontal plane τ/σ_N and the inclination angle ψ of the major principal stress axis to the vertical direction, $\tau/\sigma_N=\kappa \tan\psi$, the principal stresses σ_1, σ_3 in the direct shear tests are determined and the behaviors of sands, which satisfy the plane strain condition, are quantitatively explained.

1. まえがき

セン断面（ゾーン）指定型の直接セン断試験では，セン断に伴ない試料内の主軸が回転する．また，水平方向の試料境界面（外力の作用面）において，その面に平行な方向のヒズミ増分はゼロに拘束されているが，垂直方向のヒズミ増分は，セン断に伴なう体積変化（ダイレイタンシー）が生じるため，一般にゼロとはならない（Fig. 1 において，$\dot{\varepsilon}_{xx}=0$，$\dot{\varepsilon}_{yy}\neq 0$）．さらに，材料としての土は異方性物質であるため，応力とヒズミ，応力とヒズミ増分の主軸は一般に一致しない．このように，セン断面（ゾーン）指定型の直接セン断試験では，変形の拘束条件，材料としての土の複雑さのために，試料内の応力状態が不明確である．試料内の応力状態を知るためには，モール応力円を利用するのが，有力かつ簡単な方法であるが，通常の直接セン断試験では水平方向の試料境界面における応力 σ_N，τ のみしか測定できないので，モール応力円を得ることはできない．通常，(1)応力の最大傾角面と水平面が一致する．(2)最大セン断応力面と水平面が一致する．という仮定が用いられているが，これらの仮定は実験事実と相異する（3.参照）．

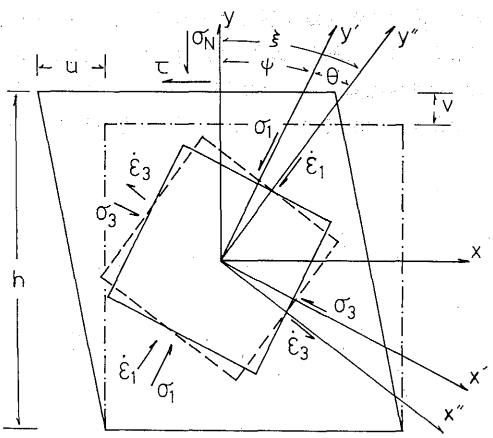

Fig. 1　Direct shear tests

本文では，小田・小西[(1)(2)(3)]により提案され，砂の実験結果によりその妥当性が検証されている砂の直接セン断試験における主応力軸の回転式をもとに，水平面上の応力 σ_N，τ の値より主応力 σ_1，σ_3 を求める方法を示し，平面ヒズミ状態を満足する砂の挙動を定量的に説明し，併せて実験結果との比較を行なった．

---

*土木工学科

2．主応力軸の回転に関する小田・小西の式

小田・小西はエポキシ樹脂丸棒の二次元積層体を試料として単純セン断試験を行ない，セン断中の丸棒接点における接平面の接線方向（N_i）の分布を調べ，この N_i の頻度分布のベクトル和の方向に垂直な面上の合力は面に直交することを示した．このことより，N_i のベクトル和の方向は近似的に最大主応力軸に一致する，すなわち主応力軸の回転に伴ない N_i のベクトル和の方向も回転し，それら回転角はほぼ一致することを示した．さらに側圧一定の三軸圧縮試験における砂の強度変形特性とその微視的構造との関係に関する小田の提案式[4]をもとに，砂の直接セン断試験における主応力軸の回転式として(1)式の簡略式を与え，Roscoe et al[5]，Cole[6] の砂の単純セン断試験結果により，その妥当性を検証している．(Fig. 2)．

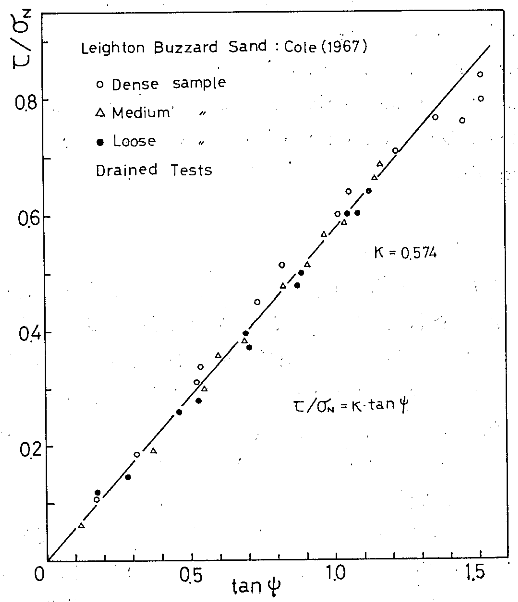

Fig. 2　Linear relationship between τ/σ_N and $\tan\psi$ in direct shear tests

$$\tau/\sigma_N = \kappa\cdot \tan\psi \tag{1}$$

ここに，σ_N，τ＝水平面上の垂直およびセン断応力，ψ＝最大主応力軸と鉛直軸のなす角，κ＝粒子間摩擦角 ϕ_μ に関係した材料定数である．

落合[7][8]は(1)式を用いて砂の直接セン断における応力の問題について考察し，(1)式の定数 κ の意味を明確にした．すなわち，平面ヒズミ状態をともに満足する直接セン断試験と平面ヒズミ試験における砂の内部摩擦角の関係式に，Rowe[9] の考えを利用する方法と，Schofield & Wroth[10] の critical state の概念を利用する方法により，定数 κ の意味を考察した結果，critical state において発揮される摩擦角 ϕ_{cv} により，次式で表わされることを示した．

$$\kappa = \sin\phi_{cv} \tag{2}$$

なお，4.で述べるように，ϕ_{cv} は粒子間摩擦角 ϕ_μ により表わされるので（(14)式），定数 κ は小田・小西の指摘するように，ϕ_μ に関係した材料定数となる．

3．直接セン断試験におけるモール応力円

セン断面（ゾーン）指定型の直接セン断試験では，水平方向の試料境界面上に応力 σ_N，τ を作用させ，その値のみを測定し，他の境界面上の応力測定が試験技術上非常な困難を伴なうため，その値が未知で，モール応力円を作図することはできず，次のような仮定が一般に用いられている．

(1)応力の最大傾角面（$(\tau/\sigma_N)_{max}$ 面）と水平面が一致する（Fig. 3 (a)）．この仮定はセン断強さがみかけのセン断応力の方向に発揮されるというもので，応力の最大傾角（摩擦角）ϕ_m は水平面上の応力 σ_N，τ により次式で与えられる．

$$\tan\phi_m = \tau/\sigma_N \tag{3}$$

また，応力の最大傾角面（すべり面）は水平方向および水平方向と（$90°-\phi_m$）の方向となり，最大主応力軸は鉛直軸に対して，（$45°+\phi_m/2$）の角度をなす．

(2)最大セン断応力面（τ_{max} 面）と水平面が一致す

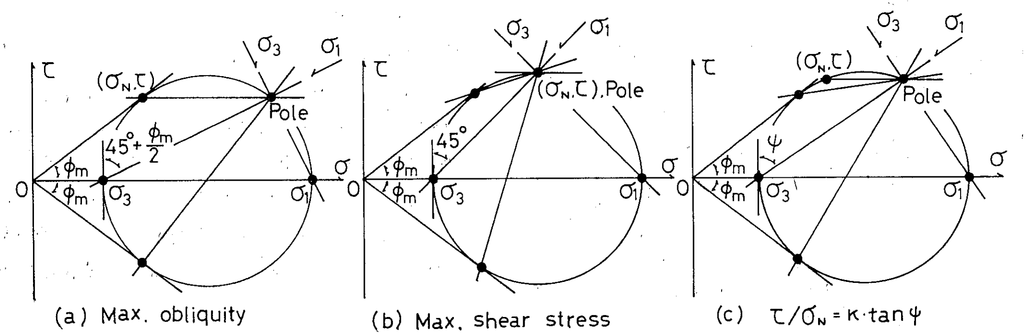

Fig. 3　Mohr stress circles in direct shear tests

る (Fig. 3 (b)). この仮定では，応力の最大傾角（摩擦角）ϕ_m は次式で与えられる.

$$sin\ \phi_m = \tau/\sigma_N \quad (4)$$

応力の最大傾角面（すべり面）は水平方向に対して，$\phi_m/2$ および $(90°-\phi_m/2)$ の方向となり，最大主応力軸は鉛直軸に対して，つねに45° の角度をなす.

Cole[6] はいわゆる Roscoe タイプの改良された単純セン断試験機 (*SSA*, M_k6) を用いて Leighton Buzzard Sand について試験を行ない，水平面および他の試料境界面における応力とヒズミを独立に実測し，上記の仮定によるピークの応力比の実測値との差として，Table 1 の結果を得ている. この結果は上記(1), (2)の仮定が妥当でないことを示している.

Table 1 Comparison of predicted with measured values of the peak stress ratio for two assumptions for interpreting drained tests in the SSA.(after Cole (1967))

Assumption	Dense sample (e_0 =0.529)		Loose sample (e_0 =0.755)	
	$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$	difference from measured value (%)	$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$	difference from measured value (%)
Maximum obliquity (ω =0)	0.624	−6.9	0.531	−12.1
Maximum shear stress (β =0)	0.798	+19.1	0.627	+ 3.8
measured value	0.670		0.604	

砂の直接セン断試験における主応力軸の回転に関する(1)式を用いた場合の各応力状態におけるモール応力円は次のように求められる[7][8]. 水平面上の応力を σ_N, τ とすると，(1)式における ψ =最大主応力軸と鉛直軸のなす角=最大主応力面と水平面のなす角であるので，最大主応力を σ_1 とすれば，モール応力円の Pole の座標は $(\sigma_1-\kappa\sigma_N,\ \tau)$ となる. $(\sigma_N,\ \tau)$, $(\sigma_1-\kappa\sigma_N,\ \tau)$, $(\sigma_1,\ 0)$ の3点が σ 軸上に中心をもつモール応力円上になければならないという条件より，最大および最小主応力 σ_1, σ_3 は次のように求められる.

$$\sigma_1 = (\tau^2+\kappa\sigma_N{}^2)/\kappa\sigma_N \quad (5)$$

$$\sigma_3 = (1-\kappa)\sigma_N \quad (6)$$

それゆえ，応力の最大傾角（摩擦角）ϕ_m は次式で与えられる (Fig. 3 (c)).

$$sin\ \phi_m = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3} = \frac{(\tau/\sigma_N)^2+\kappa^2}{(\tau/\sigma_N)^2+\kappa(2-\kappa)} \quad (7)$$

また，応力の最大傾角面(すべり面)は水平方向に対して，〔$45°+(\phi_m/2)-\psi$〕および〔$135°-(\phi_m/2)-\psi$〕の方向となり，最大主応力軸は鉛直軸に対して，ψ の角度をなす. Fig. 4 は Leighton Buzzard Sand (ϕ_{cv}=35°)に関する Cole[6] の実験結果と(7)式の関係を示すものであり，(7)式の妥当性が認められる. また，(5), (6)式によれば，水平面上の応力 σ_N, τ に対応して主応力 σ_1, σ_3 が求められるので，モール応力円を得ることができ，セン断に伴なう砂の挙動を定量的に知ることができる. たとえば，Fig. 5 に示すモール応力円の幾何学的関係より，応力の最大傾角面と水平面のなす角 ω，最大セン断応力面と水平面のなす角 β，応力の最大傾角面と最大主応力軸のなす角 α は，それぞれ，(8), (9), (10)式で与えられる.

$$\omega = 45°+\phi_m/2-\psi \quad (8)$$

$$\beta = 45°-\psi \quad (9)$$

$$\alpha = 45°-\phi_m/2 \quad (10)$$

これら(8), (9), (10)式に(1), (7)式を用いれば，セン断に伴なう ω, β, α の変化を知ることができる. Fig. 6 は ω と β について，Leighton Buzzard Sand (ϕ_{cv} =35°, $\kappa=sin\ \phi_{cv}$=0.574) に関する Roscoe et al[5] の実験結果との比較を示したものであり，初期間ゲキ比によらず，よく一致しており，(1)式によるモール応

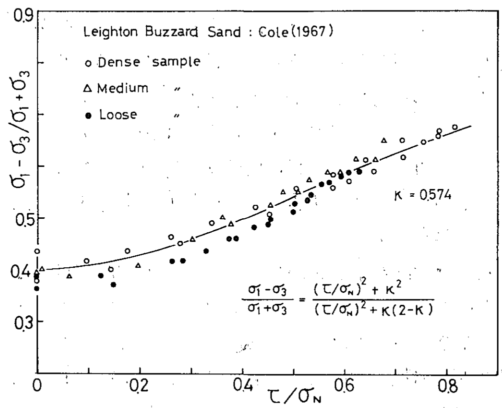

Fig. 4 Relationship between the stress ratios $\sigma_1-\sigma_3/\sigma_1+\sigma_3$ and τ/σ_N in direct shear tests

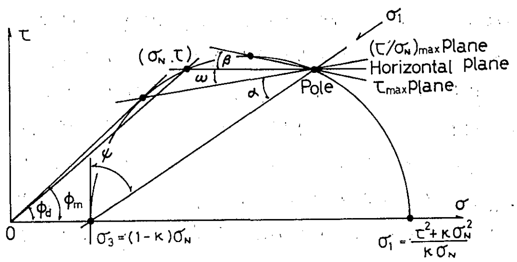

Fig. 5 Mohr stress circle by $\tau/\sigma_N=\kappa$ tan ψ in direct shear tests

力円の妥当性を示している．なお，(6)式によれば，直接セン断試験における最小主応力σ_3はセン断応力τに無関係に垂直応力σ_Nのみによって一義的に決定され，σ_N＝一定でτのみを増加させる通常の直接セン断試験におけるモール応力円の変化は，側圧σ_3一定の三軸圧縮試験におけるモール応力円の変化と同一になる．

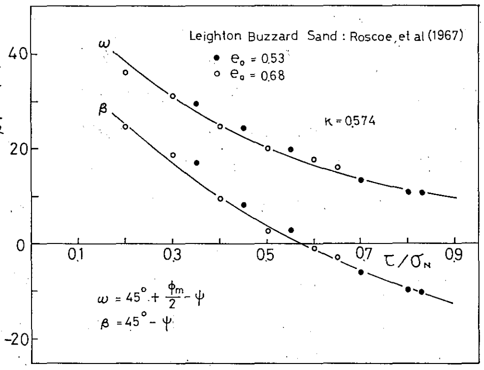

Fig. 6　Comparison of experimental data with eq. (8) and eq. (9)

4．粒子間摩擦角 ϕ_μ との関係

砂のような粒状土のセン断変形に対する抵抗は変形量の関数であり，応力変化に伴なう何らかの量を導入する必要があるが，それには何らかの基準量を明確に設定する必要がある．そして，粒状土の力学特性としては，明確に定義されたその基準量とダイレイタンシーとの関係において議論することが本来の姿であろう．その基準量として，材料の粒子間摩擦角ϕ_μが考えられ，このϕ_μと他の摩擦角との相対関係を知ることは重要な問題である．

直接セン断試験において，水平方向の試料境界面に垂直応力σ_Nのみを作用した場合，(5)，(6)式より最大および最小主応力は$\sigma_1=\sigma_N$，$\sigma_3=(1-\kappa)\sigma_N$であり，最大主応力軸は鉛直軸に一致する（$\psi=0$）．直接セン断試験は，通常セン断箱内で行なわれるので，このとき試料には側方への変位が拘束された状態（静止土圧状態）で，主応力差$\sigma_1-\sigma_3=\kappa\sigma_N$が生じ，ある摩擦角$\phi_{m,\psi=0}$が発揮されている．ところで，小田・小西[1]はエポキシ樹脂丸棒の二次元積層体の単純セン断試験により，粒子間の各接点において発揮されている摩擦角δ_iを実測し，垂直力のみを作用したセン断前の状態（静止土圧状態）においても，粒子間におけるすべりの発生条件となる$|\delta_i|=\phi_\mu$を満足する接点が存在することを確かめている．また，山口[11]は静止土圧状態において土粒子集合体の各粒子間接平面に働らく応力について粒子論的考察を行ない，静止土圧係数K_0は本質的に粒子間摩擦角ϕ_μに関係するものであることを示している．これらのことより，水平方向の変位を拘束し，垂直応力σ_Nのみを作用した状態（静止土圧状態）において発揮されている摩擦角$\phi_{m,\psi=0}$は粒子間摩擦角ϕ_μに等しいと考えることができる．

$$\phi_{m,\psi=0}=\phi_\mu \tag{11}$$

それゆえ，(7)式において，$\tau/\sigma_N=0$のときのϕ_mを(11)式で置き換えると次式が得られる．

$$\sin\phi_{m,\psi=0}=\sin\phi_\mu=\kappa/2-\kappa \tag{12}$$

あるいは

$$\kappa=2\sin\phi_\mu/1+\sin\phi_\mu \tag{13}$$

(2)式より，$\kappa=\sin\phi_{cv}$とすれば，critical stateにおける摩擦角ϕ_{cv}と粒子間摩擦角ϕ_μの関係式として，次式が得られる．

$$\sin\phi_{cv}=2\sin\phi_\mu/1+\sin\phi_\mu \tag{14}$$

Roscoe et al[5]，Cole[6]の用いたLeighton Buzzard Sandについて，$\kappa=\sin\phi_{cv}=\sin 35^\circ=0.574$とすれば，(14)式より$\sin\phi_\mu=0.403$，それゆえ$\phi_\mu=23^\circ 45'$となり，この砂の$\phi_\mu=24^\circ$とほとんど一致する．

ところで，ϕ_{cv}とϕ_μの関係式としては，Caquot[12]の理論式，Bishop[13]の実験式が著名である．Caquotは体積変化がない状態（critical state）で変形を受けている粒状材料のすべりについて粒子論的に考察し，球表面全体にわたって働いている平均的なすべり面に直角および平行な方向の力を積分することにより，次式を求めた．

$$\tan\phi_{cv}=(\pi/2)\tan\phi_\mu \tag{15}$$

Bishopは海浜の玉石とレキについて，三軸圧縮試験と直接セン断試験を行ない．次の実験式を求めた．

(i) 三軸圧縮試験；$\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$

$$\sin\phi_{cv}=15\tan\phi_\mu/10+3\tan\phi_\mu \tag{16}$$

(ii) 平面ヒズミ；$\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$

$$\sin\phi_{cv}=(3/2)\tan\phi_\mu \tag{17}$$

Fig. 7は(14)～(17)式を示したものである．Bishopの実験式はϕ_μが約25°以下ではCaquotの理論式とよく一致するが，ϕ_μがそれ以上になるとϕ_{cv}が急激に増加し，広範囲のϕ_μには適用できないと考えられる．一方，ここで求められた(14)式はCaquotの理論式と約1°程度の差できわめてよく一致していることは興味深い．さらに，$\phi_\mu=0$あるいは$\phi_\mu=90^\circ$といった理想材料の場合，ϕ_{cv}も当然，$\phi_{cv}=0$あるいは$\phi_{cv}=90^\circ$となるべきであり，(14)式はこれらの点も満足しており，広範囲のϕ_μに対して適用可能な式であるといえよう．

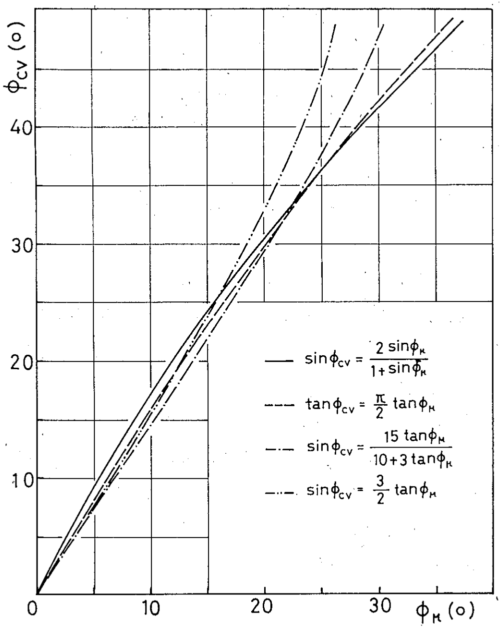

Fig. 7　Relationship between ϕ_{cv} and ϕ_μ

5. 静止土圧係数 K_0

静止土圧係数 K_0 は地下壁や地中埋設物等の設計に際して重要な値であり，また自然状態で堆積する地盤は側方拘束状態で自重により圧密され，この状態もいわば静止土圧状態である．材料を等方等質の弾性体と仮定すれば，水平方向の変位がゼロの状態における水平方向の応力 σ_H と鉛直方向の応力 σ_V の比で定義される静止土圧係数 $K_0=\sigma_H/\sigma_V$ は $\varepsilon_H=0$ の条件より，ポアソン比を ν として次式で与えられる．

$$K_0 = \nu/1-\nu \tag{18}$$

しかし，土は等方等質の弾性材料ではなく，またそのポアソン比を正確に定義できるか否かも問題であり，定義できたとしても，全変形過程を通じてその値は一定とはなりえないであろう．

4.で述べたように，直接セン断試験において水平方向の試料境界面に垂直応力 σ_N のみを作用したセン断前の状態 ($\psi=0$) は側方変位が拘束された静止土圧状態である．このとき，(5), (6)式より最大および最小主応力は $\sigma_1=\sigma_N$, $\sigma_3=(1-\kappa)\sigma_N$ である．それゆえ，静止土圧係数 K_0 は次式で与えられる．

$$K_0 = \sigma_3/\sigma_1 = 1-\kappa \tag{19}$$

定数 κ として，(2)式あるいは(13)式を用いれば，K_0 は ϕ_{cv} あるいは，ϕ_μ により，次式で与えられる．

$$K_0 = 1-\sin\phi_{cv} \tag{20}$$

あるいは，

$$K_0 = 1-\sin\phi_\mu/1+\sin\phi_\mu = \tan^2(45°-\phi_\mu/2) \tag{21}$$

ところで，Jáky[14] はコウ配が ϕ' である三角形砂層内に $(\pi/4+\phi'/2)$ の三角形コア部を考え，その応力状態を外側の土が塑性化しているとして，コア中心線上の静止土圧係数 K_0 として次式を求めている．

$$K_0=\frac{1+(2/3)\sin\phi'}{1+\sin\phi'}(1-\sin\phi') \fallingdotseq 0.9(1-\sin\phi') \tag{22}$$

その後，実験結果により(22)式を次式に修正している．

$$K_0 = 1-\sin\phi' \tag{23}$$

ここに ϕ' は有効応力による内部摩擦角であり，初期間ゲキ比 e_0 により変化する．

Brooker & Ireland[15] は粘性土については，次式が適当であるとしている．

$$K_0 = 0.95-\sin\phi' \tag{24}$$

山口[11] は粒子論的考察に基づき，次式を求めている．

$$K_0=\frac{1-(2/\pi)\tan\phi_\mu}{1+(\pi/2)\tan\phi_\mu} \tag{25}$$

Fig. 8 はここで求められた(21)式と山口による(25)式の関係を示したものである．通常の諸鉱物の粒子間摩擦角 ϕ_μ は 15°～30° 程度であるが，この ϕ_μ の範囲内では，両式はほとんど一致する．

Fig. 9 は Leighton Buzzard Sand (ϕ_{cv}=35°) に

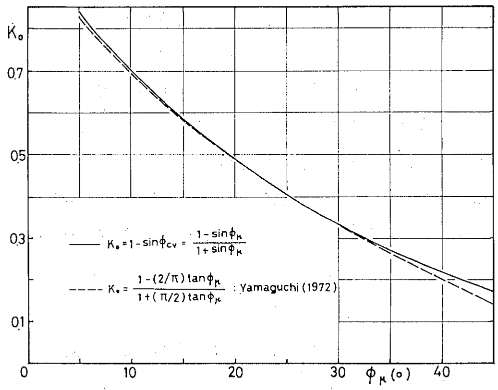

Fig. 8　Relationship between K_0 and $\phi\mu$

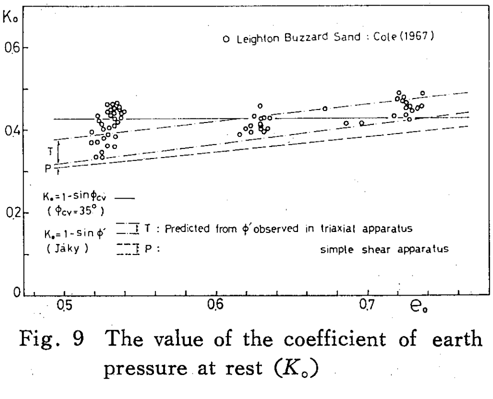

Fig. 9　The value of the coefficient of earth pressure at rest (K_0)

関する Cole[6] の実験結果とここで得られた(20)式とJàky による(23)式を示したものである．実験結果にはかなりのばらつきがあるが，K_0 が有効応力による内部摩擦角 ϕ'，したがって初期間ゲキ比 e_0 に依存することは実験事実であり，ϕ' として三軸装置により得られた値を用いると，Jàky の式は実験結果をほぼ予測することができる．ここで得られた(20)式では，ϕ_{cv} が材料固有の定数であるため，K_0 が ϕ' あるいは e_0 に依存して変化することは説明できないが，Fig. 8 にみられるように，材料の平均的な K_0 値を表わす式であることがわかる．

6．直接セン断試験と平面ヒズミ試験における砂の内部摩擦角の関係

セン断面（ゾーン）指定型の直接セン断試験と主応力制御型の平面ヒズミ試験の相異は，前者ではある特定の面上あるいはゾーン内で強制的に破壊させられ，さらにみかけのセン断面（水平面）上において，その面に平行な方向のヒズミ増分がゼロに拘束されている（Fig. 1 参照）のに対し，後者ではそのような拘束条件がないことである．しかし，これら両試験とも試料は平面ヒズミ状態を満足しているので，直接セン断試験における水平面上の応力 σ_N，τ の値により，破壊時のモール応力円を得ることができれば，その応力円への包絡線は平面ヒズミ試験における破壊包絡線を与えることになる．したがって，直接セン断試験における破壊時の水平面上の応力を σ_N，τ，それに対応する最大および最小主応力を σ_1，σ_3 とすれば，直接セン断試験と平面ヒズミ試験における砂の内部摩擦角 ϕ_d，ϕ_p はそれぞれ次式で与えられる（Fig. 10）．

$$\tan\phi_d = \tau/\sigma_N \qquad (26)$$

$$\sin\phi_p = \sigma_1-\sigma_3/\sigma_1+\sigma_3 \qquad (27)$$

したがって，(1)式より得られる(5)，(6)式および(26)式を(27)式に代入することにより，ϕ_d と ϕ_p の関係式として，次式が求められる．

$$\sin\phi_p = \frac{\tan^2\phi_d+\kappa^2}{\tan^2\phi_d+\kappa(2-\kappa)} \qquad (28)$$

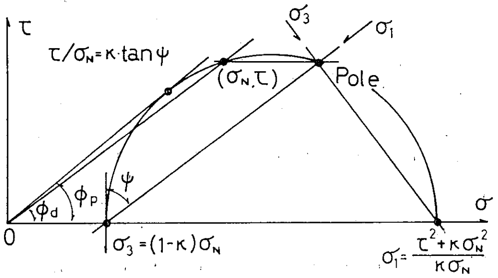

Fig. 10 Mohr stress circle relating ϕ_d and ϕ_p

定数 κ として，(2)式あるいは(13)式を用いれば，ϕ_{cv} あるいは ϕ_μ の関数として次式で表わされる．

$$\sin\phi_p = \frac{\tan^2\phi_d+\sin^2\phi_{cv}}{\tan^2\phi_d+(2-\sin\phi_{cv})\sin\phi_{cv}} \qquad (29)$$

あるいは，

$$\sin\phi_p = \frac{(1+\sin\phi_\mu)^2\tan^2\phi_d+4\sin^2\phi_\mu}{(1+\sin\phi_\mu)^2\tan^2\phi_d+4\sin\phi_\mu} \qquad (30)$$

ところで，Rowe[9] は主応力軸と主ヒズミ増分軸の一致性の仮定と平面ヒズミ試験における彼の応力，ダイレイタンシー式をもとに，ϕ_d と ϕ_p の関係式として，次式を求めている．

$$\tan\phi_d = \tan\phi_p\cdot\cos\phi_{cv} \qquad (31)$$

また，Frydman[16] は塑性論における応力および速度場の考え方，主応力軸と主ヒズミ増分軸の一致性の仮定および八面体応力面における応力・ダイレイタンシー式をもとに，ϕ_d と ϕ_p の関係式として次式を求めている．

$$\tan\phi_d = \frac{\sin\phi_p\cdot\cos\nu}{1-\sin\phi_p\cdot\sin\nu} \qquad (32)$$

ここに，ν は Davis[17] により与えられているダイレイタンシー角で，次式で表わされる．

$$\sin\nu = -dv/d\gamma = -(d\varepsilon_1+d\varepsilon_3)/(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3) \qquad (33)$$

なお，主応力軸と主ヒズミ増分軸の一致性を仮定すれば，(1)式の ψ と(33)式の ν は，応力およびヒズミ増分に対するモール円の幾何学的関係より，次式の関係にある．

$$\psi = 45°+\nu/2 \qquad (34)$$

この(34)式を用いれば，Frydman の(32)式はここで得られた(28)式からも容易に求められる．

また，実際には平面ヒズミ試験における $\phi_p \geqq \phi_{cv}$ であるが，$\phi_p=\phi_{cv}$ のときには，ここで得られた(29)式と Rowe による(31)式は，ともに $\tan\phi_d=\sin\phi_{cv}$ となり一致する．$\phi_p>\phi_{cv}$ のときには，ϕ_p と ϕ_d の差は(31)式の方が(29)式よりも大きくなる．

Table 2 は Rowe[9] の実験結果より Frydman[16] が引用した値を用いて，(29)，(31)，(32)式により，ϕ_d の

Table 2 Values of ϕ_d versus ϕ_p, in degrees (Measured values, after Rowe (1969))

		Measured values			ϕ_d, Predicted values		
Material		ϕ_{cv}	ϕ_p	ϕ_d	Eq. (29)	Eq. (31)	Eq. (32)
Feldspar	Dense	41.0	53.0	44.0	49.3	45.0	44.4
	Loose	41.0	41.5	32.5	34.0	33.7	35.0
Mersey sand	Dense	32.0	46.0	42.0	44.9	41.3	41.3
	Loose	32.0	32.0	28.0	27.9	27.9	29.0
Glass ballotini	Dense	24.0	39.0	36.5	38.9	36.5	37.0
	Loose	24.0	27.0	25.0	25.9	25.0	25.8

計算値を示したものである（なお，Frydman の(32)式では，ϕ_{cv}，ϕ_p の値のみから ϕ_d は計算できないので，Frydman 自身の計算値[16] をそのまま引用した）．ここで得られた(29)式による ϕ_d は，ゆるい砂の場合，実験結果とよく一致することがわかる．密な砂の場合，(31)，(32)式に比べて多少大きめな値を与えるが，これはその基本になっている(1)式において，供試体の変形をすべて粒子間のすべり変位にもとづく塑性変形とみなし，弾性変形が無視されていること，および供試体の不均一な変形などによるものと考えられる[18]．しかし，主応力と主ヒズミ増分軸の一致性の仮定を用いずに簡略な(1)式のみで，実験結果をほぼ説明できることは，他の式にない利点である．

7．破壊時における応力・ダイレイタンシー関係

土は弾性材料よりもむしろ塑性材料に近い挙動をするので，応力とヒズミの関係よりも応力とヒズミ増分の関係でその挙動を把らえることの方が望ましいと考えられるが，土は異方性の顕著な材料であるため，応力とヒズミ増分の主軸は一般に一致しない．

Fig. 11 は水平方向の試料境界面における応力を σ_N，τ，ヒズミ増分を $\dot{\varepsilon}_N$，$\dot{\gamma}$ として，砂の直接セン断試験における応力とヒズミ増分に対するモール円を示すものである（Fig. 1 参照）．ここに ξ ＝最大主ヒズミ増分軸と鉛直軸のなす角である．Fig. 11 の幾何学的関係より，次の関係式が得られる．

$$\sin\phi_m=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}=\frac{(\tau/\sigma_N)^2+\kappa^2}{(\tau/\sigma_N)^2+\kappa(2-\kappa)} \qquad (7)$$

$$\cos 2\xi=\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_3/\dot{\varepsilon}_1-\dot{\varepsilon}_3 \qquad (35)$$

また，θ ＝最大主応力軸と最大主ヒズミ増分軸のなす角とすると，

$$\xi=\psi+\theta \qquad (36)$$

$$\tan^2\xi=\tan^2(\psi+\theta) \qquad (37)$$

$\cos 2\xi=1-\tan^2\xi/1+\tan^2\xi$ の関係に，(37)式に(1)式を代入した値を用いて整理し，途中で近似計算を行なうと次の関係が得られる．

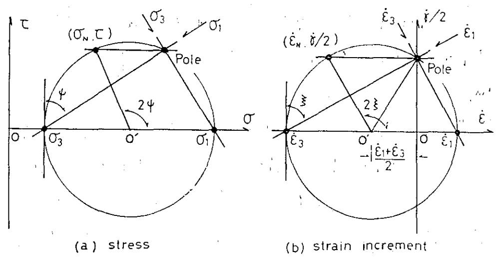

Fig. 11　Mohr circles for stress and strain increment in direct shear tests

$$\cos 2\xi \fallingdotseq \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{\kappa^2-(\tau/\sigma_N)^2}{\kappa^2+(\tau/\sigma_N)^2} \qquad (38)$$

(38)式に(7)式を用いて整理し，(35)式を用いると，応力とヒズミ増分の関係として，次式が得られる．

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}=\frac{\kappa}{1+\dfrac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}(1-\kappa)\cos 2\xi}$$

$$=\frac{\kappa}{1+\dfrac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}(1-\kappa)\dfrac{\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1-\dot{\varepsilon}_3}} \qquad (39)$$

(39)式は $\cos 2\xi=\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_3/\dot{\varepsilon}_1-\dot{\varepsilon}_3$ が大きくなる．すなわち密な状態になるにつれて θ の影響が顕著に表われ，$\cos 2\xi$ が小さい（ゆるい状態）場合には，その影響がきわめて小さく表われることを示している．

Fig.12 はピーク応力時における Leighton Buzzard Sand（$\kappa=0.574$）の実験結果[6] と(39)式の関係を示すものである．$\cos 2\xi$ が小さい（ゆるい状態）場合，$\theta \fallingdotseq 0$ とみなしても，実験結果を説明することができ，ゆるい砂の場合には，ピーク応力時においては主応力軸と主ヒズミ増分軸はほぼ一致することを示した Cole[6] の実験結果とも一致する．しかし，全体的にみて，$\theta=24°$ とすれば，初期間ゲキ比 e_0，垂直応力 σ_N の大きさによらず，実験結果をかなりうまく説明することができる．そして，$\theta=24°$ という値が Leighton Buzzard Sand の粒子間摩擦角 $\phi\mu=24°$ と一致していることは，ピーク応力時における砂の変形機構と関連して，きわめて興味深いことである．

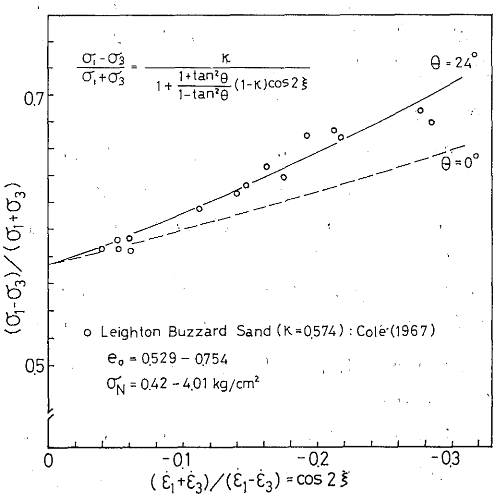

Fig. 12　Stress-dilatancy relation at peak stress ratio in direct shear tests

8．ま と め

従来，セン断面（ゾーン）指定型の直接セン断試験は，その応力状態を明確にせぬまま用いられてきた．本文は主応力軸の回転に関する(1)式を用いて，直接セン断試験における砂の挙動を定量的に明らかにするとともに，平面ヒズミ状態を満足する場合への応用を示し，実験結果によりその妥当性を検証した．

主要な結論は次のとうりである．

(1) (1)式の定数 κ は ϕ_{cv} あるいは ϕ_μ により，(2)式あるいは(13)式で表わされる．

(2) 直接セン断試験における主応力は，水平面上の応力 σ_N，τ により，(5)，(6)式で与えられる．これらの式により，セン断に伴なう応力の最大傾角面などの変化を定量的に表わすことができる．

(3) ϕ_{cv} と ϕ_μ の間には，(14)式の関係がある．

(4) 静止土圧係数 K_0 は(20)式あるいは(21)式で与えられる．これらの式による K_0 は，その土の平均的な K_0 値を与えるものである．

(5) 直接セン断試験と平面ヒズミ試験における砂の内部摩擦角 ϕ_d と ϕ_p の間には，(29)式あるいは(30)式の関係がある．

(6) 破壊時における応力・ダイレイタンシー関係として(39)が成立する．主応力軸と主ヒズミ増分軸のなす角 θ を ϕ_μ に等しくとれば，e_0，σ_N によらず，実験結果をうまく説明できそうである．

最後に，粒状体の研究に際し，日頃暖い御指導をいただいている九州大学山内豊聡教授，本学部伊勢田哲也教授に感謝の意を表します．また，直接セン断試験における主軸の回転に関し，有意義な御教示をいただいた本学部松原茂教授に感謝致します．

参考文献

(1) Oda, M, & Konishi, J. (1974) ; Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear, Soils & Foundations, Vol.14, No.4, p. 25－38.

(2) Oda, M. & Konishi, J. (1974) ; Rotation of principal stresses in granular material during simple shear, Soils & Foundations, Vol.14, No. 4, p.39－53.

(3) Oda, M. (1975); On stress-dilatancy relation of sand in simple shear test, Soils & Foundations, Vol. 15, No. 2, p. 17－29.

(4) Oda, M. (1972) ; Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests, Soils & Foundations, Vol. 12, No. 4, p. 45－63.

(5) Roscoe, K. H., Basset, R. H. & Cole, E. R. L. (1967) ; Principal axes observed during simple shear of a sand, Proc. Geotec. Conf. Oslo, p. 231－237.

(6) Cole, E. R. L. (1967) ; The behavior of soils in the simple shear apparatus, Ph. D. thesis, Cambridge University.

(7) 落合英俊，山内豊聡（1975）；砂の直接セン断，第10回土質工学研究発表会講演集，p.129－132.

(8) 落合英俊（1975）；直接セン断試験における砂の挙動，土質工学会論文報告集，第15巻，第４号.

(9) Rowe, P.W. (1969); The relation between the shear strength of sands in triaxial compression plane strain and direct shear, Geotechnique, Vol. 19, No. 1, p. 75－86.

(10) Schofield, A. & Wroth, P. (1968) ; Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, London.

(11) 山口柏樹（1972）；静止土圧に関する二，三の考察，第27回土木学会年次学術講演会講演集，第Ⅲ部，p.109－110.

(12) Caquot, A. (1934) ; Equilibre des Massifs a Frottement Interne, Gauthier Villars.（最上武雄（1969）；土質力学，「第８章，粒状体の力学」技報堂，p.893－1036による).

(13) Bishop, A. W. (1954) ; Correspondence on "Shear characteristics of a saturated silt, measured in triaxial compression" by A. D. M. Penman, Geotechnique, Vol. 14, No. 1, p. 43－45.

(14) Jáky, J. (1944) ; The coefficient of earth pressure at rest, Magyar Mérnök-és Épiyész-Egylet Közlönye, Budapest, No. 22, In Hungarian. (Kézdi, A. (1972) ; Stability of rigid structures, Proc. 5th. European Conf. SMFE, Vol. 2, p. 105－130. による)

(15) Brooker, W. & Ireland, H. O. (1965) ; Earth pressures at rest related to stress history, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 2, No. 1, p. 1－15.

(16) Frydman, S. (1974) ; Yielding of sand in plane strain, Proc. ASCE, Vol. 100, GT5, p. 491－501.

(17) Davis, E. H. (1968); Theories of plasticity of soil masses, Soil Mechanics, selected topics (ed. I. K. Lee), Butterworth, p. 341－380.

(18) 小田匡寛（1974）；砂のシンプルシアにおける応力・ダイレイタンシー関係について，第29回土木学会年次学術講演会講演集，第Ⅲ部，p. 47－48.