内湾の海水交換に関する研究

中村武弘*・富樫宏由*

Studies on Exchange of Bay Water

by

Takehiro NAKAMURA and Hiroyoshi TOGASHI

(Department of Civil Engineering)

The concept of tidal exchange is an effectual method for the estimate of water pollution of a long time scale in a bay connected with the ocean through an inlet channel. A part of water entering the bay on a flood tide stays in the bay and the remainder returns to the ocean on a successive ebb tide with new bay water which outflows for the first time. Accordingly, the stayed water and the new bay water are exchanged in the bay. So if the historical process of mechanism of this stayed water could be explained, the mass balance equation of tracer in the bay would be given.

In this paper, in the first place, the composition of the stayed water is analyzed with tidal exchange ratios r_E, defined by Parker et al. (1972), and r_F, defined by Kashiwai (1977). In the second place, under this analytical result the mass balance equation of tracer in the bay is given with the two new tidal exchange ratios for tracer. These ratios are estimated in two cases, i. e. the one case of flow volume on the ebb tide being very smaller than volume of bay water, and the another cace of both tracer concentration of bay water being very longer than one of ocean water and inflow of tracer of land water being little. Finally, this analysis is applied to non-conservative tracer and the mass balance equation of non-conservative tracer is given with the two new tidal exchange ratios for this tracer.

1. 序　論

交流口を通じて外海と接続する内湾の長期的な水質汚濁予測を行うには海水交換の概念が有効である。しかし海水交換を表わすパラメータとしての海水交換率の定義は多くの研究者によっていろいろなされ，またその意味するところもそれぞれ異なり，いまだ定説がない。Parker. ら[1]によって定義された海水交換率 r_E は上げ潮時の流入量に対する初めて湾内に流入する外海水量のしめる割合を表わし，また柏井[2]によって定義された交換率 r_F は下げ潮時の流出量に対する初めて湾外に流出する湾内水量のしめる割合を表わしている。定義からも明らかなようにこの二つの交換率は直接には湾内の溶存物質に対する連続の方程式を表わすためのものではない。連続の方程式と直接結び付けられた海水交換率としては柏井の定義したもう一つの交換率 r_G が有るが不明な点が残っている。

昭和54年9月27日受理

* 土木工学科

いまある上げ潮時に流入する海水を見ると，流入水の一部が湾内に残留し，残りの部分は引き続く下げ潮で初めて湾外に流出する湾内水と共に流出している。したがって海水の交換は湾内に残留する水と初めて流出する湾内水との間で行われている。この湾内に残留する水の一部はこの上げ潮時に初めて流入した外海水であり，残りの部分はそれ以前の潮汐時に流出入した湾内水および外海水によって構成されていると考えられる。そこで湾内に残留する水の構成割合を明らかにすることができれば，湾内の溶存物質に対する連続の方程式を導くことができる。

本論文は海水交換率 r_E，r_F が海水の量に対して定義されていることに注目し，まず湾内に残留する水の構成割合をこの r_E，r_F を用いて解析し，続いて溶存物質に対する連続の方程式を導く。しかしここで示される連続の方程式の最大の欠点はそれを解くには過去の潮汐時に新しい外海水及び新しい湾内水として流入出するときの濃度を必要とすることである。したがって一般的には解くことはできない。しかし，湾内水量に比し下げ潮時の流出量が非常に小さい場合及び湾内水の濃度が外海水の濃度に比して非常に大きく且つ陸水からの物質の流入量が非常に少ない場合の二つの場合には連続の方程式を意義のある二つの交換率を定義することによって表現でき，またその交換率の値を近似的に求めることができることを示す。また前者の場合の連続の方程式は柏井の示した連続の方程式と全く同一の式に変形できる。そこで柏井の連続の方程式が成立するための明確な条件を示す。またここで用いた方法は非保存系の物質に対しても有効であることを示し，非保存物質に対する二つの交換率を定義する。

2. 従来の海水交換率

Parker[1] らは海水交換を表わすパラメータとして海水交換率 r_E を次のように定義した。

$$r_E = \frac{Q_O}{Q_F} \tag{2.1}$$

ここに Q_F は上げ潮時の流入量，Q_O は Q_F に含まれて初めて湾内に流入する新しい外海水の量である。そして彼らは，上げ潮時に流入する平均濃度 C_F の水塊 Q_F は平均濃度 C_O の新しい外海水 Q_O とその前の下げ潮時に平均濃度 C_E で流出した水塊とによって形成されるという仮定のもとに，交換率 r_E が

$$r_E = \frac{C_F - C_E}{C_O - C_E} \tag{2.2}$$

で与えられることを示した。他方柏井[2]は初めて流出する新しい湾内水に注目し，海水交換率 r_F を次のように定義した。

$$r_F = \frac{Q_B}{Q_E} \tag{2.3}$$

ここに Q_E は下げ潮時の流出量，Q_B は Q_E に含まれて初めて湾外に流出する新しい湾内水の量である。そして交換率 r_F は上げ潮時の平均濃度を C_F，引き続く下げ潮時の平均濃度を C_E，新しい湾内水の平均濃度を C_B とおくとき

$$r_F = \frac{C_F - C_E}{C_F - C_B} \tag{2.4}$$

で与えられる。

さらに柏井は湾内水 C_B と外海水 C_O が直接交換すると仮定したときの交換率 r_G が

$$r_G = \frac{C_F - C_E}{C_O - C_B} \tag{2.5}$$

で与えられることを示し，また（2.2），（2.4）式を用いて

$$r_G = \frac{r_E r_F}{r_E + r_F - r_E r_F} \tag{2.6}$$

と表わした。さらにこの新しい交換率 r_G および（2.2），（2.4）式を用いて湾内の溶存物質に対する連続の方程式を

$$\begin{aligned} V\frac{dC_B}{dT} &= C_F Q_F - C_E Q_E \\ &= \overline{Q}(C_F - C_E) - \frac{R}{2}(C_F + C_E) \\ &= r_G \overline{Q}(C_O - C_B) - R\left\{\frac{r_E - r_F}{r_E + r_F - r_E r_F} \cdot \frac{C_O - C_B}{2} + \frac{C_O + C_B}{2}\right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

と表わした。ここに V は湾内水量，C_B は湾内水の濃度，T は1潮汐周期を単位とした時間，$\overline{Q}$ は平均交流量（$\overline{Q} = (Q_F + Q_E)/2$），$R$ は陸水流入量（$R = Q_E - Q_F$）である。

しかしこの連続の方程式には少なからず疑問が残る。なぜなら（2.7）式を求めるときに用いた（2.2）式および（2.4）式は全く独立のものであり，両式に表われる濃度 C_E と C_F がそれぞれ等しいという理由は何もないからである。

3. 海水交換の解析

ここでの解析に必要な諸量は，海水交換率 r_E および r_F，上げ潮時の流入量 Q_F と下げ潮時の流出量 Q_E の4つだけである。したがって適宜に定義される諸量はこの4つの量で表わすことができる。また海水交換率 r_E および r_F の定義はそれぞれ（2.1）式および

(2.3) 式であり ,(2.2) , (2.4) 式ではない。したがって交換率 r_E, r_F は海水の量を用いて定義されるもので濃度によって定義されるものではないことを記しておきたい。(2.2) , (2.4) 式は交換率 r_E, r_F を求めるための1つの方法である。そこで再び海水交換率 r_E, r_F の定義をここに記す。

r_E：上げ潮による流入量 Q_F のうち，初めて湾内に流入する外海水量 Q_O のしめる割合。

$$r_E = \frac{Q_O}{Q_F} \tag{3.1}$$

r_F：下げ潮による流出量 Q_E のうち，初めて湾外に流出する湾内水量 Q_B のしめる割合。

$$r_F = \frac{Q_B}{Q_E} \tag{3.2}$$

1) 残留率 P_E, P_F の定義と交換率 r_E, r_F の取り得る値の範囲

湾口での交流現象を見ると，上げ潮時の流入量 Q_F のうちのある量（Q_{FI}）は湾内に残留するが，残りの量は引き続く下げ潮で流出しており，また逆に下げ潮時の流出量 Q_E のうちのある量（Q_{EO}）は湾外に残留するが，残りの量は引き続く上げ潮で再び流入している。その様子を図—1に示す。そこで実質的に湾内又は湾外に残留する割合を表わす次の2つの比を定義し，残留率と呼ぶことにする。

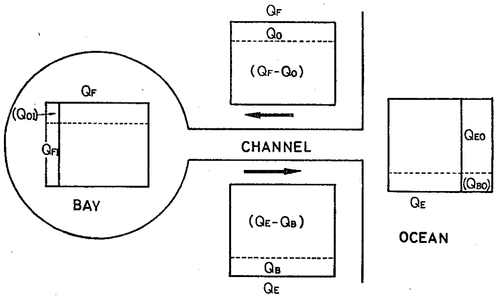

Fig. 1 Schematic diagram of tidal exchange.

P_F：上げ潮による流入量 Q_F のうち引き続く下げ潮で流出せずに湾内に残留する量 Q_{FI} のしめる割合。

P_E：下げ潮による流出量 Q_E のうち引き続く上げ潮で流入せずに湾外に残留する量 Q_{EO} のしめる割合。

ここで上げ潮時（又は下げ潮時）に湾口から流入する（又は流出する）海水は一様に混り合っていると仮定すると上に定義した P_E, P_F は次のようにも定義できる。

P_F：初めて湾内に流入した外海水量 Q_O のうち引き続く下げ潮で流出せずに湾内に残留する量 Q_{OI} のしめる割合。

P_E：初めて湾外に流出した湾内水量 Q_B のうち引き続く上げ潮で流入せずに湾外に残留する量 Q_{BO} のしめる割合。

したがって

$$P_F = \frac{Q_{FI}}{Q_F} = \frac{Q_{OI}}{Q_O} \tag{3.3}$$

$$P_E = \frac{Q_{EO}}{Q_E} = \frac{Q_{BO}}{Q_B} \tag{3.4}$$

である。ここで

$$Q_{FI} = Q_F - (Q_E - Q_B) \tag{3.5}$$

$$Q_{EO} = Q_E - (Q_F - Q_O) \tag{3.6}$$

であるから，残留率 P_F, P_E は交換率 r_F, r_E を用いて

$$P_F = 1 - \frac{1}{\alpha}(1 - r_F) \tag{3.7}$$

$$P_E = 1 - \alpha(1 - r_E) \tag{3.8}$$

と表わせる。ここに

$$\alpha = \frac{Q_F}{Q_E} \tag{3.9}$$

である。

海水の交換が起こるためには P_F, P_E の定義より

$$P_F > 0,\ P_E > 0$$

でなければならないから，(3.1) , (3.2) 式で定義される海水交換率 r_F, r_E はそれぞれ (3.7) , (3.8) 式より α の値によって次のように制約されることがわかる。

$$1 - \alpha < r_F < 1 \tag{3.10}$$

$$1 - \frac{1}{\alpha} < r_E < 1 \tag{3.11}$$

r_E, r_F の取り得る値の範囲を図—2に示す。これらのうち (3.11) 式は松本ら[3)]によってすでに報告されている。

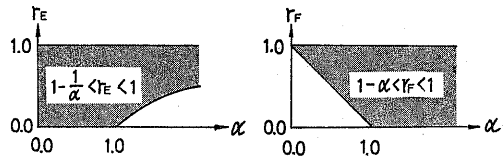

Fig. 2 Limits of r_E and r_F.

2) 初めて流入した外海水および初めて流出した湾内水のその後の潮汐による挙動

我々が知りたいことは，ある潮汐で湾内に残留する量 Q_{FI} 及び湾外に残留する量 Q_{EO} がどのような海水によって構成されているかということである。そのための前段階としていま，ある上げ潮時（第1回目の上げ潮とする。）に初めて流入する外海水量 Q_O に注目し，この Q_O が下げ潮と上げ潮を繰り返すうちに，どのように湾内及び湾外に残留して行くかを考察する。まず引き続く下げ潮（第1回目の下げ潮）で流出せずに湾内に残留する量 $Q^1{}_{OI}$ とおくと（3.3）式より

$$Q^1{}_{OI}=Q_OP_F$$

となる。従って残量

$$Q_O-Q^1{}_{OI}=Q_O\ (1-P_F)$$

が下げ潮で流出する。しかし，この残量全てが湾外に残留するわけではなく，このうちのある量は再び古い外海水として引き続く第2回目の上げ潮で湾内に流入する。そこでこの残量のうち湾外に残留する量を $Q^1{}_{OO}$，第2回目の上げ潮で再び湾内に流入する量を $Q^2{}_O$ とおくとそれぞれ

$$Q^1{}_{OO}=(Q_O-Q^1{}_{OI})P_E=Q_O(1-P_F)P_E$$

$$Q^2{}_O=Q_O-Q^1{}_{OI}-Q^1{}_{OO}=Q_O(1-P_F)(1-P_E)$$

となる。さらにこの $Q^2{}_O$ のうち引き続く下潮（第2回目の下げ潮）で流出せずに湾内に残留する量を $Q^2{}_{OI}$ とおくと，

$$Q^2{}_{OI}=Q^2{}_OP_F=Q_O(1-P_F)(1-P_E)P_F$$

となる。従って残量 $Q^2{}_O(1-P_F)$ が引き続く下げ潮で流出する。この残量のうち湾外に残留する量を $Q^2{}_{OO}$，引き続く第3回目の上げ潮で三度び湾内に流入する量を $Q^3{}_O$ とおくと，それぞれ

$$Q^2{}_{OO}=Q_O{}^2(1-P_F)P_E$$
$$=Q_O(1-P_E)(1-P_F)(1-P_F)P_E$$

$$Q^3{}_O=Q^2{}_O(1-P_F)(1-P_E)$$
$$=Q_O(1-P_F)^2(1-P_E)^2$$

となる。

同様の過程を繰り返し，第n回目の上げ潮で流入する量を $Q^n{}_O$，$Q^n{}_O$ のうち引き続く下げ潮で流出せずに湾内に残留する量を $Q^n{}_{OI}$，それに下げ潮で流出する残量（$Q^n{}_O-Q^n{}_{OI}$）のうち引き続く上げ潮で流入せずに湾外に残留する量を $Q^n{}_{OO}$ とおくと，それらはそれぞれ次のように求められる。

$$Q^n{}_O=Q_O(1-P_F)^{n-1}(1-P_E)^{n-1}$$
$$=Q_O(1-r_F)^{n-1}(1-r_E)^{n-1} \tag{3.12}$$

$$Q^n{}_{OI}=Q^n{}_OP_F=Q_O(1-P_F)^{n-1}(1-P_E)^{n-1}P_F$$
$$=Q_O(1-r_F)^{n-1}(1-r_E)^{n-1}\cdot$$
$$\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\} \tag{3.13}$$

$$Q^n{}_{OO}=Q^n{}_O(1-P_F)P_E$$
$$=Q_O(1-P_F)^{n-1}(1-P_E)^{n-1}(1-P_F)P_E$$
$$=Q_O(1-r_F)^{n-1}(1-r_E)^{n-1}\cdot$$
$$\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\{1-\alpha(1-r_E)\} \tag{3.14}$$

ここで無限回の潮汐が繰り返された後の残量（$Q^{\infty}{}_O$）を求めると，

$$Q^{\infty}{}_O=\lim_{n\to\infty}Q^n{}_O=0 \tag{3.15}$$

となる。このことは第1回目の上げ潮で流入した新しい外海水量 Q_O は無限回の潮汐を繰り返すうちにその全てが湾内及び湾外に分配されることを意味している。そこで無限回の潮汐の後，Q_O のうち湾内に残留した総量を $Q^t{}_{OI}$，湾外に残留した総量を $Q^t{}_{OO}$ とおくと，それぞれ

$$Q^t{}_{OI}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Q^i{}_{OI}=\lim_{n\to\infty}Q_OP_F\cdot$$
$$\frac{\{1-(1-P_F)^n(1-P_E)^n\}}{P_F+P_E-P_EP_F}$$
$$=Q_O\frac{P_F}{P_E+P_F-P_EP_F}$$
$$=Q_O\frac{\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}}{r_E+r_F-r_Er_F} \tag{3.16}$$

$$Q^t{}_{OO}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Q^i{}_{OO}=\lim_{n\to\infty}Q_O\cdot$$
$$(1-P_F)P_E\frac{\{1-(1-P_F)^n(1-P_E)^n\}}{P_F+P_E-P_FP_E}$$
$$=Q_O\frac{(1-P_F)P_E}{P_F+P_E-P_FP_E}$$
$$=Q_O\frac{\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\{1-\alpha(1-r_E)\}}{r_F+r_E-r_Fr_E} \tag{3.17}$$

となる。従って

$$Q^t{}_{OI}+Q^t{}_{OO}=Q_O \tag{3.18}$$

となることは明らかである。

他方，ある下げ潮時（第1回目の下げ潮）に初めて流出した湾内水量 Q_B についても同様に考えられる。Q_B のうち第n回目の下げ潮まで湾外にも湾内にも残留せずに残り，流出する量を $Q^n{}_B$，$Q^n{}_B$ のうち引き続く上げ潮（第n回目の上げ潮）で流入せずに湾外に残留する量を $Q^n{}_{BO}$，それにその上げ潮で流入する残量（$Q^n{}_B-Q^n{}_{BO}$）のうち引き続く第（n＋1）回目の下げ潮で流出せずに湾内に残留する量を $Q^n{}_{BI}$ とおくと，それぞれ

$$Q^n{}_B=Q_B(1-P_E)^{n-1}(1-P_F)^{n-1}$$
$$=Q_B(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1} \tag{3.19}$$

$$Q^n{}_{BO}=Q^n{}_BP_E=Q_B(1-P_E)^{n-1}(1-P_F)^{n-1}P_E$$
$$=Q_B(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1}\cdot$$
$$\{1-\alpha(1-r_E)\} \tag{3.20}$$

$$Q^n{}_{BI}=Q^n{}_B(1-P_E)P_F$$
$$=Q_B(1-P_E)^{n-1}(1-P_F)^{n-1}(1-P_E)P_F$$
$$=Q_B(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1}\cdot$$
$$\alpha(1-r_E)\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\} \tag{3.21}$$

となる。無限回の潮汐の後，Q_B のうち湾外に残留した総量を $Q^t{}_{BO}$，湾内に残留した総量を $Q^t{}_{BI}$ とおくと，それぞれ

$$Q^t{}_{BO}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Q^i{}_{BO}=Q_B\frac{P_E}{P_E+P_F-P_EP_F}$$
$$=Q_B\frac{\{1-\alpha(1-r_E)\}}{r_E+r_F-r_Er_F} \tag{3.22}$$

$$Q^t{}_{BI}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Q^i{}_{BI}=Q_B\frac{(1-P_E)P_F}{P_E+P_F-P_EP_F}$$
$$=Q_B\frac{\alpha(1-r_E)\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}}{r_E+r_F-r_Er_F} \tag{3.23}$$

となる。従って Q_O の場合と同様に，

$$Q^t{}_{BO}+Q^t{}_{BI}=Q_B \tag{3.24}$$

となることも明らかである。

3) 残留量 Q_{FI} およびQ_{EO}の解析

ある時点の潮汐で湾内に残留する量 Q_{FI} 及び湾外に残留する量 Q_{EO} について考察する。前述の Q_O，Q_B の挙動から Q_{FI}，Q_{EO} は，その潮汐より以前の潮汐において新しい外海水及び新しい湾内水として流入出した海水によって構成されていることが推論される。

そこでまず（3.13）式で求められた量 $Q^n{}_{OI}$ について考察する。見方を変えていまある任意の潮汐に注目し，この潮汐を第1回目の潮汐とした場合，$Q^n{}_{OI}$ という量は，この潮汐よりn回前の潮汐で新しい外海水として流入し，いま注目している潮汐において湾内に残留する量を表わしている。従っていま注目している潮汐よりも以前の全潮汐についての $Q^n{}_{OI}$ の総和を取ったとすれば，この総和は，海水の新旧を別とすればいま注目している潮汐において湾内に残留する外海水の総量を表わすことになる。そしてその総量は（3.16）式の $Q^t{}_{OI}$ と等しい。つまり $Q^t{}_{OI}$ という量は，ある時点の潮汐に注目した場合，その潮汐より以前の全潮汐時において新しい外海水として流入し，この潮汐において湾内に残留する外海水の総量を表わすと解釈される。

同様の解釈が $Q^n{}_{OO}$ と $Q^t{}_{OO}$，$Q^n{}_{BO}$ と $Q^t{}_{BO}$ それに $Q^n{}_{BI}$ と $Q^t{}_{BI}$ についてもなされる。まとめると，ある任意の潮汐に注目し，この潮汐を第1回目の潮汐とした場合，$Q^n{}_{OO}$ はこの潮汐よりもn回前の潮汐で新しい外海水として流入し，いま注目している潮汐において湾外に残留する量を表わし，$Q^t{}_{OO}$ はいま注目している潮汐より以前の全潮汐において新しい外海水として流入し，この潮汐において湾外に残留する外海水の総量を表わす。又，$Q^n{}_{BO}$ はいま注目している潮汐よりもn回前の潮汐で新しい湾内水として流出し，この潮汐において湾外に残留する量を表わし，$Q^t{}_{BO}$ は注目している潮汐より以前の全潮汐において新しい湾内水として流出し，この潮汐で湾外に残留する湾内水の総量を表わす。又，$Q^n{}_{BI}$ は注目している潮汐よりもn回前の潮汐で新しい湾内水として流出し，この潮汐において湾内に残留する量を表わし，$Q^t{}_{BI}$ は注目している潮汐より以前の全潮汐において新しい湾内水として流出し，この潮汐で湾内に残留する湾内水の総量を表わす。従って，ある潮汐において湾内に残留する量は（$Q^t{}_{OI}+Q^t{}_{BI}$）となり，湾外に残留する量は（$Q^t{}_{OO}+Q^t{}_{BO}$）となることがわかる。

以上の解釈が正しいことは

$$Q^t{}_{OI}+Q^t{}_{BI}=Q_{FI} \tag{3.25}$$
$$Q^t{}_{OO}+Q^t{}_{BO}=Q_{EO} \tag{3.26}$$

が成り立つことを確かめれば十分である。（3.25）式は（3.5），（3.16），（3.23）式より，（3.26）式は（3.6），（3.7），（3.22）式より成り立つことが確かめられる。従ってある潮汐で湾内に残留する量 Q_{FI} 及び湾外に残留する量 Q_{EO} の構成は先に求めた4つの量 $Q^n{}_{OI}$，$Q^n{}_{BI}$，$Q^n{}_{OO}$，$Q^n{}_{BO}$ によって全て説明される。

Q_{FI} の構成を図示すると図―3のようになり，次のようにまとめられる。記述を簡単にするために次の比を定義し，交換率 r_E，r_F で表わしておく。

S_{OI}：Q_{FI} に対する $Q^t{}_{OI}$ の割合。

$$S_{OI}=\frac{Q^t{}_{OI}}{Q_{FI}}=\frac{r_E}{r_E+r_F-r_Er_F}$$

S_{BI}：Q_{FI} に対する $Q^t{}_{BI}$ の割合。

$$S_{BI}=\frac{Q^t{}_{BI}}{Q_{FI}}=\frac{r_F(1-r_E)}{r_E+r_F-r_Er_F}$$

$S^n{}_{OI}$：$Q^t{}_{OI}$ に対する $Q^n{}_{OI}$ の割合。

$$S^n{}_{OI}=\frac{Q^n{}_{OI}}{Q^t{}_{OI}}$$
$$=(r_E+r_F-r_Er_F)(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1}$$

$S^n{}_{BI}$：$Q^t{}_{BI}$ に対する $Q^n{}_{BI}$ の割合。

$$S^n{}_{BI}=\frac{Q^n{}_{BI}}{Q^t{}_{BI}}$$
$$=(r_E+r_F-r_Er_F)(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1}$$

ある潮汐で湾内に残留する量 Q_{FI} の上げ潮時の流量

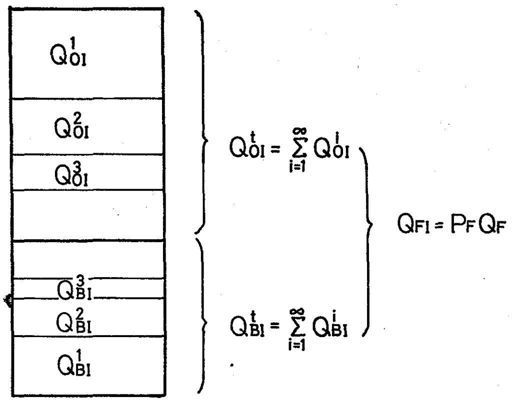

Fig. 3　Composition of Q_{FI}.

Q_F に対する割合は P_F である。Q_{FI} はそれより以前の潮汐で外海から流入した外海水の総量 Q^t_{OI} および湾内から流出した湾内水の総量 Q^t_{BI} で構成される。Q_{FI} に対する Q^t_{OI} の割合は S_{OI} であり，Q^t_{BI} の割合は $S_{BI}(=1-S_{OI})$ である。Q^t_{OI} はいま注目している潮汐より以前の各潮汐時に新しい外海水として流入した外海水によって構成される。いま注目している潮汐を1回目と数えると，これよりn回前の潮汐時に新しい外海水として流入し，この潮汐で残留する量 Q^n_{OI} の Q^t_{OI} に対する割合は S^n_{OI} である。また Q^t_{BI} は注目している潮汐より以前の各潮汐時に新しい湾内水として流出した湾内水によって構成される。いま注目している潮汐よりn回前の潮汐時に流出した新しい湾内水のうちこの潮汐で残留する量 Q^n_{BI} の Q^t_{BI} に対する割合は S^n_{BI} である。

次に Q_{EO} の構成を図―4に示す。図―4に対する説明は Q_{FI} の場合と同様であるから省略し，次の比だけを求めておく。

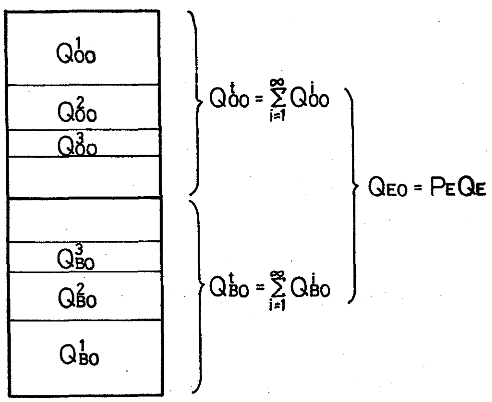

Fig. 4　Composition of Q_{EO}.

S_{OO}：Q_{EO} に対する Q^t_{OO} の割合。

$$S_{OO}=\frac{Q^t_{OO}}{Q_{EO}}=\frac{r_E(1-r_F)}{r_E+r_F-r_Er_F}$$

S_{BO}：Q_{EO} に対する Q^t_{BO} の割合。

$$S_{BO}=\frac{Q^t_{BO}}{Q_{EO}}=\frac{r_F}{r_E+r_F-r_Er_F}$$

S^n_{OO}：Q^t_{OO} に対する Q^n_{OO} の割合。

$$S^n_{OO}=\frac{Q^n_{OO}}{Q^t_{OO}}=(r_E+r_F-r_Er_F)(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1}$$

S^n_{BO}：Q^t_{BO} に対する Q^n_{BO} の割合。

$$S^n_{BO}=\frac{Q^n_{BO}}{Q^t_{BO}}=(r_E+r_F-r_Er_F)(1-r_E)^{n-1}(1-r_F)^{n-1}。$$

4. 湾内の溶存物質に対する連続の方程式

前述の解析により，交換される海水の構成が明らかになった。従って湾内の溶存物質に対する連続の方程式は構成要素の海水の濃度を用いて記述できる。

1) 保存物質の連続の方程式

まず溶存物質が保存物質である場合を考える。そして満潮時に対応する連続の方程式を求めることにする。いま注目している満潮時の湾内濃度を C_B とすると，下げ潮時の湾内水の流出量が Q_B であるから，溶存物質の流出量は Q_BC_B である。他方上げ潮による流入量は次のように求められる。前述の解析より，C^i_O をいま注目している潮汐時を1回目と数え，これより i 回前の潮汐時に新しい外海水として流入するときの海水の濃度即ち Q^i_{OI} の濃度とし，C^i_B を同じ潮汐時に新しい湾内水として流出するときの海水の濃度即ち Q^i_{BI} の濃度とすると溶存物質の流入量は，保存物質の場合濃度の減衰がないから，

$$\sum_{i=1}^{\infty}Q^i_{OI}C^i_O+\sum_{i=1}^{\infty}Q^i_{BI}C^i_B$$

となることがわかる。したがって陸水による流入量も考慮すると連続の方程式は

$$V\frac{dC_B}{dT}=\sum_{i=1}^{\infty}Q^i_{OI}C^i_O+\sum_{i=1}^{\infty}Q^i_{BI}C^i_B-Q_BC_B+D \qquad (4.1)$$

となる。ここにVは湾水量，Tは1潮汐周期を単位とした時間，Dは陸水の流入と共に湾内に流入する物質の1潮汐当りの総量である。また $C^1_O=C_O$，$C^1_B=C_B$ である。

(4.1) 式を解くために

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q^i{}_{OI}C^i{}_O=\beta Q_F C_O \qquad (4.2)$$

$$Q_B C_B-\sum_{i=1}^{\infty} Q^i{}_{BI}C^i{}_B=\gamma Q_E C_B \qquad (4.3)$$

と表わせるような定数 β, γ が存在すると仮定する。(4.2) 式は1潮汐周期間に外海水に含まれて溶存物質が湾内に流入する量を表わし，(4.3) 式は内湾水に含まれて湾外に流出する量を表わしている。そこで β を溶存物質に対する外海水の内側への交換率 (inward exchange ratio)，γ を湾内水の外側への交換率 (outward exchange ratio) と呼ぶことにする。そのとき (4.1) 式は

$$V\frac{dC_B}{dT}=\beta Q_F C_O-\gamma Q_E C_B+D \qquad (4.4)$$

と表わせる。いま外海水の濃度 C_O および陸水からの流入量Dが一定であると仮定すると，(4.4) 式の解は

$$C_B=\{C^1{}_B-\frac{1}{\gamma Q_E}(\beta Q_F C_O+D)\}\, e^{-\frac{\gamma Q_E}{V}T}+\frac{1}{\gamma Q_E}(\beta Q_F C_O+D) \qquad (4.5)$$

のように求めることができる。ここに $C_B{}^1$ は初期濃度である。

したがって残る問題は (4.2)，(4.3) 式より交換率 β, γ を求めることである。まず β の値は，外海水の濃度 C_O は常に一定であると仮定すると

$$C^i{}_O=C_O \qquad (4.6)$$

であるから，

$$\beta Q_F C_O=\sum_{i=1}^{\infty} Q^i{}_{OI}C^i{}_O=C_O\sum_{i=1}^{\infty} Q^i{}_{OI}=C_O Q^t{}_{OI}$$

となり，(3.16) 式を用いて

$$\beta=\frac{Q^t{}_{OI}}{Q_F}=\frac{r_E P_F}{P_E+P_F-P_E P_F}=\frac{r_E\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}}{r_E+r_F-r_E r_F} \qquad (4.7)$$

と求められる。

他方 (4.3) 式のように表わせる定数 γ は (4.5) 式から明らかなように一般には存在せず，求めることはできない。しかし次に示す2つの場合には近似的に求めることができる。

a) $\frac{\gamma Q_E}{V}\ll 1$ の場合

この条件は湾内濃度の時間変化が非常に小さい場合に相当し，湾水量に比して下げ潮時の流出量が非常に小さい湾に適用される。この場合には (4.5) 式より近似的に

$$C^i{}_B=C_B \qquad (4.8)$$

とおけることがわかる。これを (4.3) 式に代入し，(3.24) 式を用いると

$$\gamma Q_E C_B=(Q_B-\sum_{i=1}^{\infty} Q^i{}_{BI})C_B=Q^t{}_{BO}C_B$$

となる。したがって γ の値は (3.22) 式を用いて

$$\gamma=\frac{Q^t{}_{BO}}{Q_E}=\frac{r_F P_E}{P_E+P_F-P_E P_F}=\frac{r_F\{1-\alpha(1-r_E)\}}{r_E+r_F-r_E r_F} \qquad (4.9)$$

と求められる。

ここで陸水による流入量Dを考慮しないとき，(4.7)，(4.9) を用いて (4.4) 式は

$$V\frac{dC_B}{dT}=r_G\overline{Q}(C_O-C_B)-R\left\{\frac{r_E-r_F}{r_E+r_F-r_E r_F}\cdot\frac{C_O-C_B}{2}+\frac{C_O+C_B}{2}\right\}$$

と変形できる。ここに $r_G=r_E r_F/(r_E+r_F-r_E r_F)$, $\overline{Q}=(Q_F+Q_E)/2$, $R=Q_E-Q_F$ である。

これは明らかに柏井の提示した (2.8) 式と同じである。したがって (2.8) 式は正確には $\gamma Q_E/V\ll 1$ の場合に成り立つ式であることがわかる。その理由は，(2.8) 式を導く際に (2.2) および (2.4) 式における濃度 C_E と C_F がそれぞれ等しいとおくことと，湾内水の濃度変化が非常に小さいとして (4.8) 式を用いることが同じ条件になっているからである。(2.8) 式と (4.4) 式における連続の方程式の表現の違いは，柏井は海水交換率と拡散係数との関連を考察するために，平均交流量に対する海水交換率として1つの交換率 r_G を定義したのに対し，筆者らは (4.2)，(4.3) 式に示したように陸水の影響をも含めた実質的な溶存物質の交換量を表わす2つの交換率 β および γ を定義したためである。したがって陸水の流入量がない場合つまり $R=0$ したがって $Q_E=Q_F$ したがって $\alpha=1$ の場合には $\beta=\gamma=r_G$ の関係がある。

b) $\frac{1}{\gamma Q_E}(\beta Q_F C_O+D)\ll C_B$ の場合

これは湾内水の濃度が外海水の濃度に比して非常に

大きく且つ陸水による物質の流入量の湾内水の濃度におよぼす影響が非常に小さいときに相当し，湾内の濃度変化が無視できない場合である。このときには（4.5）式より近似的に

$$C_B^i = C_B e^{-\frac{\gamma Q_E}{V}T}\Big|_{T=-(i-1)} = C_B e^{\frac{\gamma Q_E}{V}(i-1)} \qquad (4.10)$$

とおくことができる。（3.21）式を用いると，

$$Q_B C_B - \sum_{i=1}^{\infty} Q'_{BI} C'_B = Q_B C_B \cdot \left\{1 - \frac{(1-P_E)P_F}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{\frac{\gamma Q_E}{V}}}\right\}$$

$$= r_F Q_E C_B \left[1 - \frac{\alpha(1-r_E)\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}}{1-(1-r_E)(1-r_F)e^{\frac{\gamma Q_E}{V}}}\right]$$

となる。従って（4.3）式より

$$\gamma = r_F \left\{1 - \frac{(1-P_E)P_F}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{\frac{\gamma Q_E}{V}}}\right\}$$

$$= r_F \left[1 - \frac{\alpha(1-r_E)\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}}{1-(1-r_E)(1-r_F)e^{\frac{\gamma Q_E}{V}}}\right] \qquad (4.11)$$

を得る。γ の値は（4.11）式より求められるが，右辺にも γ を含んでいるので計算は少しめんどうである。

2） 非保存物質の連続の方程式

ここで取り扱う非保存物質は次のような特性をもつと仮定する。

i） 減衰定数は λ である。したがって初期濃度を C^0 とすると

$$C = C^0 e^{-\lambda T} \qquad (4.12)$$

に従って濃度が減少するような物質である。

ii） 外海での濃度 C_0 は一定である。つまり外海には濃度を一定に保つような機構が存在し，海水が外海にあるかぎりは濃度が一定であると仮定する。しかし海水交換によっていったん新しい外海水として流入してからは（4.12）式に従って減衰するものと考える。

このような非保存物質の満潮時に対応する連続の方程式を求めることにする。

溶存物質の下げ潮時の流出量は保存物質の場合と同様で $Q_B C_B$ である。しかし上げ潮時の流入量については減衰を考慮しなければならない。Q'_{0I} はいま注目している潮汐より i 回前の潮汐時の外海水であるから，流入したときの濃度は C'_0 であるが，いま注目しているいる満潮時にはその濃度は $C'_0 e^{-\lambda(i-\frac{1}{2})}$ に減衰している。また Q'_{BI} の濃度は流出したときには C'_B であるが，いま注目している上げ潮後の満潮時には $C'_B e^{-\lambda i}$ に減衰している。したがって流入量は

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{0I} C'_0 e^{-\lambda(i-\frac{1}{2})} + \sum_{i=1}^{\infty} Q'_{BI} C'_B e^{-\lambda i}$$

となる。さらに湾内での減少量 $\lambda(V-Q_B)C_B$ と陸水による流入量Dを考慮すると連続の方程式は

$$V\frac{dC_B}{dT} = \sum_{i=1}^{\infty} Q'_{0I} C'_0 e^{-\lambda(i-\frac{1}{2})} + \sum_{i=1}^{\infty} Q'_{BI} C'_B e^{-\lambda i} - Q_B C_B - \lambda(V-Q_B)C_B + D \qquad (4.13)$$

となる。ここでも保存物質の場合と同様に

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{0I} C_0 e^{-\lambda(i-\frac{1}{2})} = \zeta Q_F C_0 \qquad (4.14)$$

$$Q_B C_B - \sum_{i=1}^{\infty} Q'_{BI} C'_B e^{-\lambda i} = \eta Q_E C_B \qquad (4.15)$$

と表わせるような定数 ζ，η が存在すると仮定し，ζ を非保存物質の内側への交換率（inward exchange ratio）また η を外側への交換率（outward exchange ratio）と呼ぶことにする。そのとき（4.13）式は

$$V\frac{dC_B}{dT} = \zeta Q_F C_0 - \eta Q_E C_B - \lambda(V - r_F Q_E)C_B + D$$

$$= \zeta Q_F C_0 - \{(\eta - \lambda r_F)Q_E + \lambda V\}C_B + D \qquad (4.16)$$

と表わせる。（4.16）式の解は

$$C_B = \left[C'_B - \frac{\zeta Q_F C_0 + D}{\{(\eta-\lambda r_F)Q_E + \lambda V\}}\right] \cdot e^{-\{\frac{(\eta-\lambda r_F)Q_E}{V}+\lambda\}T} + \frac{\zeta Q_F C_0 + D}{(\eta-\lambda r_F)Q_E + \lambda V} \qquad (4.17)$$

となる。ここに C'_B は初期濃度である。

この場合も保存物質の場合と同様に，（4.15）式を満足するような定数 η は一般には存在しない。しかし，保存物質の場合と同様な次の2つの場合に対しては近似的に η の値を求めることができる。

a） $\{\frac{(\eta-\lambda r_F)Q_E}{V}+\lambda\} \ll 1$ の場合

このときには (4.17) 式より近似的に

$$C'_B=C_B \tag{4.18}$$

とおくことができる。(3.21) 式を用いると

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{Bi}C'_Be^{-\lambda i}=C_B\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{Bi}e^{-\lambda i}$$

$$=C_BQ_B\frac{(1-P_E)P_F}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{-\lambda}}$$

となる。従って (4.15) 式より

$$\eta=r_F\left\{1-\frac{(1-P_E)P_Fe^{-\lambda}}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{-\lambda}}\right\} \tag{4.19}$$

を得る。さらにこの場合には $\lambda \ll 1$ であるから，結局

$$\eta=\frac{r_FP_E}{P_E+P_F-P_EP_F}=\frac{r_F\{1-\alpha(1-r_E)\}}{r_E+r_F-r_Er_F} \tag{4.20}$$

となる。

ζについては仮定より

$$C'_0=C_0 \tag{4.21}$$

であるから，(3.13) 式を用いて

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{0i}C'_0e^{-\lambda(i-\frac{1}{2})}$$

$$=C_0\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{0i}e^{-\lambda(i-\frac{1}{2})}$$

$$=C_0r_EQ_F\frac{P_Fe^{-\frac{1}{2}\lambda}}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{-\lambda}}$$

となる。したがって (4.14) 式より

$$\zeta=\frac{r_EP_Fe^{-\frac{1}{2}\lambda}}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{-\lambda}}$$

$$=\frac{r_E\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{-\lambda}} \tag{4.22}$$

を得る。この場合さらに $\lambda \ll 1$ であるから

$$\zeta=\frac{r_EP_F}{P_E+P_F-P_EP_F}=\frac{r_E\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}}{r_E+r_F-r_Er_F} \tag{4.23}$$

となる。

したがって $\{(\eta-\lambda r_F)Q_E/V+\lambda\} \ll 1$ の場合の交換係数ζおよびηの値はそれぞれ (4.23)，(4.20) 式によって求められる。これらの交換系数ζおよびηの値は，同様の条件下での保存物質の交換係数βおよびγの値 (4.7)，(4.9) 式とそれぞれ同じである。

b）$\dfrac{\zeta Q_FC_0+D}{(\eta-\lambda r_F)Q_E+\lambda V} \ll C_B$ の場合

このときには (4.17) 式より近似的に

$$C'_B=C_Be^{-\{\frac{(\eta-\lambda r_F)Q_E}{V}+\lambda\}T}\Bigg|_{T=-(i-1)}$$

$$=C_Be^{\{\frac{(\eta-\lambda r_F)}{V}Q_E+\lambda\}(i-1)} \tag{4.24}$$

とおくことができる。(3.21) 式より

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q'_{Bi}C'_Be^{-\lambda i}$$

$$=r_FQ_EC_B\frac{(1-P_E)P_Fe^{-\lambda}}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{\frac{(\eta-\lambda r_F)}{V}Q_E}}$$

となる。したがって (4.15) 式より

$$\eta=r_F\left\{1-\frac{(1-P_E)P_Fe^{-\lambda}}{1-(1-P_E)(1-P_F)e^{\frac{(\eta-\lambda r_F)}{V}Q_E}}\right\}$$

$$=r_F\left[1-\frac{\alpha(1-r_E)\{1-\frac{1}{\alpha}(1-r_F)\}e^{-\lambda}}{1-(1-r_E)(1-r_F)e^{\frac{(\eta-\lambda r_F)}{V}Q_E}}\right] \tag{4.25}$$

を得る。

ζの値はa）の場合と同様であるが，近似する以前の (4.22) 式より求められる。

5. 結　論

交流口を通じて外海と接続する内湾の長期的な水質汚濁予測を行うために，湾内の溶存物質に対する連続の方程式を，交換される海水の歴史的な構成過程を海水交換率 r_E および r_F を用いて解析し，導いた。従ってこの連続の方程式を解くには，過去の潮汐時における湾内水の濃度を必要とするため，一般には解くことができない。しかし

1）湾水量に比して下げ潮時の流出量が非常に小さい場合
2）湾内水の濃度が外海水の濃度に比して非常に大きく且つ陸水からの物質の流入量が非常に少ない場合

の2つの場合には，連続の方程式を2つの交換率βおよびγを定義することにより

$$V\frac{dC_B}{dT}=\beta Q_FC_0-\gamma Q_EC_B+D$$

の形に表現し，βおよびγの値をそれぞれの場合に対して近似的に求めた。交換率βは上げ潮時の流量に対

する交換に有効な外海水の流入量のしめる割合を表わし，γ は下げ潮時の流量に対する交換に有効な湾内水の流出量のしめる割合を表わしている。

次にこの解析は非保存物質に対しても有効であることを示し，非保存物質に対する２つの交換率 ζ，η を定義した。

また解析の過程で交換率 r_E および r_F の値は次のように制約されることも示した。

$$1-\alpha<r_F<1,\quad 1-\frac{1}{\alpha}<r_E<1。$$

参考文献

1）Parker, D. S., Norris, D. P. and Nelson, A. W.：Tidal exchange at Golden Gate, Proc. of ASCE, Vol. 98, SA 2, pp. 305〜323, 1972.

2）柏井誠：潮汐による海水交換率について―その１―海水交換の概念と海水交換率，1977年度日本海洋学会春季大会講演要旨集，pp. 96〜97, 1977.

3）松本輝寿・金子安雄・寺尾健・川島毅：海水交流に関する現地観測，第21回海講論文集，pp. 291〜296, 1974.