

# 連続桁の全応力最適化設計に関する研究

小西保則\*・新井伸博\*\*

## Fully Stressed Design for Continuous Girder

by

Yasunori KONISHI

(Department of Civil Engineering)

Nobuhiro ARAI

(Graduate Student of Civil Engineering)

### Abstract

At the present study, the optimum design of two spans continuous girder which is subjected to dead load, live load and impact load is performed with respect to minimum volume.

The methods of optimization are SLP method and SUMT method based upon the fully stressed design. The method of the three moments is used at stress analysis.

Then, according to comparison present study with optimum results, it is shown that the fully stressed design becomes optimum design.

### 1. まえがき

構造物の最適設計法に関して、ここ数年来、大規模でかつ複雑な構造物の最適設計問題を能率的に解くための研究が重要なテーマの1つとなっている。この問題において桁断面の suboptimization および SLP 法により最適な材料選択をも含む鋼 I 形桁の最適設計が、比較的容易に行えることが示されている。<sup>1)</sup>しかし、この方法において設計変数・制約条件共にその数が増加するに従い、最適解を求めるために必要とする計算時間が増大する。本研究では、最適設計手法に全応力設計による SUMT 法(sequence of unconstrained technique, 無制約最小化反復法)と SLP 法(sequence of linear programming method, 反復線形計

画法)を用い、それぞれ比較、検討することによって解の収束性を確かめ、全応力設計で最適になることを示した。

設計例として、断面変化3箇所、4断面を有する鋼 I 形桁2径間連続橋について最適設計を行った。また、本研究で述べる手法によれば、トラスなどの複雑な構造物にも適用できる。

### 2. 最適設計手法

本研究に用いた最適設計法の概要を簡単にまとめてみると次のとおりである。最適化手法として、SLP 法、全応力設計による SUMT 法を用いた。SLP 法は、制約条件式および目的関数がある近傍で線形近似

昭和54年4月27日受理

\* 土木工学科

\*\* 大学院工学研究科, 土木工学専攻

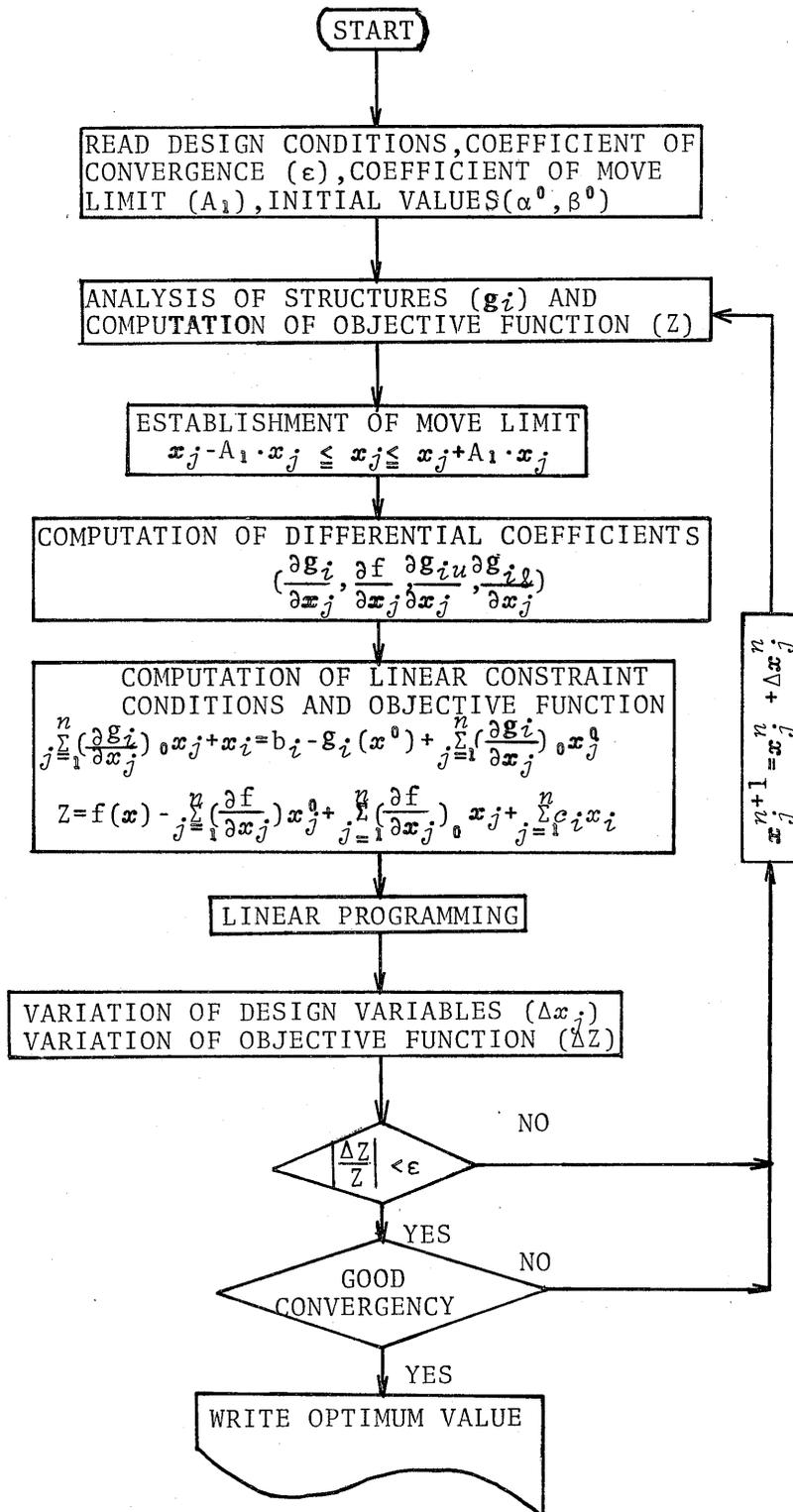


Fig. 1 Flow chart of optimum design by SLP method

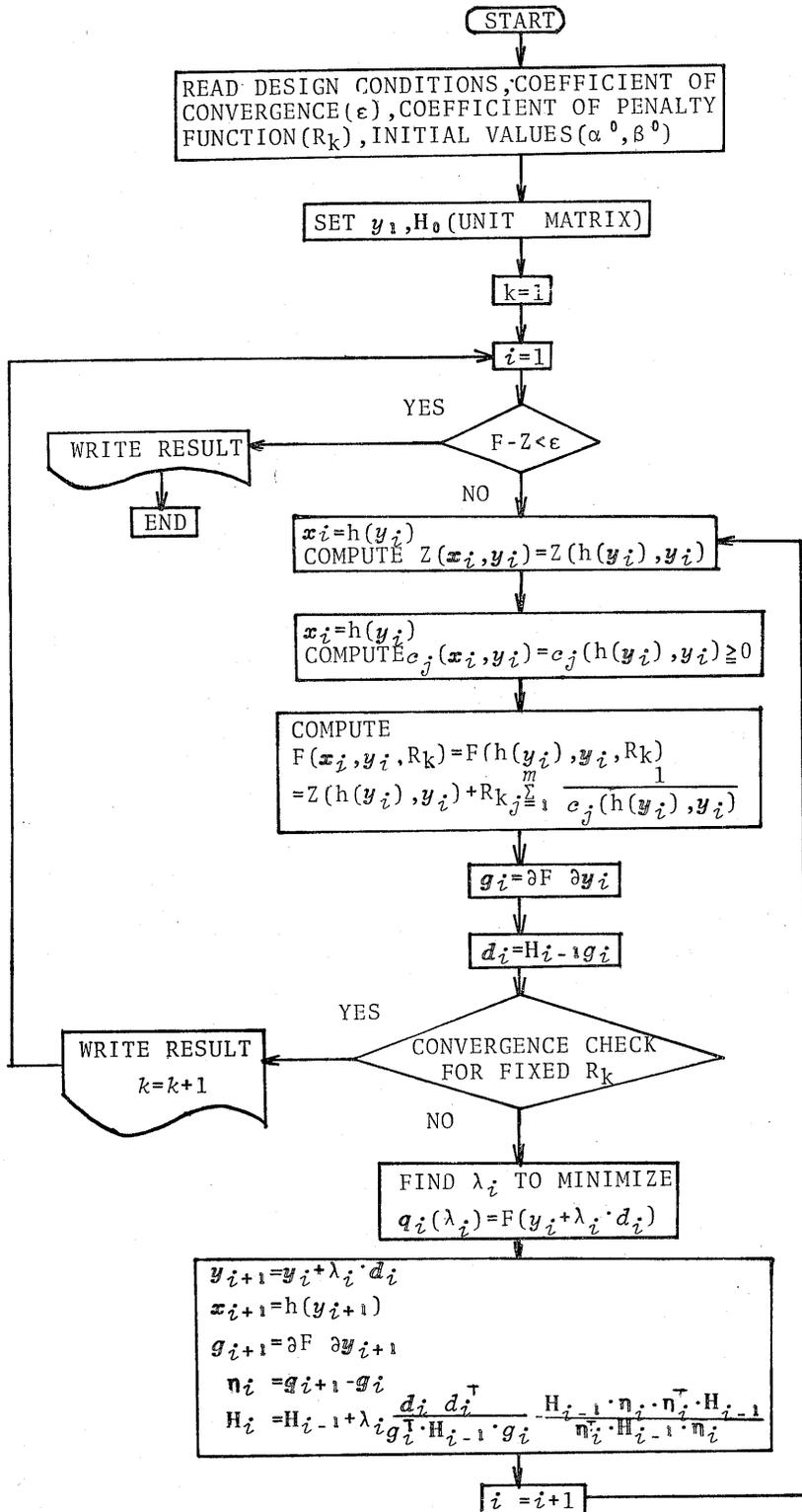


Fig.2 Flow chart of optimum design by the fully stressed design

し、LP法(linear programming method, 線形計画法)を繰返し適用する<sup>2)</sup>ことによって制約領域の端点を順次探して行き、そのときの目的関数の値を比較して最適解を求めるものである。<sup>2)</sup>この方法は、最適解への収束が良好であり、全応力設計で最適となるがmove limit(可動範囲)を設ける必要があり制約条件式が増加する。また、複雑な構造物であると微分演算が困難になる難点がある。この方法の流れ図をFig.1に示す。流れ図に使用されている記号は次のとおりである。 $\alpha$ =(支間)/(けた高)、 $\beta_i$ =断面変化係数、 $g_i$ =非線形の制約条件式、 $f$ =非線形の目的関数、 $x_i$ =設計変数、 $b_i$ =制約条件式の定数項、 $x_i + \Delta x_i$ =変数の上限値、 $x_i - \Delta x_i$ =変数の下限値。

次に、全応力設計によるSUMT法については、SUMT法に制約のない場合の最適化の手法として、Davidon-Fletcher-Powellの提案した手法を用いた。<sup>3)</sup>これは、変数の多い場合は不利とされているが、全応力設計を行えば変数を減らすことができる。全応力設計の方法としては、変数のある1つの断面要素のみの変数 $\mathbf{x}$ と構造物全体に共通な変数 $\mathbf{y}$ に分ける。まず $\mathbf{x}$ については一定の $\mathbf{y}$ のもとで、全応力設計により最適な $\mathbf{x}$ を求め、 $\mathbf{x}$ を $\mathbf{y}$ の関数として、 $\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{y})$ と表わし、これを用いて構造全体の制約条件式および目的関数を $\mathbf{y}$ の関数としてSUMT法により最適解を求めるものである。この方法は、move limitを設ける必要がなく、微分演算も探索方向を求めるためのもので数値微分でもあまり問題はない。しかし、SLP法に比べて、収束までの繰返し回数および時間がかかり、不静定の場合、costを考慮すると、その解が全応力設計により少しあまることが知られている。<sup>1)</sup>この方法の流れ図をFig.2に示す。流れ図に使用されている記号は次のとおりである。 $\alpha$ =(支間)/(けた高)、 $\beta_i$ =断面変化係数、 $\mathbf{H}$ =マトリックス、 $Z$ =目的関数の値、 $c$ =制約条件式、 $F$ =罰金関数、 $\mathbf{g}$ =関数 $F$ の $\mathbf{y}$ による微係数、 $\lambda$ =歩み、 $\mathbf{d}$ =探索の方向、 $\eta_i = \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i$ とする。ここで、断面変化係数 $\beta_i$ は、断面変化距離の初期値を決定するにあたって、あらかじめ、モーメント図より算出した断面変化距離と支間との比を示すものである。

### 3. 連続I形桁の全応力設計による最適設計例について

#### (1) 最適設計

本研究では、桁高が橋長すべてにわたって一定である道路橋2径間連続I形桁について、その設計変数として桁を構成する各桁要素の断面寸法、断面変化位置

を考慮している。使用鋼種は41キロ鋼とし、許容応力は $\sigma_a=1400\text{kg/cm}^2$ であるが、上フランジプレートについては負の曲げモーメントの生じるところで座屈許容応力を考慮した。また、上下フランジプレートは同一断面とした。最適設計法は全応力設計によるSUMT法と、SLP法によった。なお、目的関数としては桁の体積のみを考え、最小体積を与える設計が最も経済的であると仮定し、計算を行った。

設計条件は次のとおりである。

- (a) 橋格および荷重：一等橋(TL-20)
- (b) 形式：2径間連続I形桁
- (c) 支間：30m
- (d) 有効幅員：7m(歩道なし)
- (e) 床版：鉄筋コンクリート、21cm厚
- (f) 舗装：アスファルト、5cm厚
- (g) 適用示方書：道路橋示方書<sup>4)</sup>

設計変数は、フランジプレート板厚・板幅をそれぞれ $T_1, T_2, T_3, B_1, B_2, B_3$ 、ウェブプレート板厚・高さをそれぞれ $T_w, B_w$ とし、断面変化は3箇所として、桁端より断面変化点までの距離を $C_{11}, C_{12}, C_{13}$ の合計11個とする。変数の記号はFig.3に示すとおりである。ここで対象とした桁は3本主桁の内側桁とし、連続桁として荷重分配を考えた。主桁に作用する曲げモーメントは、断面2次モーメントが一定の断面と近似して放物線分布するものとした。また、断面変化点 $C_i$ の初期値の決定は桁端の断面変化距離 $C_{11}$ を仮定し、断面IとIIIが等断面であることから曲げモーメント図より求めた。

全応力設計の場合、変数の内 $\mathbf{x}$ に属するものは $T_w, B_1, T_1, B_2, T_2, B_3, T_3$ の7個とし、 $\mathbf{y}$ に属するものは $B_w, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ の4個とした。サフィックスの1は桁端の断面の変数、2はその次の断面の変数を示し、3は中央断面の変数を示す。また、 $B_w, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ の上限値をPU(1), PU(2), PU(3), PU(4)、その下限値をPL(1), PL(2), PL(3), PL(4)とし、無次元化して、 $y_1=B_w/PU(1)$ ,  $y_2=C_{11}/PU(2)$ ,  $y_3=C_{12}/PU(3)$ ,  $y_4=C_{13}/PU(4)$ とした。

$\mathbf{x}$ に当る変数の決定として、 $B_w, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ を仮定し、これより全応力設計によって $T_w, B_1, T_1, B_2, T_2, B_3, T_3$ を $B_w, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ の関数として表す。変数 $\mathbf{x}$ である断面寸法を求める断面計算は以下の式で計算した。

$$B_w = L/\alpha \quad (1)$$

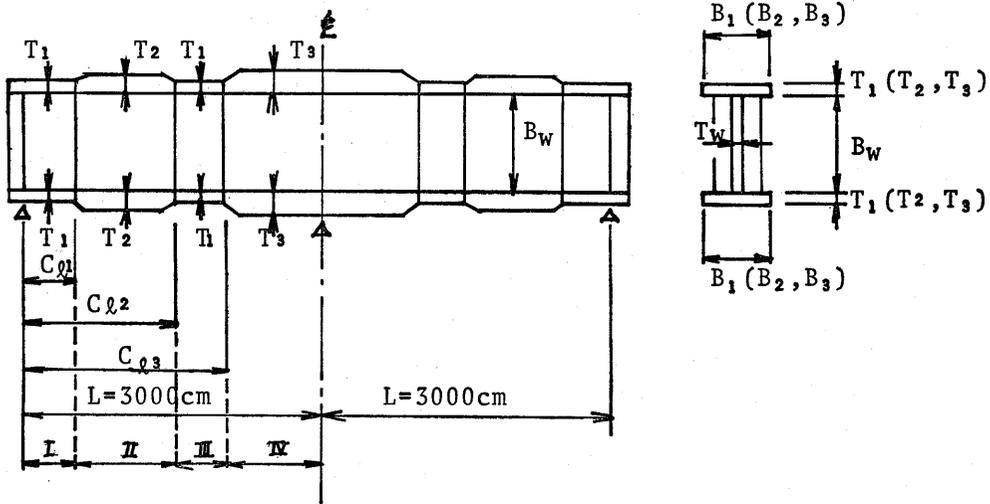


Fig. 3 Notations for continuous girder

$$C_{ii} = \beta_i \cdot L \quad (i=1,2,3) \quad (2)$$

を仮定する。ここでLは支間とし、 $\beta_i (i=1,2,3)$  は各断面の断面変化係数とする。

$$T_w = B_w / 152 \quad (3)$$

$$A_g = M / (\sigma_a \cdot B_w) - 1/6 \cdot A_w \quad (4)$$

$$T_f = (A_g / 26)^{1/2} \quad (5)$$

$$B_f = 26 \cdot T_f \quad (6)$$

ここで、 $A_g$  はフランジプレートの断面積、 $A_w$  はウェブプレートの断面積、 $M$  は曲げモーメント、 $T_f$ 、 $B_f$  はフランジプレートの厚さおよび幅とする。また、許容応力  $\sigma_a$  については、断面 III、IV において座屈許容応力  $\sigma_a$  とする。以上概算で求めた断面について断面決定を行い、 $\sigma_a - \sigma$  を求める。そして

$$\sigma_a - \sigma \leq \sigma_a \times (\text{EPSA})$$

または

$$\sigma_a - \sigma \geq 0.0$$

になるまで断面計算を繰返し、断面寸法を決定する。ここで、(EPSA) = 0.01 とする。

以上の全応力設計によって各変数  $T_w$ 、 $B_1$ 、 $T_1$ 、 $B_2$ 、 $T_2$ 、 $B_3$ 、 $T_3$  を  $B_w$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$  の関数として表わすことができる。そこで変数は  $B_w$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$  の4個となり、制約条件式・目的関数を  $B_w$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$  の関数として示すことができる。制約条件式は応力の制限、たわみの制限、座屈防止のための板幅に対する板厚の制限、断面寸法の上下限の制限とし、次の式で示すことができる。

$$\sigma_a - \sigma_A \geq 0 \quad (7)$$

$$\sigma_a - \sigma_B \leq 0 \quad (8)$$

$$\sigma_a - \sigma_C \geq 0 \quad (9)$$

$$\sigma_{ca1} - \sigma_D \geq 0 \quad (10)$$

$$\sigma_{ca2} - \sigma_E \geq 0 \quad (11)$$

$$\delta_a - \delta \geq 0 \quad (12)$$

$$26 \cdot T_1 - B_1 \geq 0 \quad (13)$$

$$26 \cdot T_2 - B_2 \geq 0 \quad (14)$$

$$26 \cdot T_3 - B_3 \geq 0 \quad (15)$$

$$B_w u - B_w \geq 0 \quad (16)$$

$$B_w - B_w l \geq 0 \quad (17)$$

$$C_{11u} - C_{11} \geq 0 \quad (18)$$

$$C_{11} - C_{11l} \geq 0 \quad (19)$$

$$C_{12u} - C_{12} \geq 0 \quad (20)$$

$$C_{12} - C_{12l} \geq 0 \quad (21)$$

$$C_{13u} - C_{13} \geq 0 \quad (22)$$

$$C_{13} - C_{13l} \geq 0 \quad (23)$$

ここで、 $\sigma_a$  は上下フランジプレートの許容曲げ応力度、 $\sigma_{ca1}$ 、 $\sigma_{ca2}$  はそれぞれ、断面 III、IV の座屈許容応力度、 $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$ 、 $\sigma_C$ 、 $\sigma_D$ 、 $\sigma_E$  はそれぞれの断面変化点でのフランジプレートの作用曲げ応力度、 $\delta_a$  は許容たわみ、 $\delta$  は最大たわみ、 $B_w u$ 、 $C_{11u}$ 、 $C_{12u}$ 、 $C_{13u}$  は変数  $B_w$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$  の上限値、 $B_w l$ 、 $C_{11l}$ 、 $C_{12l}$ 、 $C_{13l}$  はその下限値を示す。以上により、 $B_w$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{13}$  を変数として式(7)~式(23)を制約条件式として桁の体積すなわち次式

$$Z = 2 \cdot B_1 \cdot T_1 \cdot (C_{11} + C_{13} - C_{12}) + 2 \cdot B_1 \cdot T_2 \cdot (C_{12} - C_{11}) + 2 \cdot B_3 \cdot T_3 \cdot (L - C_{13}) + B_w \cdot T_w \cdot L \quad (24)$$

を目的関数として SUMT 法により全体の最適設計を行って最適値を求めた。

SLP 法の場合、設計変数として  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$ ,  $B_w$ ,  $T_w$ ,  $B_1$ ,  $T_1$ ,  $B_2$ ,  $T_2$ ,  $B_3$ ,  $T_3$  の11個とした。変数の決定については、全応力設計の場合と同様である。すなわち、 $B_w$ ,  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$  を仮定し、式(1)~式(6)を用いて

$$|(\sigma_a - \sigma) / \sigma_a| < \varepsilon$$

または

$$|(\sigma_a - \sigma) / \sigma_a| = 0$$

になるまで断面計算を繰返し、断面寸法を決定した。ここで  $\varepsilon = 0.01$  とする。

フランジプレートの板幅・板厚に上下限値を設け、制約条件式として追加した。次のとおりである。

$$B_{iu} - B_i \geq 0 \quad (25)$$

$$B_i - B_{il} \geq 0 \quad (26)$$

$$T_{iu} - T_i \geq 0 \quad (27)$$

$$T_i - T_{il} \geq 0 \quad (i=1,2,3) \quad (28)$$

ここで、 $B_i$  はフランジプレート板幅、 $B_{iu}$  はその上限値、 $B_{il}$  はその下限値を示し、 $T_i$  はフランジプレート板厚、 $T_{iu}$  はその上限値、 $T_{il}$  はその下限値を示す。また、各変数についても move limit と呼ばれる上下限値を設けた。すなわち

$$x_{ju} = x_j + A_1 \cdot x_j \quad (29)$$

$$x_{jl} = x_j - A_1 \cdot x_j \quad (30)$$

とし、式(7)~式(11)の応力の制約条件式についてのみ、式(29)、(30)を代入して、制約条件式を追加した。ここで  $A_1$  は move limit といい、 $A_1 = 0.1$  にとり、繰返し回数によって 0 に近づけていった。

以上より求めた各変数の初期値  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$ ,  $B_w$ ,  $T_w$ ,  $B_1$ ,  $T_1$ ,  $B_2$ ,  $T_2$ ,  $B_3$ ,  $T_3$  を用いて、式(7)~式(23)、式(25)~式(28)の制約条件式および式(24)の目的関数をそれぞれの変数に関して Taylor 展開し、その微係数を求め、線形化し、LP法<sup>2)</sup>を適用した。

## (2) 最適設計結果と考察

### 1) 初期値

$\alpha$  の初期値  $\alpha^0$  を 15, 18 とし、 $C_{i1}^0/L$  を 0.167, 0.200,  $C_{i2}^0/L$  を 0.650, 0.615,  $C_{i3}^0/L$  を 0.879, 0.900 と変えて計算し、同じ最適値になるかどうかを比較・検討した。

### 2) 最適設計結果

3. (1) で述べた制約条件式および目的関数を SLP 法、全応力設計による SUMT 法に適用して最適設計を行った結果について、最適値の比較表を Table 1, Table 2 に示した。表中  $L$  は支間 (単位 cm),  $\alpha^0$ ,  $C_{i1}^0$ ,  $C_{i2}^0$ ,  $C_{i3}^0$  は  $\alpha$ ,  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$  の初期値,  $B_w$ ,  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$ ,  $T_w$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $T_2$ ,  $B_3$ ,  $T_3$  は Fig. 3 に示す設計変数 (単位 cm),  $F$  は罰関数の値,  $Z$  は目的関数の値 (共に単位は  $10^6 \text{cm}^3$ ),  $\alpha$ ,  $C_{i1}/L$ ,  $C_{i2}/L$ ,  $C_{i3}/L$  はそれぞれ支間とけた高の比および断面変化点の位置と支間の比を示す。また、 $\sigma_a - \sigma_1$ ,  $\sigma_a - \sigma_2$ ,  $\sigma_a - \sigma_3$  は断面 I, III, 断面 II, および断面 IV における許容応力と作用応力の差を表わし、全応力設計における応力の収束状況を示す。表から明らかなように支間 3,000 cm, 桁高  $B_w$  および断面変化点の距離  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $C_{i3}$  の初期値を変え、それぞれ最適設計を行ったものである。

### 3) 結果の考察

(a) 最小体積の値  $Z$  は Table 1 において SLP 法で  $Z = 1.3072 \times 10^6 \text{cm}^3$ , Table 2 において全応力設計による SUMT 法で  $Z = 1.2943 \times 10^6 \text{cm}^3$  であり、全応力設計による SUMT 法の方が約 0.6% 小さくなっている。これは表中の応力の収束状況を見ると SLP 法ではほぼ全応力設計になっているのに対して、全応力設計による SUMT 法では大きいところで 1.0% 程度余裕のある設計になっているためであると思われる。

Table 1 Comparisons of optimum values by SLP method

L (cm)	$\alpha^0$	$C_{i1}^0/L$	$C_{i2}^0/L$	$C_{i3}^0/L$	$B_w$ (cm)	$C_{i1}$ (cm)	$C_{i2}$ (cm)	$C_{i3}$ (cm)	$T_w$ (cm)	$B_1$ (cm)	$T_1$ (cm)	$B_2$ (cm)	$T_2$ (cm)
3000	15	0.167	0.650	0.879	180.0	522.2	1926.7	2561.6	1.184	35.26	2.034	45.89	2.668
3000	15	0.200	0.615	0.900	180.8	517.7	1931.1	2560.8	1.190	35.14	2.000	45.70	2.659
3000	18	0.167	0.650	0.879	179.8	527.6	1920.7	2568.5	1.183	36.38	1.995	45.53	2.694
3000	18	0.200	0.615	0.900	179.2	523.1	1925.6	2560.8	1.179	35.78	2.028	46.87	2.634

L (cm)	$\alpha^0$	$B_3$ (cm)	$T_3$ (cm)	$Z \times 10^6$ ( $\text{cm}^3$ )	$\alpha = L/B_w$	$C_{i1}/L$	$C_{i2}/L$	$C_{i3}/L$	$\sigma_a - \sigma_1$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\sigma_a - \sigma_2$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\sigma_a - \sigma_3$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )
3000	15	52.35	3.448	1.3074	16.7	0.174	0.624	0.854	0.2	0.6	1.6
3000	15	51.92	3.450	1.3076	16.6	0.173	0.644	0.854	1.3	0.9	3.5
3000	18	51.76	3.504	1.3072	16.7	0.176	0.640	0.856	0.1	0.1	0.5
3000	18	53.44	3.399	1.3077	16.7	0.174	0.642	0.854	0.2	0.3	2.7

Table 2 Comparisons of optimum values by the fully stressed design

L (cm)	$\alpha^0$	$C_{k1}/L$	$C_{k2}/L$	$C_{k3}/L$	$B_w$ (cm)	$C_{k1}$ (cm)	$C_{k2}$ (cm)	$C_{k3}$ (cm)	$T_w$ (cm)	$B_1$ (cm)	$T_1$ (cm)	$B_2$ (cm)	$T_2$ (cm)
3000	15	0.167	0.650	0.879	173.9	693.9	1944.2	2587.6	1.078	46.98	1.807	61.51	2.366
3000	15	0.200	0.615	0.900	179.4	667.9	1605.0	2616.0	1.312	40.65	1.563	51.00	1.962
3000	18	0.167	0.650	0.879	178.2	505.9	1905.7	2364.1	1.107	33.66	1.295	60.22	2.316
3000	18	0.200	0.615	0.900	175.2	605.9	1804.9	2473.9	1.021	42.81	1.630	64.18	2.444

L (cm)	$\alpha^0$	$B_3$ (cm)	$T_3$ (cm)	$F_{x1} \times 10^6$ (cm <sup>3</sup> )	$Z_{x1} \times 10^6$ (cm <sup>3</sup> )	$\alpha = L/B_w$	$C_{k1}/L$	$C_{k2}/L$	$C_{k3}/L$	$\sigma_a - \sigma_1$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_a - \sigma_2$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_a - \sigma_3$ (kg/cm <sup>2</sup> )
3000	15	71.70	2.758	1.2943	1.2943	17.3	0.231	0.648	0.863	0.1	13.8	4.2
3000	15	61.96	2.383	1.2996	1.2996	16.7	0.223	0.535	0.872	2.9	11.1	7.9
3000	18	70.31	2.704	1.2951	1.2951	16.8	0.169	0.635	0.788	3.0	13.9	4.2
3000	18	74.57	2.868	1.2944	1.2944	17.1	0.202	0.602	0.825	12.2	14.5	12.8

(b) 各変数の収束状況は、支間  $L=3,000\text{cm}$  において、 $\alpha$ ,  $C_{k1}/L$ ,  $C_{k2}/L$ ,  $C_{k3}/L$  の初期値  $\alpha^0$ ,  $C_{k1}^0/L$ ,  $C_{k2}^0/L$ ,  $C_{k3}^0/L$  を変えた場合、Table 1 の SLP 法では、初期値の如何によらず  $\alpha=16.7$ ,  $C_{k1}/L=0.174$ ,  $C_{k2}/L=0.640$ ,  $C_{k3}/L=0.854$  に、また各変数の値もほぼ一定値に収束している。これに対し Table 2 の全応力設計による SUMT 法では、初期値が変化すると  $\alpha$ ,  $C_{k1}/L$ ,  $C_{k2}/L$ ,  $C_{k3}/L$  および各変数の値はそれぞれ離散的に収束している。これは Table 2 から桁高  $B_w$  が  $B_w=176\text{cm}$  あたりでほぼ一定値に収束しているのであるが、断面変化点の距離  $C_{k1}$ ,  $C_{k2}$ ,  $C_{k3}$  が不規則に収束しているため、これにより断面が決定されてしまうからである。

(c) Table 1, Table 2 に示すように初期値が異なる場合、Table 2 において特に収束値に多少の違いがあるが、どちらの場合も各断面の断面積および目的関数の値  $Z$  はほぼ等しい最適値になっており、応力の収束状況も大きいところで 1% 程度の差であることから、したがって、求めた結果は全体の最適値に達しているものと思われる。

(d) CPU 時間は九州大学 FACOM M-190 で、SLP 法の場合は 13sec., 全応力設計による SUMT 法の場合は 28sec. であった。また、繰返し回数は SLP 法で 8 回、SUMT 法で 11 回であった。

(e) 今後の問題点として、鋼種も変数とし、目的関数には材料費・製作費を含んだコストとして全応力最適設計を行う必要がある。

#### 4. 結 論

本手法によれば、SLP 法は初期値が異なっても、確

実に全域的な最適解が得られ、ほぼ全応力設計になっている。全応力設計による SUMT 法は、初期値が異なる場合、大局的には 1 つの凹変化をしているが、局所的には複雑な変化を示しているものと思われる。しかし、一定値に収束していることから、設計変数の値が異なってもその組み合わせを適当に選択することにより全域的な最適解が得られることになる。また、変数が 11 個程度であればどちらの場合も十分実用的な最適設計法であると結論することができる。

さらに、トラスなどの複雑な構造物についても SLP 法、全応力設計による SUMT 法を組み合わせることによって全工場製作費を目的関数として全体の最適設計を行うことが可能である。

終りに本研究では、長崎大学工学部・高橋和雄助教授に御助言いただいたことに謝辞を申し上げる。また本計算には、長崎大学 FACOM 270-30、九州大学 FACOM M-190 を使用した。御援助いただいた計算センターの方々に感謝する。

#### 参考文献

- 1) 奥村敏恵・大久保禎二：Suboptimization による鋼連続桁の最適設計，土木学会論文報告集，第 215 号，pp. 1~14，1937 年 7 月。
- 2) 長尚著：構造物の最適設計，朝倉書店，pp. 11~41，pp. 61~67。
- 3) D・J・コワリック，M・R・オズボーン共著，山本善之，小山健夫共訳：非線形最適化問題，培風館，pp. 11~19，pp. 53~57，1973 年。
- 4) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，丸善，1973 年。