連成を考慮した吊橋の基礎方程式について

（第１報，静的微小変形問題）

高　橋　和　雄*　・古　道　正　男**
中　沖　耕　造***・室　井　智　文****
田　代　幸　英*****

On Fundamental Equations of a Stiffened Suspension Bridge Considering Coupled Deformations

(Part I Static Small Deflection Problem)

by

Kazuo TAKAHASHI
(Civil Engineering)

Masao FURUMICHI
(Japan Highway Public Cooperation, Kawasahi, Kanagawa)

Kozo NAKAOKI
(Kobe Steel Ltd., Structural Engineering Laboratory, Amagasaki, Hyogo)

Tomofumi MUROI
(Japan Highway Public Cooperation, Tuyama, Okayama)

Yukihide TASHIRO
(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka)

A set of fundamental equations of a stiffened suspension bridge is derived with the aid of the variational principle within static small deflection theory. Because of complexity in structural conjunctions and mutual reactions of individual members, i. e., stiffened girder, cables and hangers, the fundamental equations are the coupled nonlinear form of expressions, which is caused from the horizontal component Hp of the cable tension produced by live load.

As numerical examples, the results are applied to the analysis of a suspension bridge subjected to the static wind forces. Convergence of the present solution, comparison with the previous solution, the effect of the horizontal cable tension Hp and the effect of angles of attack are reported.

1. 緒　　言

従来の吊橋の変形や応力解析にあたっては，補剛桁の変形や鉛直，水平および捩れの各変形がそれぞれ独立に生ずるものとする解析手法が行なわれてきた[1)]．しかしながら，吊橋のケーブルは空間曲線をなすこと，ケーブルの左右の変位差，補剛桁自身が最初からキャンバーによる曲率をもつことおよび風のように水平，鉛直および回転の各成分を有する外力が作用する場合

*土木工学科
**日本道路公団，神奈川県川崎市
***神戸製鋼所構造研究所，兵庫県尼崎市
****日本道路公団，岡山県津山市
*****九州大学工学部土木工学科，福岡県福岡市箱崎町

などのために各変形が独立に生ずることは不可能である．また，吊橋の補剛桁は一般に長大スパンでかつトラスやボックスなどの中空簿肉断面で構成され，かつケーブルが変形しやすい構造物であることを考慮すると，その応力解析にあたっては有限変形理論の適用や，断面剛の仮定などの検討が必要である．この種の問題に関して最近本州四国連絡橋上部構造委員会の活動をはじめとしていくつかの研究が見受けられる[2)-4)]．

吊橋は補剛桁，ケーブルおよびハンガーからなる複合構造物からなるために，連成を考慮した吊橋の基礎方程式を幾何学的考察により力の釣合式を誘導する手法ではキャンバーによる初期曲率や有限変形，断面変形を考慮する場合には困難が伴なう．そこで本研究は変分原理を用いて最小ポテンシャルエネルギーの原理による吊橋の基礎方程式の誘導を試みたものである．周知のように本法の特徴は材料力学の基本的仮定のみを用いて，後は数学的演算のみで基礎方程式を誘導することができるために複雑な構造系への適用が容易である．本論文ではその第１報として連成を考慮した吊橋の基礎方程式を静的微小変形の範囲で，撓度理論と同程度の精度で工学的な形で誘導した結果を報告したものである．計算例として従来全く取り扱いの考慮されていない抗力，揚力および空力モーメントの３分力を考慮した風荷重を受ける吊橋の変形と断面力[5)]について検討したものである．

2. 一般図および記号

解析の対象とした吊橋の一般図および断面図は Fig. 1および２に示すとおりである．また，本論文で用いられる記号は次のとおりである．

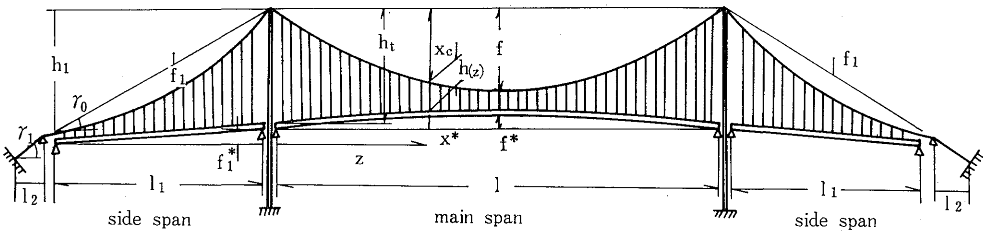

Fig. 1 Geometry of a symmetrical three-span suspension bridge with simply supported stiffened girder

l：補剛桁中央径間長(m)　f：ケーブルサグ(m)

h_t：タワーハンガー点でのハンガー長さ(m)

h_1：側径間の陸側橋台より塔頂までの高さ(m)

f^*：キャンバーサグ(m)，d：補剛桁の高さ(m)

b：主ケーブル間隔(m)，a：補剛桁の重心と上弦材中心（またはハンガー取付点）の距離(m)

e：補剛桁のせん断中心と重心との距離(m)

$x_c(z)$：吊橋完成時のケーブル形状(m)

$x^*(z)$：吊橋完成時の補剛桁キャンバー(m)

$h(z)$：ハンガー長(m)

L_E：ケーブルの形状長さ（全径間の合計長）(m)

L_T：ケーブルの温度応力長さ(全径間の合計長)(m)

I_v：補剛桁の鉛直方向断面２次モーメント (m^4/Bridge)

I_h：補剛桁の水平方向断面２次モーメント (m^4/Bridge)

J：補剛桁の St. Venant の捩れ剛性(m^4/Bridge)

I_ω：補剛桁の曲げ捩れ剛性(m^6/Bridge)，$I_{\omega y}=EI_he$

H_ω：吊橋の死荷重によるケーブルの水平張力 (t/cable)

H_{pi}：吊橋の活荷重によるケーブル i の水平張力 (t/cable)

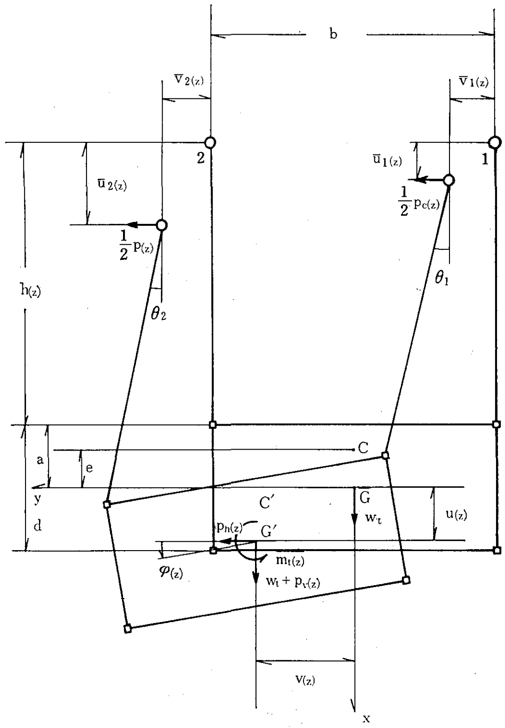

Fig. 2 Coordinate system sand external forces of the cross section

w_t ：補剛桁の単位長さあたりの死荷重(t/m)
w_c ：ケーブルの単位長さあたりの死荷重(t/m)
$p_v(z)$：補剛桁に作用する鉛直方向活荷重(t/m)
$p_h(z)$：補剛桁に作用する水平方向活荷重(t/m)
$p_c(z)$：ケーブルに作用する水平方向活荷重(t/m)
$m_t(z)$：補剛桁の図心に作用する捩れモーメント (tm/m)
$u(z)$：補剛桁の図心の鉛直変位(m)
$\bar{u}_i(z)$：ケーブル i の鉛直変位(m)
$v(z)$：補剛桁の図心の水平変位(m)
$\bar{v}_i(z)$：ケーブル i の水平変位(m)
$\theta_i(z)$：ハンガー i の傾き(rad)
E：鋼の弾性係数(t/m^2)
E_c ：ケーブルの弾性係数(t/m^2)
G：鋼のせん断弾性係数(t/m^2), $\triangle T$：温度変化(°C)
α：鋼の線膨張係数(1/℃)
$D_t(z)$：補剛桁に作用する風荷重の抗力成分 (t/m/Bridge)
$D_c(z)$：ケーブルに作用する風荷重の抗力成分 (t/m/cable)
$L_t(z)$：補剛桁に作用する風荷重の揚力成分 (t/m/Bridge)
$M_t(z)$：補剛桁に作用する風荷重の空力モーメント成分(tm/m/Bridge)　$V(z)$：風速(m/sec)
$\alpha(z)$：風の迎え角(rad)　ρ：風の密度$(t\cdot sec^2/m^4)$
C_D：補剛桁の抗力係数　C_L ：補剛桁の揚力係数
C_M：補剛桁の空力モーメント係数
A_D：補剛桁の有効鉛直投射面積(m^2)
A_L ：補剛桁の水平投射面積(m^2)

以上は中央径間についての記号であり，側径間については上記記号に suffix 1 を付けることにする.

3. 吊橋の解析にあたっての基本的仮定

(1) ケーブルは完全に可撓である.

(2) ケーブル，補剛桁の単位長さあたりの死荷重および断面性能は各径間ごとに一定である.

(3) 補剛桁の断面は左右対称である.

(4) 塔の伸縮および曲げは生じない.

(5) ケーブルおよび補剛桁の死荷重はケーブルのみによって支えられる．したがって，活荷重が作用しない場合の補剛桁は完全に無応力である.

(6) ハンガーは非常に稠密に配置されており，ケーブルと補剛桁は連続的にハンガーで連結されている.

(7) ハンガーは垂直で，載荷によるひずみを無視する.

(8) 補剛桁は薄肉断面梁とみなされ，一般の梁理論が成立する.

(9) ケーブルおよび補剛桁の変形は微小で，Hooke の法則が成立する.

(10) 補剛桁の軸方向変位を無視する.

(11) ケーブルの傾斜角は載荷後も一定で，かつケーブルの定着点では不動である.

4. ひずみの定義

(1) 補剛桁　Fig. 2 に示すように断面の図心を原点に取り，x, y 軸を断面内に，z 軸を断面に直角方向に定める．断面剛の仮定によって，はり内の任意点の変位関数が次のように定義される[6].

$$U(x,\ y,\ z)=u(z)-y\varphi(z),\quad V(x,\ y,\ z)=v(z)+x\varphi(z)$$
$$W(x,\ y,\ z)=-xu'(z)-yv'(z)+\varphi'\omega_n(x,\ y) \quad (1)$$

ここに，U, V, W：はり内の任意点 x, y, z の変位，
ω_n ：規準化された St. Venant のゆがみ関数

線形のひずみ一変位関係式を用いて，補剛桁のひずみは次のように与えられる.

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0,\quad \varepsilon_z=-xu''-yv''+\varphi''\omega_n$$
$$\gamma_{xz}=\varphi'\left(\frac{\partial\omega_n}{\partial x}-y\right),\quad \gamma_{yz}=\varphi'\left(\frac{\partial\omega_n}{\partial y}+x\right) \quad (2)$$

(2) ケーブルのひずみ　Fig. 1 に示すように変形の原点は吊橋の完成時の静止状態とし，仮定(2)および(5)よりケーブルの初期たわみは次のように表わされる.

$$x_c=4fz(l-z)/l^2 \quad (3)$$

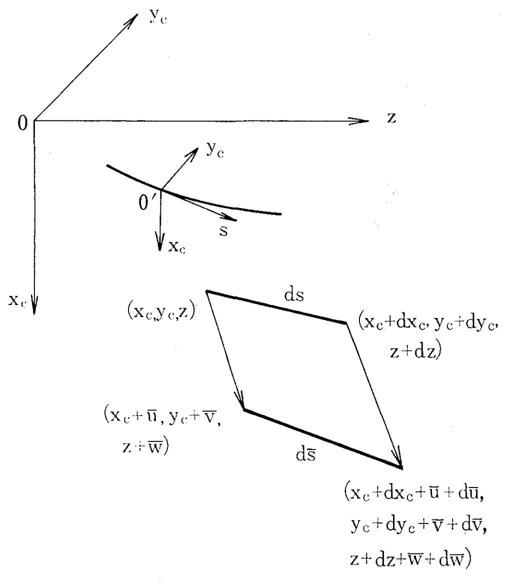

Fig. 3　An infintely small element of the cable

Fig. 3 に示すようにケーブルの微小要素 ds が変形後 $d\bar{s}$ になったとする．初期たわみ状態からのケーブルの変位 $(\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w})$ は，z のみの関数と考えると，初

期たわみ状態における線素 ds および変形後の線素 $d\bar{s}$ は次のように表わされる.

$$ds=(dx_c{}^2+dz^2)^{1/2}=(1+x_c{}'^2)^{1/2}dz$$

$$d\bar{s}=\{(dx_c+d\bar{u})^2+d\bar{v}^2+(dz+d\bar{w})^2\}^{1/2}=\{x_c{}'^2+2x_c{}'\bar{u}'+\bar{u}^2+\bar{v}^2+1+2\bar{w}'+w'^2\}^{1/2}dz \quad (4)$$

$\bar{w}$ がケーブルの軸方向変位であることを考慮のうえ, ケーブルのひずみを求めれば次式となる.

$$\varepsilon_c=(d\bar{s}-ds)/ds=(\bar{w}'+x_c{}'\bar{u}'+\bar{u}'^2/2+\bar{v}'^2/2)/(1+x_c{}'^2) \quad (5)$$

5. 吊橋全体のポテンシャルエネルギー

(1) 補剛桁のひずみエネルギー　補剛桁のひずみエネルギーは Hooke の法則を用いて次のように表わされる.

$$V_t=\frac{1}{2}\iiint(\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz})dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\Big[\Big\{E(-xu''-yv''+\varphi''\omega_n)^2+G\varphi'^2\Big\{\Big(\frac{\partial\omega_n}{ox}-y\Big)^2+\Big(\frac{\partial\omega_n}{\partial y}+x\Big)^2\Big\}\Big]dxdydz \quad (6)$$

(2) ケーブルのひずみエネルギー　ケーブル i のひずみエネルギーは初期応力 $\bar{\sigma}_{ci}=$ 一定による項と活荷重による付加応力 σ_{ci} による項との和で表わされる.

$$V_{ci}=\iiint\bar{\sigma}_{ci}\,\varepsilon_{ci}\,dx_c\,dy_c\,dz+\frac{1}{2}\iiint\sigma_{ci}\,\varepsilon_{ci}\,dx_c\,dy_c\,dz \quad (7)$$

上式を慣用のケーブル張力の水平成分を用いて表わせば次のように表わされる.

$$V_{ci}=H_w\int_o^l\Big(\bar{w}'+x_c{}'\bar{u}_i+\frac{1}{2}\bar{u}_i{}'^2+\frac{1}{2}\bar{v}_i{}'^2\Big)dz+\frac{H_{pi}}{2}\int_o^l\Big(\bar{w}'+x_c{}'\bar{u}_i{}'+\frac{1}{2}\bar{u}_i{}'^2+\frac{1}{2}\bar{v}_i{}'^2\Big)dz \quad (8)$$

ここに, $H_w=\iint\bar{\sigma}_{ci}\,dx_c\,dy_c\,\frac{dz}{ds}$,

$$H_{pi}=\iint\sigma_{ci}\,dx_c\,dy_c\,\frac{dz}{ds}$$

本論ではハンガーは仮定(7)により伸びないと仮定したので, ケーブルの鉛直変位は補剛桁の鉛直変位 u およびねじれ角 φ を用いて次のように表わすことができる.

$$\bar{u}_1=u-b\varphi/2,\quad \bar{u}_2=u+b\varphi/2 \quad (9)$$

なお, 仮定(7)および(8)よりケーブルの橋軸方向および補剛桁の橋軸方向の変位を無視するため, 以下の誘導にあたっては式(8)に含まれるケーブル橋軸方向変位 w は無視し, ケーブル方程式の項で考慮する.

(3) ハンガーの水平方向傾斜によるエネルギー　仮定(7)によってハンガーはひずまないと仮定したが, Fig. 2 に示すようにハンガーの伝幡する力の水平成分がケーブルと補剛桁との間に生ずる相対変位だけ仕事をなすことになる. 図においてハンガーの力の水平成分は既知の補剛桁に作用する力を用いて

$$r_i=\frac{p_v+w_t}{2}\Big(1-\frac{2a}{b}\varphi\Big)\theta_i \quad (10)$$

上式におけるハンガーの傾斜角 θ_i はケーブルおよび補剛桁の各変位の間の適合条件を満足しなければならない.

$$h\theta_i=v-\bar{v}_i+(a-e)\varphi \quad (11)$$

式(10)および式(11)を用いて, ハンガーのなす仕事は次のように表わされる.

$$V_h=\frac{1}{2}\Sigma\int\Big[r_i\Big\{v-\bar{v}_i+(a-e)\varphi\Big\}\Big]dz$$

$$\doteqdot\frac{1}{4}\int(p_v+w_t)h(\theta_1{}^2+\theta_2{}^2)dz \quad (12)$$

(4) 外力のなす仕事　Fig. 2 に示すような外力が補剛桁およびケーブルに作用したとき, それらの外力が保存系とすれば外力のなす仕事は

$$W_e=\int\Big\{(p_v+w_t)u+p_h v+m_t\varphi+\frac{p_c}{2}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)\Big\}dz \quad (13)$$

したがって, 吊橋のポテンシャルエネルギーは式(6), (7), (8), (12)および(13)を用いて次のように表わされる.

$$\pi=V_t+V_{c1}+V_{c2}+V_h-W_e \quad (14)$$

6. 基礎方程式

吊橋の基礎方程式をうるために最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用する. すなわち,

$$\delta\pi=0 \quad (15)$$

変分原理を用いて式(15)を変形して次のような基礎方程式が求められる.

$$EI_v u^{(4)}-(2H_w+H_{p1}+H_{p2})u''+(H_{p1}-H_{p2})\frac{b}{2}\varphi''=p_v+(H_{p1}+H_{p2})x_c'' \quad (16)$$

$$EI_\omega\varphi^{(4)}-\Big\{GJ+\frac{b^2}{4}(2H_w+H_{p1}+H_{p2})\Big\}\varphi''-EI_{\omega y}v^{(4)}+(H_{p1}-H_{p2})\frac{b}{2}u''+(a-e)\frac{p_v+w_t}{2}(\theta_1+\theta_2)=m_t+\frac{b}{2}(H_{p2}-H_{p1})x_c'' \quad (17)$$

$$EI_h v^{(4)}-EI_{\omega y}\varphi^{(4)}+\frac{p_v+w_t}{2}(\theta_1+\theta_2)=p_h \quad (18)$$

$$(H_w + H_{p1})\bar{v}_1'' + \frac{p_v + w_t}{2}\theta_1 = -\frac{1}{2}p_c \quad (19)$$

$$(H_w + H_{p2})\bar{v}_2'' + \frac{p_v + w_t}{2}\theta_2 = -\frac{1}{2}p_c \quad (20)$$

ここに，$I_v = \iint x^2\, dxdy,\ I_h = \iint y^2\, dxdy,$

$$I_\omega = \iint \omega n^2\, dxdy,\quad I_\omega y = \iint \omega_{ny}\, dxdy,$$

$$J = \iint \left\{\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} + x\right)^2\right\} dxdy,$$

$$x_c'' = -8f(w_t + w_c)/l^2$$

基礎方程式には式(16)～式(20)の他に，式(11)の2式が加わる．基礎方程式に含まれる未知数 $u, v, \varphi, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \theta_1, \theta_2, H_{p1}, H_{p2}$ の9個のうち，H_{p1}, H_{p2} は活荷重によって生ずるケーブルの付加水平張力で，次のケーブル方程式を用いて求められる．

7．ケーブル方程式

長大スパン橋では支点はローラー支点が多いので，補剛桁の橋軸方向変位およびハンガーの傾斜を無視することができるが，ケーブルの活荷重張力 H_{p1}, H_{p2} を求めるにあたっては前述のように軸方向変位を考慮する[1)]．ケーブル i の任意点 (x_c, z) の傾斜角を ψ とする．この角度は活荷重載荷後多少変化するが，仮定(11)によって変形後一定もあるとする．ケーブルの微小部分 ds を近似的に直線とみなせば

$$ds^2 = dz^2 + dx_c^2,\quad ds = dz\ \sec\psi \quad (21)$$

活荷重の載荷および温度変化による変形後には

$$(ds + \triangle ds_i)^2 = (dz + d\bar{w}_i)^2 + (dx_c + d\bar{u}_i)^2 + d\bar{v}_i^2 \quad (22)$$

ケーブルの伸び $\triangle ds$ は張力の増分および温度変化であるから $\triangle ds_i = \dfrac{H_{pi}}{E_c A_c} ds\ \sec\psi + \alpha\ \triangle T ds$　(23)

式(22)～(24)から，高次の微小項を無視すれば

$$d\bar{w}_i = H_{pi}\frac{\sec^3\psi}{E_c A_c}dz + \alpha\ \triangle T \sec^3\psi\ dz - \frac{dx_c}{dz}\frac{d\bar{u}_i}{dz}dz - \left(\frac{d\bar{v}_i}{dz}\right)^2 dz \quad (24)$$

ケーブルの定着点は不動であるから，

$$\int_c^{c'} d\bar{w}_i = \left|\ \bar{w}_i\ \right|_c^{c'} = 0 \quad (25)$$

式(24)を部分積分すれば，

$$H_{pi} = -\frac{E_c A_c}{L_E}\left[\sum_j \left\{x_c''\int_o^{l_j}\bar{u}_i\ dz - \underline{\frac{1}{2}\int_o^{l_j}\bar{v}_i'^2\ dz}\right\} - \alpha\ \triangle T L_T\right] \quad (26)$$

ここに $L_E = \displaystyle\int_c^{c'} \sec^3\psi\ dz \doteqdot l\left(1 + 8\frac{f^2}{l^2}\right) + 2l_1\left(1 + 8\frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{3}{2}\ \tan^2 r_o\right) + 2l_s \sec^3 r_1$

$$L_T = \int_c^{c'} \sec^2\psi\ dz \doteqdot l\left(1 + 16\frac{f^2}{l^2}\right) + 2l_1\left(1 + \frac{16}{3}\ \frac{f_1^2}{l_1^2} + \tan^2 r_o\right) + 2l_s \sec^3 r_1$$

上式はケーブルの3次元的変形を考慮したケーブル方程式である．従来のケーブル方程式では〔　〕の中の第2および第3項が省略されている．

8．基礎方程式の簡略化

吊橋に作用する水平荷重は風荷重であるから左右のケーブルの水平変位が等しい $(\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v})$ とおくことができるので，左右のハンガーの傾斜角は $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ となる．またケーブルの形状が式(3)のように表わされることを考慮すれば，本題の基礎方程式は次のように簡略化される．

$$\begin{aligned}
&EI_v\,u^{(4)} - (2H_w + H_{p1} + H_{p2})u'' + (H_{p1} - H_{p2})\frac{b}{2}\varphi'' \\
&\quad = p_v - \frac{8f}{l^2}(H_{p1} + H_{p2}) \\
&EI_\omega\,\varphi^{(4)} - \left\{GJ + \frac{b^2}{4}(2H_w + H_{p1} + H_{p2})\right\}\varphi'' \\
&\quad - EI_{\omega y}\,v^{(4)} + (H_{p1} - H_{p2})\frac{b}{2}u'' \\
&\quad + (a - e)(p_v + w_t)\varphi = m_t - \frac{4fb}{l^2}(H_{p1} - H_{p2}) \\
&EI_h\,v^{(4)} - EI_{\omega y}\,\varphi^{(4)} + (p_v + w_t)\,\theta = p_h \\
&(2H_w + H_{p1} + H_{p2})\bar{v}'' + (p_v + w_t)\,\theta = -p_c \\
&h\theta = v - \bar{v} + (a - e)\varphi
\end{aligned} \quad (27)$$

以上のように誘導した基礎方程式は文献(2)および(4)と実質的に合致するものである．

9．風荷重を受ける吊橋の変形と断面力

誘導した基礎方程式を用いて Fig. 1 に示す3径間単純吊橋を対象に3分力を考慮した一様分布の風荷重を受ける場合の静的挙動を解析する．なお風荷重はその大きさが変形とともに変化する非保存系であるために厳密には保存系として誘導した基礎方程式は適用できないが，静的問題では第1近似値として有効であると考えられる．

構造物に風が作用すると構造物の空力特性によって定まった抗力，揚力および空力モーメントの特性曲線が求まる．吊橋においては特に補剛桁断面の耐風特性を検証する意味から2次元模型による風胴実験が行なわれている．Fig. 4 は関門橋の風胴実験により求められた抗力，揚力および空力モーメントの係数である．迎え角 α について各係数は次のように線形化される．

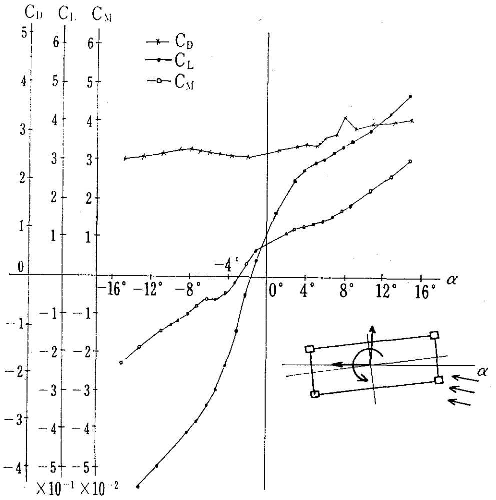

Fig. 4 Relations between components, C_D, C_L and C_M of wind force and the angle of attack

$$\begin{aligned}
\overline{C}_D(\alpha)&=C_D(\alpha)+\left(\frac{dC_D}{d\alpha}\right)_\alpha \varphi,\\
\overline{C}_L(\alpha)&=C_L(\alpha)+\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_\alpha \varphi,\\
\overline{C}_M(\alpha)&=C_M(\alpha)+\left(\frac{dC_M}{d\alpha}\right)_\alpha \varphi
\end{aligned} \tag{28}$$

したがって，吊橋に作用する活荷重は次のように風荷重を用いて表わされる．

$$\begin{aligned}
p_v &= -\frac{1}{2}\rho V^2 \overline{C}_D A_D = -D_t - \overset{*}{D}_t \varphi,\\
p_h &= \frac{1}{2}\rho V^2 \overline{C}_L A_L = L_t + \overset{*}{L}_t \varphi,\\
m_t &= \frac{1}{2}\rho V^2 \overline{C}_M A_L = M_t + \overset{*}{M}_t \varphi,\\
p_C &= \frac{1}{2}\rho V'^2 A_{DC} = D_C
\end{aligned} \tag{29}$$

吊橋のケーブルの形はサグ f, f_1 なる放物線，中央径間のキャンバーはサグ f^* なる放物線，側径間は直線とすれば中央径間および側径間のハンガー長は次のとおりである．

$$\begin{aligned}
h(z)&=h_t-(x_c+x^*)\\
&=4(f+f^*)z^2/l^2-4(f+f^*)z/l+h_t\\
h_1(z)&=4f_1 z_1^2/l_1^2-4f_1(1-h_1/4f_1\\
&\quad+f_1^*/4f_1)/l_1 z_1+h_a
\end{aligned} \tag{30}$$

吊橋の塔が変形しないものとすれば，補剛桁およびケーブルの境界条件は次のとおりである．

$$\begin{aligned}
&u(0)=u(l)=0,\ u''(0)=u''(l)=0\\
&\varphi(0)=\varphi(l)=0,\ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0\\
&\cancel{v(0)=v(l)=0,\ v''(0)=v''(l)=0}\\
&\overline{v}(0)=v(l)=0,\ \theta(0)=\theta(l)=0
\end{aligned} \tag{31}$$

上式の境界条件を満足する各変位を次のようにFourier級数の形に仮定する．

$$\begin{aligned}
u(z)&=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi\xi,\quad \varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi\xi\\
v(z)&=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi\xi,\quad \overline{v}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\pi\xi\\
\theta(z)&=\sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\pi\xi,\quad \xi=z/l
\end{aligned} \tag{32}$$

式(30)，(32)を基礎方程式(27)に代入して，Galerkin 法を適用すれば未定々数を求めるための連立方程式がえられる．

$$\begin{aligned}
&\left\{EI_v\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4+(2H_w+H_{p1}+H_{p2})\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right\}a_n\\
&+\left\{\frac{b}{2}(H_{p1}-H_{p2})\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\overset{*}{L}_t\right\}b_n\\
&\quad=-\frac{4}{n\pi}\left\{L_T+(H_{p1}+H_{p2})\frac{8f}{l^2}\right\}\\
&\left\{-\frac{b}{2}(H_{p1}-H_{p2})\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right\}a_n+\left[EI_\omega\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\right.\\
&\left.+\left\{GJ+\frac{b^2}{4}(2H_w+H_{p1}+H_{p2})\right\}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\overset{*}{M}_t\right]b_n\\
&\quad-EI_{\omega y}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 c_n-a(L_t-w_t)e_n\\
&\quad=\frac{4}{n\pi}\left\{M_t+\frac{b}{2}(H_{p1}-H_{p2})\frac{8f}{l^2}\right\}\\
&EI_h\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 b_n+\left\{EI_{\omega 3}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\overset{*}{D}_t\right\}c_n\\
&\quad-(L_T-w_t)e_n=\frac{4}{n\pi}D_t\\
&\quad-(2H_w+H_{p1}+H_{p2})\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 d_n\\
&\quad-(L_t-w_t)e_n=-\frac{4}{n\pi}D_c\\
&a\,b_n+c_n-d_n-\left\{h_t-2(f+f^*)\right.\\
&\left.\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)\right\}e_n=\frac{32(f+f^*)}{\pi^2}\sum_{m\neq n}\frac{mn}{(m^2-n^2)^2}e_m
\end{aligned} \tag{33}$$

なお，側径間については上記の連立方程式に suffix 1 をつければよい．ただし，式(33)の第5式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&ab_{n1}+c_{n1}-d_{n1}-\left\{h_a-2f_1\right.\\
&\quad\left.\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n^2\pi^2}-\frac{h_1}{4f_1}-\frac{f_1^*}{4f_1}\right)\right\}e_{n1}\\
&\qquad=\frac{32f_1}{\pi^2}\sum_{m\neq n}\frac{mn}{(m^2-n^2)^2}e_{m1}
\end{aligned}$$

またケーブル方程式は

$$\begin{aligned}
H_{pi}=\frac{E_c A_c}{L_E}&\left\{\frac{16f}{\pi l}\sum_{n=1}\frac{1}{n}\left(a_n-\frac{b}{2}b_n\right)\right.\\
&+\frac{32f_1}{\pi l_1}\sum_{n=1}\frac{1}{n}\left(a_{n1}-\frac{b}{2}b_{n1}\right)+\frac{\pi^2}{4l}\sum_{n=1}n^2 d_n^2\\
&\left.+\frac{\pi^2}{2l}\sum_{n=1}n^2 d^2_{n1}-\alpha\triangle T L_T\right\}
\end{aligned} \tag{34}$$

式(34)のケーブルの活荷重張力 Hpi は補剛桁の変形によって定まるが，連立方程式の係数項にこれらの項が多く含まれるために，計算は一種の試算による収束計算となる．

(1) 従来の解法との比較および解の収束

本法の基礎式(27)において第3，4式の補剛桁およびケーブルの水平変位 v, $\bar{v}$ および外力として水平成分のみを残し，適合条件式を用いてハンガーの傾斜角 θ を消去すれば，Moisseiff[7] によって提案された水平変位を解析するための方程式が次のようにえられる．

$$EI_h\, v^{(4)} + \frac{w_t}{h}(v - \bar{v}) = p_h \tag{35}$$

$$2H_w\, \bar{v}'' + \frac{w_t}{h}(v - \bar{v}) = -p_c$$

伊藤氏[8] は上式を解析的に解くために，変位 v および $\bar{v}$ を式(32)の第3，4式のように仮定のうえ，式(35)の両辺に $h(z)$ をかけて Galerkin 法を用いて連立方程式を誘導した．

本法と上述の伊藤氏の方法を比較するために，設計風速 V=54m/sec に対する中央径間の中点の補剛桁およびケーブルの水平変位 v, $\bar{v}$ の収束状況を Fig. 5 に示す．図において横軸はフーリェ級数の項数を，縦軸は変位 v, $\bar{v}$ を示す．本例では吊橋の形状および外力が左右対称のため，変形も左右対称となり，級数の項数は奇数項 n=1, 3, 5…を採用すればよい．本法の級数の収束はきわめて早く3項程度で完全に収束するが伊藤氏の方法の収束は遅く，振動しながら本法と同じ結果に収束していくことがわかる．本法と同程度の解をうるためには3倍以上の項数を必要とすることといえる．本法ではハンガーの傾斜角 θ を未知数に加えたために未知数では1つ増加したが，これによって解の式が伊藤氏の式に比較して簡単となり，かつ収束がきわめて早いため数値解析上本法の方が有利であるといえる．

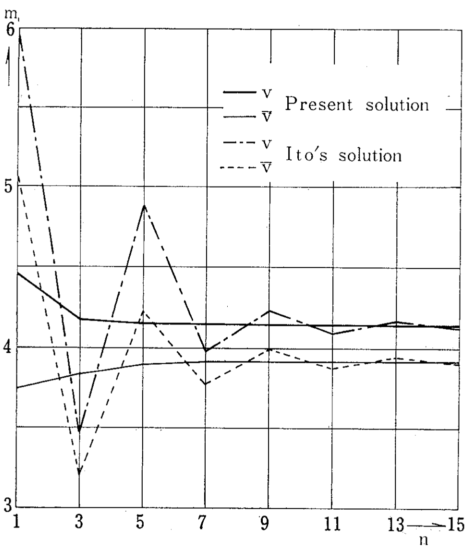

Fig. 5 Convergence of horizontal deflections of the stiffened truss and cables

(2) ケーブルの活荷重張力の影響

従来の吊橋の解析ではケーブル方程式に吊橋の補剛桁の鉛直変位と捩れに伴なうケーブルの鉛直変位のみが考慮され，水平方向の変位による張力の変化は無視されている．これは水平方向にケーブルがサグを持たないためであるが，風荷重による水平変位が大きい場合には検討の余地がある．そこで，(*a*) 従来のケーブル方程式を用いた場合，(*b*) ケーブルの水平変位をも考慮したケーブル方程式を用いた場合，(*c*) ケーブルの張力を無視する場合について，3分力を考慮した解析および (*d*) 水平変位を考慮したケーブル方程式を用いて，外力として抗力のみを用いた場合の4ケースについて解析した．風の迎え角 $\alpha=0°$ について各ケースのケーブルの水平活荷重張力 H_{p1} および H_{p2} および径間中央の変位 v, $\bar{v}$, u, φ を示せば Table 1 に示すとおりである．表より明らかなように水平変位 v および $\bar{v}$ についてはケーブルの活荷重張力の影響はほとんど認められず，(*d*) 欄の抗力のみを用いた場合と合致することがわかる．吊橋の水平変位については抗力のみを考慮した解析で十分であることがわかる．

Table 1 Comparison of displacements of the main span

	(a)	(b)	(c)	(d)
H_{p1} (t)	-182.2	-163.9	0.0	18.3
H_{p2} (t)	-173.7	-155.2	0.0	18.3
v (m)	4.187	4.183	4.152	4.144
$\bar{v}$ (m)	3.930	3.926	3.893	3.891
u (m)	-0.080	-0.177	-1.011	-0.094
ϕ (rad.)	-0.00027	-0.00027	-0.00007	-0.00000

Table 1 に示すように補剛桁の鉛直変位については，(*c*) のケーブル張力の変化を無視する場合には揚力により中点で1 *m* 程度浮き上がることがわかるが，(*a*) のケーブルの鉛直変位のみを考慮したケーブル方程式を用いると，補剛桁の変位は8㎝程度浮き上げるのみで，ケーブルの活荷重張力の影響は鉛直変位にきわめて大きな影響を及ぼすことがわかる．なお，活荷重水平張力は死荷重水平張力 H_w=11683 t に比べて1.6%程度の大きさである．これはケーブルの活荷重水平張

力が式(33)の 第1式の右辺荷重項 $L_T+(H_{p1}+H_{p2})\frac{8f}{l^2}$ をゼロにするように作用することを意味するものである．この性質を利用すれば，吊橋の捩り変形が小さいから $H_{p2}=H_{p1}$ とおいて $L_T+16fH_{p1}/l^2=0$ から容易にこれらの初期値を推定することができる．また，(*b*) のケーブルの水平変位を考慮したケーブル方程式を用いると，補剛桁は18cm程度上方に変位することになる．4 *m*程度の純粋な水平変位によってケーブルには 300 t 程度の付加活荷重水平張力が生ずるものと予想されたが，Table 1 (*d*) に示したように18 t 程度であった．これはケーブルは水平方向に移動することが不可能で，塔頂を結ぶ線上で振子状の動きをすることを意味するものと考えられる．Table 1 に示すようにケーブルの水平張力 H_{p1}，H_{p2} および鉛直変位の(*a*)の結果と(*d*)の結果を加え合わせたものは(*b*)の結果にほぼ合致することから，(*b*) の結果の鉛直変位の増加は振子状の動きによるケーブルの鉛直変位に対応することがわかる．したがって3分力を考慮した吊橋の変形と応力にはケーブルの水平張力に及ぼす水平変位の影響は無視できないことがわかる．

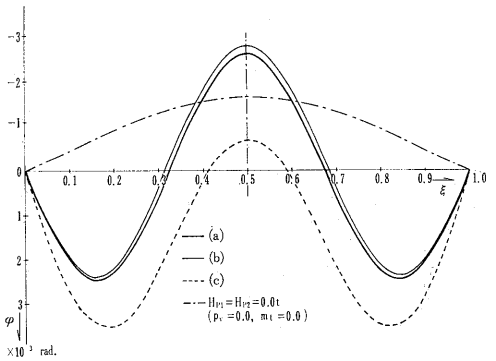

Fig. 6　Torsional angles φ of the stiffened truss

Fig. 6 に補剛桁のねじれ角 φ を示す．図において一点鎖線は外力として抗力のみが作用した場合の捩れ角を示す．ハンガーの傾斜角 θ による補剛桁の重量 w_t の水平成分が補剛桁に捩りモーメント $w_t\ (a-e)\theta$ を生ずるために補剛桁は負の方向にねじれを生ずる．これに対して空力モーメントは正の符号をもつために補剛桁を正の方向に回転させる．3分力を考慮した吊橋のねじれ角はハンガーの長さが短かいために大きな傾斜角 θ を取れる中央では負．ハンガー長が大きい端部では空力モーメントの項が大きく，したがって正のねじれを生ずる．したがってねじり角は2つの節をもつ変形となる．なお，ねじり角に対してはケーブルの水平張力の影響は鉛直変位よりも小さく，またケーブルの水平変位による活荷重水平張力の影響も小さいことがわかる．

(3)　風の迎え角の影響

Fig. 4 のように吊橋の空気力曲線の抗力係数 C_D はほぼ一定であるが，揚力係数 C_L と空力モーメント係数 C_M は風の迎え角によって変化することがわかる．設計時の迎え角 α の変化 $\pm4°$ 以内における吊橋の変形と断面力について述べる．Fig. 7 に迎え角

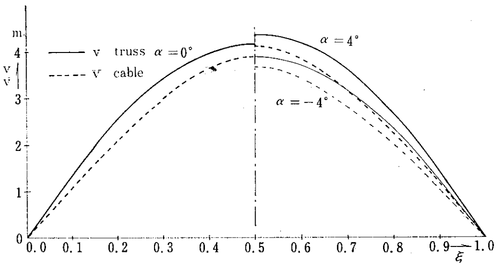

Fig. 7　Horizontal deflections, v and $\bar{v}$, of the stiffened truss and cables

$\alpha=-4°$，0° および 4° に対する補剛桁およびケーブルの水平変位 v，$\bar{v}$ を示す．図のように $\alpha=4°$ の場合が最も大きく，次いで $\alpha=0°$，$-4°$ の順に小さくなるが，その変化の割合いは小さいといえる．Fig. 8 に補剛桁の水平方向の曲げモーメント M_h を示す．

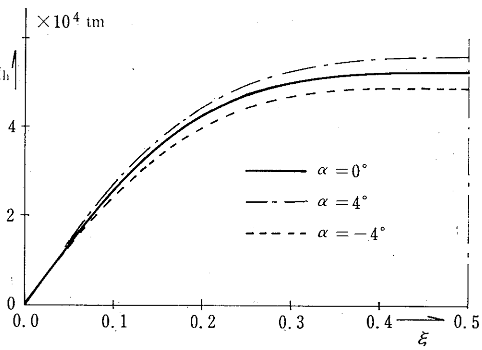

Fig. 8　Bending moments M_h of the stiffened truss

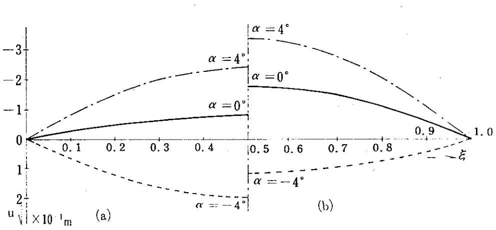

Fig. 9　Vertical deflections u of the sfiffened truss

Fig. 9 に補剛桁の鉛直変位 u を示す．図においては(a)は従来のケーブル方程式を用いた結果を，また(b)は水平変位をも考慮したケーブル方程式を用いた結果を示すものである．迎え角の影響は水平変位の場合よりも大きいことがわかる．(b)の場合が(a)の場合に比較して振子状の動きによって持ち上げられるために，$\alpha=4°$ すなわち風に吹き上げられる場合がいちばん大きな変形を与えることになる．Fig. 10 に補剛桁の鉛直方向曲げモーメント M_v を示す．Fig. 11 に補剛桁の捩れ角を示す．ねじれ角は鉛直変位同様に迎え角の影響を受ける．Fig. 12 に補剛桁の捩れモーメント T を示す．

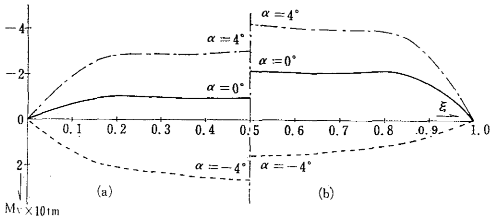

Fig. 10 Bending moment M_v of the stiffened truss

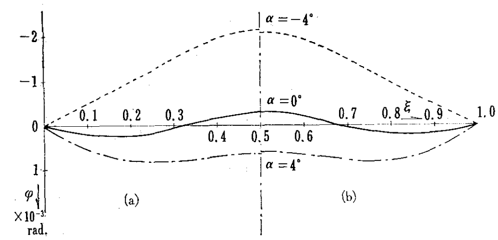

Fig. 11 Torsional angles φ of the stiffened truss

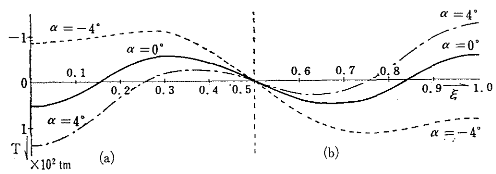

Fig. 12 Torsional moment T of the stiffened truss

水平，鉛直および捩れのいずれの場合も吊橋の変形と断面力は迎え角がゼロの場合より迎え角がある方が大きくなり，迎え角が正の場合，すなわち風が吊橋を吹き上げる方向に作用する場合が最も不利になることがわかる．

以上はいずれも主径間に関するものであり，側径間については紙面の都合上省略する．

10. 結　語

本論では連成を考慮した吊橋の基礎方程式を撓度理論と同程度の範囲で誘導するとともに，3分力を考慮した風荷重を受ける吊橋の変形と断面力について報告したものである．えられた結果を要約すると，

(1) 誘導した基礎方程式は力の釣合式よりえられた結果と実質的に同じである．

(2) ケーブルの鉛直および水平変位を同時に考慮したケーブル方程式を誘導した．

(3) 基礎方程式の解法として変形の適合条件式としてえられるハンガーの傾斜角を未知数に加える解法を採用した．この処理によってフーリェ級数の収束を従来の解法より速くすることができた．

(4) 吊橋の補剛桁および水平変位はケーブル活荷重の水平強力の影響をほとんど受けず，従来の抗力のみを用いた結果と合致する．

(5) 補剛桁の鉛直変位はケーブルの活荷重張力の影響を著しく受ける．鉛直変位のみを考慮したケーブルの活荷重水平張力を用いると鉛直変位を打ち消す方向に作用する．また，水平変位までをも含んだケーブル方程式を用いると，水平変位に付随する鉛直変位を生ずる．この変位は揚力による鉛直変位に比べて無視できないものである．したがって，3分力を考慮した吊橋の解析には水平変位を考慮したケーブル方程式を採用しなければならない．

(6) 補剛桁のねじれも活荷重水平張力の影響を受けるがその割合は鉛直変位ほど大きくない．

(7) 補剛桁の鉛直変位およびねじれ角は風の迎え角の影響を大きく受けるが，水平変位については小さい．

(8) 迎え角の影響を考慮した場合が迎え角がゼロの場合よりも大きな変形したがって応力を生ずることになる．一般に迎え角が正の場合，すなわち風が補剛桁を吹き上げる方向に作用する場合が不利である．

以上によって風速が大きくなり水平変位が相当に増大する場合や迎え角によって揚力や空力モーメント成分が無視できない場合には連成を考慮した吊橋の解析の必要があることが立証された．本論では吊橋補剛桁のキャンバーによる曲率を無視したが，キャンバーが補剛桁のねじれに及ぼす影響は無視できないものと考えられる．今後，キャンバーによる曲率の影響や連成を考慮した吊橋の運動方程式の誘導，非線形振動の問題として吊橋の連成振動を解析する予定である．これらについては逐次発表の予定である．

参考文献

1) 平井　敦：鋼橋Ⅲ，技報堂，昭和42年

2) 日本道路公団関門建設所関門架橋工事事務所：風荷重を受ける吊橋の変形と応力，昭和45年5月
3) 土木学会本州四国連絡橋鋼上部構造研究小委員会解析分科会：本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査研究報告書，別冊6，吊橋のねじり解析，昭和48年3月
4) 倉西，越後：吊橋の側方への変形について，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集第1部，昭和49年10月，pp. 383−384.
5) 奥村：長支間橋梁における鋼構造の問題点，土木学会誌， Vol. 61 ， Annual '76， 昭和51年4月 pp. 5−7
6) 川井：マトリックス法振動及び応答，培風館，昭和46年
7) Moisseiff, L. S. : Suspension Bridges under the Action of Lateral Forces, Trans. ASCE, Vol. 98, 1933, pp. 1080−1107.
8) Ito, M. : The Lateral Motion of Suspension Bridges, Trans. of JSCE, 1962, pp. 10～16