鋼構造立体骨組の一弾塑性解析法

修　行　　　稔*

A Plastic Hinge Method for Steel Space Frames

by

Minoru SHUGYO

(Department of Structural Engineering)

A numerial procedure is presented for analizing the inelastic response of space frames. The procedure is based on the concept of the plastic hinge method and includes the effects of material nonlinearities, strain hardening and Bauschinger effect when strain reversal appears, residual stresses and/or geometrical nonlinearities.

The plastic deformations in the plastic hinge are obtained by integration of generalized plastic strains of the member section along the assumed hinge length respect to the member axis, therefore, it is necessary to be determined the appropriate hinge length.

The efffects of variations of the plastic hinge length are discussed by a few example comparing with the experimental results.

1. 序

一般に建築構造物は強震時には弾塑性挙動を行うことが予想されるとともに，本来建築構造物は立体的な構造であり，地震動もまた三次元的な動きを示すものであるところから，これらの構造物の耐震安全性の評価は三次元的な弾塑性応答特性の解明のもとに検討されねばならない。にも拘らず，従来立体構造物の耐震安全性は，それらを分解して平面構造物として取扱うという方法で行われてきた。このため構造部材に生じる軸力，二軸曲げモーメント，捩りモーメント等の断面力の弾塑性域における相互作用の影響が無視されるほかに，構造物全体の捩れ振動を考慮できないなど大きな問題点を含んでいる。

これらの点に関連した研究が近年徐々に進んできているが，特に鋼構造立体骨組の弾塑性解析法に関して藤本，緑川ら[1)]は既往の研究の問題点，すなわち静的弾塑性挙動に関する研究ではそのほとんどが一方向載荷の場合を扱っていること，動的弾塑性応答に関する研究では材料の歪硬化，幾何学的非線形，部材の捩れ変形，材軸方向の弾塑性領域の拡がりを考慮していないものが多いことを指摘し，これらの難点を解消するため部材を材軸方向に分割するとともに部材断面を微小要素に分割して，柱たわみ曲線の考え方[2)]に基礎をおく数値積分法によって部材剛性を求める解析法を提示した。

本研究は，目的においては藤本，緑川らの研究と類似のものであるが，基礎を塑性ヒンジ法においているため従来の有限要素法の概念がそのまま適用できるとともに，部材断面の軸力と繰返し二軸曲げモーメント荷重の下での力学的挙動，およびそれの基礎となる素材の繰返し引張圧縮荷重の下での応力～歪関係として実験で検証した極めて精度の高いものを用いるため[3)]

昭和54年9月26日受理
* 構造工学科

汎用性，信頼性ともに高い解析法であると考えられる。

2. 部材の剛性方程式

2−1 部材断面の一般化応力〜歪関係

二軸対称薄肉断面の図心を原点にとり，対称軸をそれぞれx, y座標とする。断面の一般化応力と一般化歪として，軸力，二つの対称軸回りの曲げモーメントおよびそりモーメントとそれぞれに対応する変形を考え，それらを Fig. 1 のように定義すれば，それらの増分の間に次のような関係が成り立つ。

$$df = \boldsymbol{T} d\delta \tag{1}$$

ここに

$\boldsymbol{f} = \{P M_x M_y M_\omega\}^T$

$\delta = \{\varepsilon_0 \phi_x \phi_y \phi_\omega\}^T$

P：軸力

M_x, M_y：x, y軸回りの曲げモーメント

M_ω：そりモーメント

ε_0 ：図心の軸方向歪

ϕ_x, ϕ_y：x, y軸回りの曲げ曲率

ϕ_ω：そりによる捩り曲率

$\boldsymbol{T}$：断面の接線剛性マトリックス

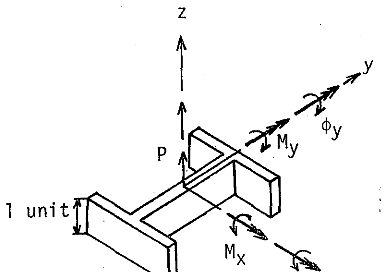


Fig. 1 Positive Vectors of Generalized Stresses and Strains

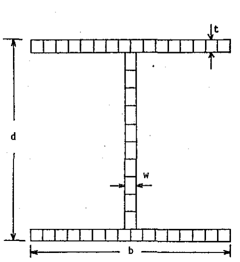


Fig. 2 H-Section Divided into Finite Elements

また$d\delta$が求まれば，これに対応して断面の任意の点における歪増分$d\varepsilon$が次式で与えられる。

$$d\varepsilon = d\varepsilon_0 + y d\phi_x + x d\phi_y + \omega d\phi_\omega \tag{2}$$

ここに

ω：そり関数

(1)式の$\boldsymbol{T}$は，断面を Fig. 2 のように微小要素に分割し各繊維について垂直応力と垂直歪の関係を適用して数値積分を行うことにより得られるが，この$\boldsymbol{T}$を接線剛性として反復計算を行えば断面力増分dfに対する歪増分$d\delta$が求められる。

著者は，繊維の垂直応力〜歪関係として歪硬化域および逆方向負荷時のバウシンガ効果域がベキ関数で近似される極めて精度の高い繰返し応力〜歪関係を用い，(1)式による荷重増分〜反復法によって定軸圧下繰返し二軸曲げ荷重を受ける鋼管断面の挙動を解析して実験値と比較することにより，本法によってかなりの高精度でその挙動の予測が可能であることを検証した。[3)]

2−2 部材の剛性方程式

Fig. 3 に示すように，部材の剛接点，集中荷重作用点など降伏断面が生じる可能性のある断面間を単位部材として，その両端をi, jとする。変形後の部材軸とx軸とが一致するような部材座標系（x, y, z）を考え，部材端力

$$\{Q\} = \{Q_i Q_j\}^T = \{X_i Y_i Z_i M_{xi} M_{yi} M_{zi} X_j Y_j Z_j M_{xj} M_{yj} M_{zj}\}^T \tag{3}$$

と，これに対応する部材端変位

$$\{q\} = \{q_i q_j\}^T = \{u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi} u_j v_j w_j \theta_{xj} \theta_{yj} \theta_{zj}\}^T \tag{4}$$

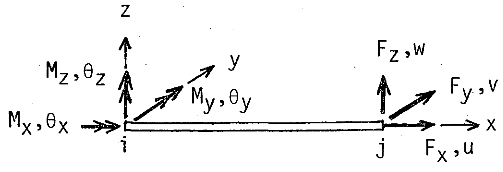


Fig. 3 Forces and Displasements of a Member

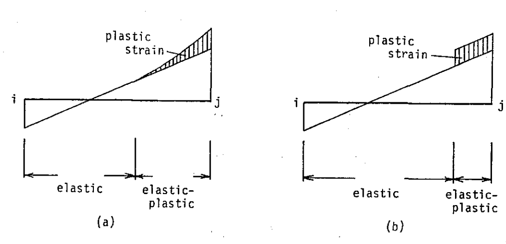


Fig. 4 Generalized Strain Distribution

を図に示すように定義すれば，弾性端部材に対しては次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{Q}_i &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}d\boldsymbol{q}_i + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}d\boldsymbol{q}_j \\ d\boldsymbol{Q}_j &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}d\boldsymbol{q}_i + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}d\boldsymbol{q}_j \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ここに，

$\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}$, $\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}$, $\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}$, $\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}$,：部材の弾性接線剛性マトリックス

次に，降伏が部材端のみに生じるという塑性ヒンジ理論に基づいて降伏部材の剛性を導こう。**2－1**で述べたように，ある断面の断面力増分 df に対して歪増分 $d\delta$ を求めることができるから，これらから軸方向変形量，回軸角等を成分とする変位増分 $d\boldsymbol{q}$ を求めるため，塑性ヒンジ長 l_p を導入する。一般に降伏端においては塑性歪成分は Fig. 4 (a) のように分布すると考えられるが，これを(b)のように l_p の内部で各歪成分が一様に分布すると仮定すれば，変位増分 $d\boldsymbol{q}$ は次式で求められる。

$$d\boldsymbol{q} = l_p \overset{-1}{\boldsymbol{T}}\ df \tag{6}$$

これは弾性成分を含んでいるから塑性成分 $d\boldsymbol{q}^p$ のみを分離して

$$d\boldsymbol{q}^p = l_p\ \overset{-1}{\boldsymbol{T}_p} df \tag{7}$$

ここで改めて　$\overset{-1}{\boldsymbol{T}_p} \rightarrow \boldsymbol{T}$ とおけば

$$d\boldsymbol{q}^p = l_p\ \boldsymbol{T}\ df \tag{8}$$

この式によって，降伏端の断面の断面力増分 df に対する塑性変位増分 $d\boldsymbol{q}^p$ が過去の変形履歴の関数として，一義的に求められる。

(a)　i，j 両端降伏部材

まず，降伏の判定法について述べる。通常の塑性ヒンジ法では適当に採用した降伏条件式によって判定する訳であるが，本法ではこれが使用できないので(7)式の $\boldsymbol{T}_p$ を用いて判別する。(1)式の $\boldsymbol{T}$ は弾性成分を含んでいるからその逆行別は必ず存在するが，(7)式の $\boldsymbol{T}_p$ は塑性成分のみに関する項を要素としているために，弾性域にある断面では特異となる性質があるので，これを用いて判定する。

さて，今 i，j 端とも降伏しているとすれば部材端変位増分 $d\boldsymbol{q}$ は弾性成分 $d\overset{e}{\boldsymbol{q}}$ と塑性成分 $d\overset{p}{\boldsymbol{q}}$ とから成っているから，

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{q}_i &= d\overset{e}{\boldsymbol{q}}_i + d\overset{p}{\boldsymbol{q}}_i \\ d\boldsymbol{q}_j &= d\overset{e}{\boldsymbol{q}}_j + d\overset{p}{\boldsymbol{q}}_j \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

従って

$$\left.\begin{aligned} d\overset{e}{\boldsymbol{q}}_i &= d\boldsymbol{q}_i - d\overset{p}{\boldsymbol{q}}_i \\ d\overset{e}{\boldsymbol{q}}_j &= d\boldsymbol{q}_j - d\overset{p}{\boldsymbol{q}}_j \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(8)式を用い，$d\boldsymbol{Q}$ を弾性成分で表わすと，

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{Q}_i &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}(d\boldsymbol{q}_i - l_p\boldsymbol{T}_i d\boldsymbol{Q}_i) + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}(d\boldsymbol{q}_j - l_p\boldsymbol{T}_j d\boldsymbol{Q}_j) \\ d\boldsymbol{Q}_j &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}(d\boldsymbol{q}_i - l_p\boldsymbol{T}_i d\boldsymbol{Q}_i) + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}(d\boldsymbol{q}_j - l_p\boldsymbol{T}_j d\boldsymbol{Q}_j) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

これより，部材の剛性方程式が次のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{Q}_i &= \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ii}d\boldsymbol{q}_i + \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ij}d\boldsymbol{q}_j \\ d\boldsymbol{Q}_j &= \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ji}d\boldsymbol{q}_i + \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{jj}d\boldsymbol{q}_j \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ここに

$$\overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ii} = \boldsymbol{A}\{\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}l_p\boldsymbol{T}_j(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}\}$$

$$\overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ij} = \boldsymbol{A}\{\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}l_p\boldsymbol{T}_j(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}\}$$

$$\overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ji} = \boldsymbol{B}\{\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}l_p\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}\}$$

$$\overset{p}{\boldsymbol{K}}_{jj} = \boldsymbol{B}\{\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}l_p\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}\}$$

$$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{I} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}l_p\boldsymbol{T}_j(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}l_p\boldsymbol{T}_i + \boldsymbol{K}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i\}^{-1}$$

$$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{I} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}l_p\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}l_p\boldsymbol{T}_j + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j\}^{-1}$$

(b)　i 端降伏，j 端弾性部材

(11)式において，$\boldsymbol{T}_j = 0$，従って

$$\left.\begin{aligned} \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ii} &= (\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii} \\ \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ij} &= (\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij} \\ \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ji} &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}l_p\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii} \\ \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{jj} &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji}l_p\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii}l_p\boldsymbol{T}_i)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(c)　i端弾性，j 端降伏部材

(11)式において　$\boldsymbol{T}_i = 0$，従って

$$\left.\begin{aligned} \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ii} &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ii} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}l_p\boldsymbol{T}_j(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji} \\ \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ij} &= \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij} - \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ij}l_p\boldsymbol{T}_j(\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{ej}{\boldsymbol{K}}_{j} \\ \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{ji} &= (\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{ji} \\ \overset{p}{\boldsymbol{K}}_{jj} &= (\boldsymbol{I} + \overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj}l_p\boldsymbol{T}_j)^{-1}\overset{e}{\boldsymbol{K}}_{jj} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

3．解　析　例

本解法は，通常の荷重漸増法と同様にして進めることができる。ただ，剛性マトリックスの中に(8)式で導入した塑性ヒンジ長 l_p を含むため，これを決める必要がある。l_p は断面形状寸法および載荷状態等の関数であると考えられるため，これらを考慮した多数の実験と解析結果との比較によって決定されねばならない量であるが，ここではとりあえず l_p の変化が及ぼす解析結果への影響および実験結果との対応を検討するため，H形断面梁による繰返し三点曲げ実験結果と種々の l_p による解析結果との比較を試みた。梁は 125×125×6.5×9㎜ の断面を持つH形鋼であり，その断面諸元および，フランジから切り出した引張試験片による素材の特性は次の通りである。

断面積　A＝30.3cm²

断面２次モーメント　$I_x=824.8\text{cm}^4$

〃　　　　　　　　$I_y=293.2\text{cm}^4$

降伏応力　　　　　$\sigma_y=3200\text{kg/cm}^2$

弾性係数　　　　　$E=2.17\times10^6\text{kg/cm}^2$

歪硬化開始点の歪　$\varepsilon_{st}=0.02$

歪硬化域の応力〜歪関係

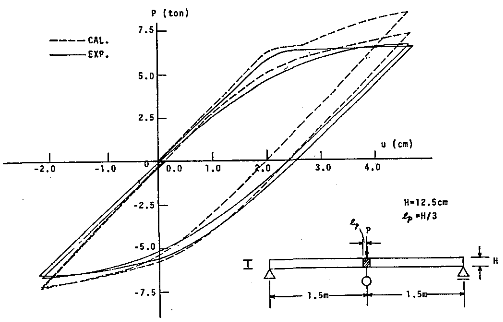
$$\sigma=3.16\times10^4\varepsilon^{0.0354}-2.42\times10^4\text{kg/cm}^2$$

尚，単純引張曲線の特性が文献4）の $M1$ の特性に類似しているので，解析に必要な断面の各繊維の繰返し応力〜歪関係の予測には $M1$ の実験式を用いた。

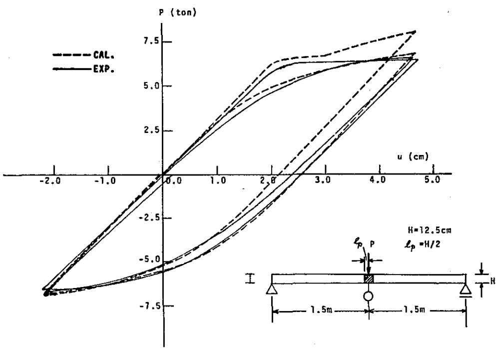
梁のスパンは３ｍとし，万能試験機で梁中央部に載荷しながら載荷点直下のたわみ u を変位計２台で計測した。逆方向載荷の際は梁を180°回転させた。

Fig．5 (a)は強軸方向に載荷した場合の荷重 P と中央点のたわみ u との関係である。(a)は l_p を断面の高さ H の⅓とした場合，(b)は $H/2$，(c) H の場合をそれぞれ実験値と比較したものである。図より明らかなように，$l_p=H$ の時に極めて実験値に近い挙動を示す。

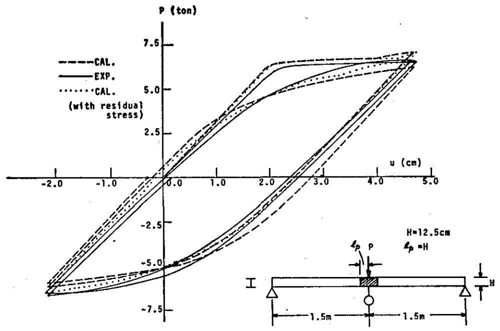
Fig．6 (a)〜(c)は弱軸方向に載荷した場合であり，(a)は断面の高さを D として $l_p=D/5$，(b)は D，(c)は $3D/2$ とした時の関係である。この場合にもやはり



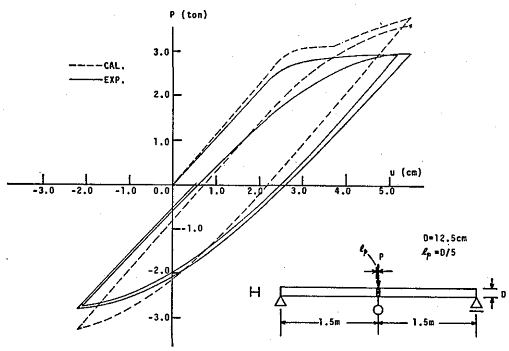
Fig．5　(a) Load-Deflection Curve of a H-beam (Strong Axis, $l_p=H/3$)



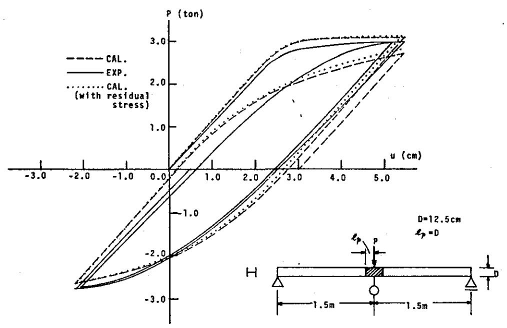
Fig．5　(b) Do. (Strong Axis, $l_p=H/2$)



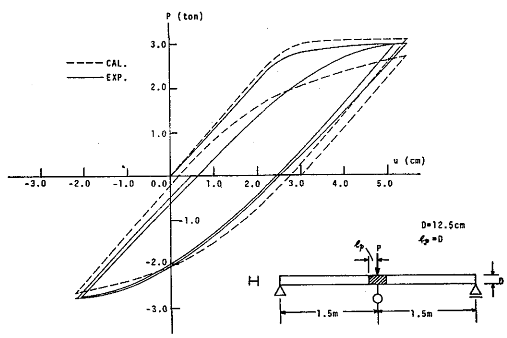
Fig．5　(c) Do. (Strong Axis, $l_p=H$)



Fig．6　(a) Do.　(Weak Axis, $l_p=D/5$)



Fig．6．(b) Do. (Weak Axis, $l_p=D$)



Fig．6　(c) Do. (Weak Axis, $l_p=3D/2$)

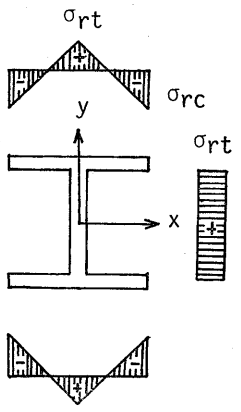


Fig. 7　Residual Stress Distribution

$l_p=D$ の時が最も実験値に近い挙動を示すようである。

ところで，残留応力の影響をみるために強軸弱軸，それぞれ，$l_p=H$, $l_p=D$ の場合のみ残留応力の影響を考慮した解析結果を図中に載せているが，より実験結果に近づく傾向となる。尚，残留応力は Fig. 7 のように分布すると仮定した。図中において

$$\sigma_{rc}=-0.3\sigma_y$$

$$\sigma_{rt}=\left(\frac{bt}{bt-(d-2t)w}\right)\sigma_{rc}$$

ここに，b：断面の幅，d：断面の高さ

t：フランジ厚，w：ウェブ厚

である。

また，解析に使用した弾性剛性マトリクス $\boldsymbol{K}^e$ は微少変形理論に基づくものである。

4. 結　論

断面の接線剛性を利用した鋼構造立体骨組の弾塑性解析法について述べ，解析例によって塑性ヒンジ長 l_p を適当にとればその繰り返し挙動を極めて高精度に解析し得ることを示した。本法によれば，残留応力はもとより歪硬化，バウシンガ効果等の材料非線形，また必要に応じて幾何学的非線形も考慮できる。しかし，ここで導入した塑性ヒンジ長 l_p については，断面形状や載荷状態との相関関係を今後，いろいろな実験との比較によって詳細に検討する必要があろう。また，本解析を動的弾塑性応答解析に適用するに当っては，素材の応力～歪関係の速度依存性の検討も一つの課題である。

謝　辞

本研究に際し貴重な御助言を賜わった長崎大学工学部教授花井正実博士（現広島大学工学部）に感謝の意を表する。なお，数値計算には九州大学大型計算機センター FACOM M—190 を使用した。

参考文献

1) 藤本盛久，緑川光正：鋼構造立体骨組の動的弾塑性応答に関する研究，その1　H形断面柱および箱形断面柱から成る1層1スパン剛接立体骨組，日本建築学会論文報告集第282号，昭和54年8月

2) Chen, W. and Atsuta, T.: Theory of Beam-Columns, Volume 2. Space Behavior and Design, McGraw-Hill, 1977

3) 修行稔，満崎彰吾，花井正実：軸力と繰返し二軸曲げ荷重を受ける鋼構造部材断面の弾塑性挙動について，その1，長崎大学工学部研究報告第10号，昭和53年2月，その2，同第12号，昭和54年2月

4) Shugyo, M.: The Stress-Strain Behaviors of Mild Steels under Complex Low Cycle Loads, Proc. of 20th Japan Congress on Materials Research, March, 1977