

# 電気回路から見た 電磁気学

Electromagnetics as viewed from Electric Circuit

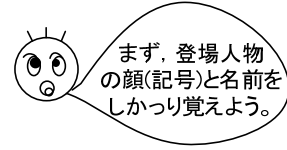
令和3年

辻 峰男

(初版 平成31年)

# 電磁気学の世界地図

- $E(\mathbf{r}, t)$  : 電界, 電場, 電界の強さ [V/m]  $\Rightarrow$  電気力線
- $D(\mathbf{r}, t)$  : 電束密度 [C/m<sup>2</sup>]  $\Rightarrow$  電束線
- $H(\mathbf{r}, t)$  : 磁界, 磁場, 磁界  $H$ , 磁界の強さ [A/m]  $\Rightarrow$  磁力線
- $B(\mathbf{r}, t)$  : 磁束密度, 磁界 [T] または [Wb/m<sup>2</sup>]  $\Rightarrow$  磁束線
- $i(\mathbf{r}, t)$  : 伝導電流密度, 自由電流密度, 真電流密度 [A/m<sup>2</sup>] \*
- $\rho(\mathbf{r}, t)$  : 自由電荷密度, 真電荷密度 [C/m<sup>3</sup>],  $\sigma(\mathbf{r}, t)$  : 面自由電荷密度 [C/m<sup>2</sup>] \*\*



\* 本テキストでは真空中や気体中の電荷の運動による対流電流(携帯電流)は考えない。  
 \*\* 通常, 自由電荷は真空中, 気体中, 導体表面にあり, 絶縁体中, 導体中の  $\rho$  は 0 である。

電荷保存の法則:  $\text{div } i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$   $I(t) = \int_S i \cdot n \, dS$  (開曲面)  $n$  は電流を測る向き ①

マクスウェルの方程式:

(ガウスの法則)  $\text{div } D = \rho$  ①  $\int_S D \cdot n \, dS = \int_V \rho \, dV = Q(t)$  [C] (閉曲面) ①'

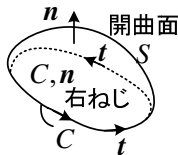
(磁束の保存則)  $\text{div } B = 0$  ②  $\int_S B \cdot n \, dS = 0$  (閉曲面) ②'

(アンペア-マクスウェルの法則)

$\text{rot } H = i + \frac{\partial D}{\partial t}$  ③  $\int_C H \cdot t \, dl = \int_S (i + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot n \, dS$  (開曲面) ③'

(ファラデーの法則)

$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$  ④  $V_e(t) = \int_C (E + v \times B) \cdot t \, dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n \, dS + \int_C (v \times B) \cdot t \, dl = -\frac{d\phi}{dt}$  ④'



閉路 C で線積分 変圧器起電力 速度起電力 (開曲面)

$V_e$  : 閉路 C の向きに測る起電力 [V],  $\phi(t) = \int_S B \cdot n \, dS$  : 磁束 [Wb]

$v(\mathbf{r}, t)$  : 閉路 C の速度 (C 上の点ごとに違う),  $n$  は磁束を測る向き

ローレンツ力:  $F = q(E + v \times B)$  ⑤

$F$  : 電荷  $q$  [C] の微小粒子に働く力 [N],  $v$  : 電荷  $q$  の速度 [m/s]

物質の式 (近似):  $D = \epsilon E$   $\epsilon$  [F/m] : 誘電率 (真空中  $\epsilon_0$ ) ⑥

$B = \mu H$   $\mu$  [H/m] : 透磁率 (真空中  $\mu_0$ ) ⑦

$i = \kappa(E + v \times B + E_e)$   $\kappa$  [S/m] : 導電率 (真空中 0) オームの法則 ⑧

ただし,  $E = E_c + E_b$ ,  $E_{nc} = E_b + v \times B + E_e$  ⑨

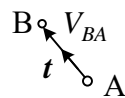
$E$  : 電界 ④, ④', ⑤, ⑥の  $E$  も同じ

$E_c(\mathbf{r}, t)$  : クーロン電界 ( $\text{rot } E_c = 0$ ,  $E_c$  の閉路での線積分は 0, 電圧を作る)

$E_b(\mathbf{r}, t)$  : 誘導電界,  $E_{nc}$  : 非クーロン電界 (起電力を作る)

$v \times B$  : 磁界中の運動による等価な電界,  $E_e$  : 電池の等価な電界

A から見た B の電圧

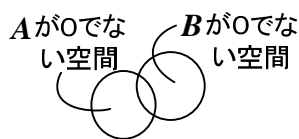


起電力:  $V_e(t) = \int_C E_{nc} \cdot t \, dl$ , 電圧:  $V_{BA}(t) = -\int_A^B E_c \cdot t \, dl$  ⑩

⑩の起電力は④'より一般的( $E_e$ 考慮分)で,  $C$ は閉路,  $t$ は起電力と電圧を測る向き  
 これらの式は, ①~⑩, ①' ~④' の番号で本文中に引用する。

このテキストを読むうえで、常に記憶にとどめて欲しいことをまとめておく。

- **ベクトル量**：肉太で書いた量  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{i}$  は、ベクトル量である。これらは、一般に場所（3次元空間  $(x, y, z)$ ）と時間  $t$  の関数である。 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  や  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  などが詳しい書き方である。 $\mathbf{r}$  は位置ベクトルで座標を表す。たとえ図に同じ記号で  $\mathbf{E}$  と書いてあっても、場所と時間によって値は異なると考えなくてはならない。ベクトル量は向きと大きさを持ち、3つのスカラー量で表すことができる。 $\mathbf{E} = (E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t))$  が詳しい書き方である。面倒なので適当に簡略化して  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  などと書くことが多いから、本来の意味を忘れないようにしよう。
- **スカラー量**：肉太でない量  $\rho$  (電荷密度) はスカラー量でスカラ場を作る。すなわち、場所と時間  $t$  の関数で本来  $\rho(x, y, z, t)$  や  $\rho(\mathbf{r}, t)$  のように書くべきものである。スカラー量は正負の値をもつ。ベクトル量の成分  $E_x$  などにも正負の値をもちスカラ場を作る。また、ベクトル量の大きさは、絶対値を使って表す。例えば、 $E = |\mathbf{E}|$  の様に、 $|\mathbf{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$  であり、必ず正または 0 の値をもつ。これもスカラー量でスカラ場を作り、場所と時間によって値は異なる。
- **矢印の注意**：ベクトル場  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{i}$  などを表す場合の矢印は実際の向きで測定の向きという考え方はない。実際の向きが変化するとき適当に  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{i}$  と矢印を図に書くこともあるが、これはイメージのためである。これに対し、起電力  $V_e(t)$ 、電位  $V(\mathbf{r}, t)$ 、電圧  $V(t)$ 、電流  $I(t)$ 、磁束  $\phi(t)$  と一緒に書く矢印はベクトルでなく、自由に選べる測定の向き（正方向）を表す。 $V_e, V$  は線積分で、 $I, \phi$  は面積分で定義され、それぞれの接線ベクトル  $\mathbf{t}$  や法線ベクトル  $\mathbf{n}$  に相当する（それぞれ 2通りの選び方が可能なのでどちらに選んだかを示す）。これらは電気回路で用いられる矢印と同じ意味がある。また、座標軸の矢印も測定の向きである。例えば、 $E_x$  は  $x$  軸の矢印の向きに測った値を意味する。式にマイナスがつく理由を知るとき図中で測定のための矢印は必ず必要である。
- **ベクトル場の加算**： $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$  は、 $\mathbf{A}$  の矢印と  $\mathbf{B}$  の矢印を加えると  $\mathbf{C}$  の矢印になると単純に考えるだけではない。電磁気でこのような式があれば、空間のすべての点で、そしてどの時間においても、各点ごとにこの関係が成り立つことを意味する。広い世界の関係式である。



$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

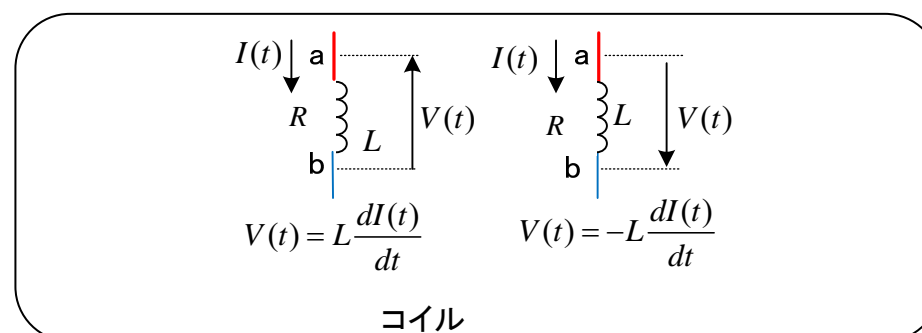
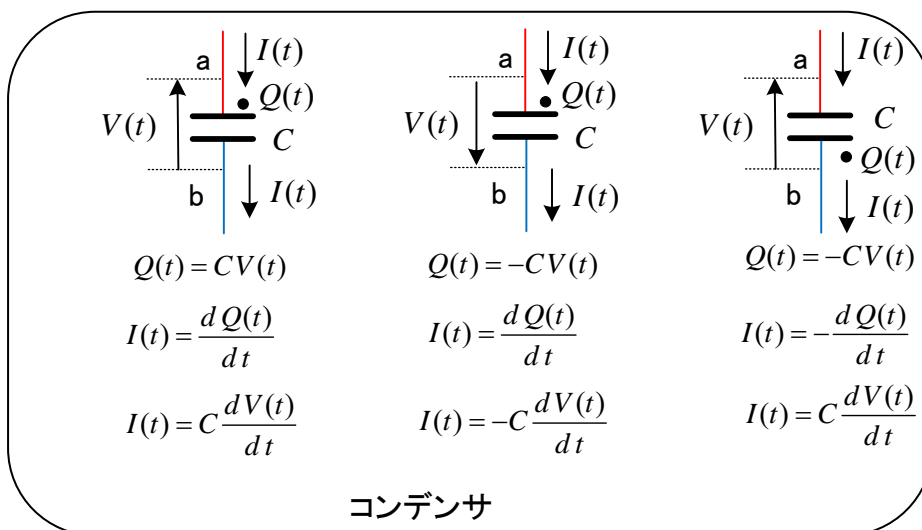
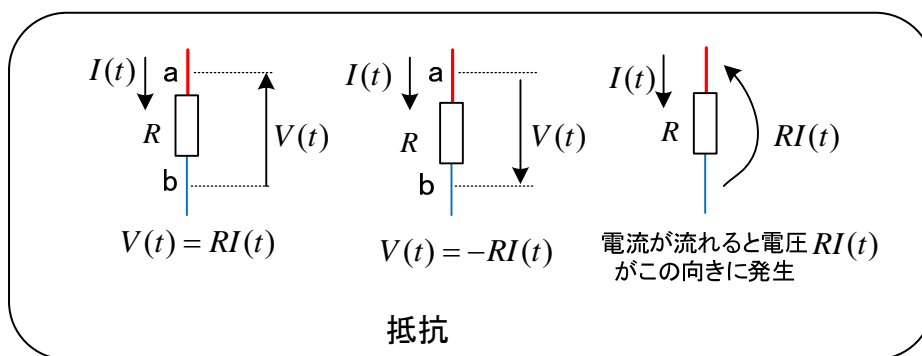
のとき、実際に加えるのはどちらも0でない空間だけで他では  $\mathbf{C}$  は  $\mathbf{A}$  だけ、 $\mathbf{B}$  だけあるいは0の値をもつ。共通の空間がないときもある。

- **スカラ場の加算**：電荷密度  $\rho(x, y, z, t) = \rho_1(x, y, z, t) + \rho_2(x, y, z, t)$  の意味は、各点で時間ごとにこれらの関係が成り立つことを意味し、広い意味がある。1+2=3 のような単純な話ではない。省略した表現  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  で書いてあったら、1+2=3 の世界で考えてしまう人はいないだろうか。
- **記号の定義**：使う記号はいつも同じとは限らない。例えば、電界  $\mathbf{E}$  と書いても、大きさ  $E = |\mathbf{E}|$  の意味なら負にならないが、電界が  $x$  軸方向成分しかなく  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (E, 0, 0)$  すなわち  $E = E_x$  なら  $E$  は負になることがある。また、同様に磁界が  $\phi$  方向成分しかなく、円柱座標系で  $\mathbf{H} = (H_r, H_\phi, H_z) = (0, H, 0)$  なら  $H$  は負になることがある。このように1つの成分しかなく、図中に  $\mathbf{E}$  や  $\mathbf{H}$  と矢印が書いてあれば、その矢印が測定の向き（座標の向き、正方向ともいう）を意味し、電圧や電流につける矢印と同じ意味になる。理論では一般的な  $\mathbf{E}$  や  $\mathbf{H}$  と書いても、演習問題では簡単のため3次元の問題を1次元の  $E = E_x$  または  $H = H_\phi$  だけの問題として考えることが多い。

## 電圧や電流の矢印(=測定の向き)の向きが違うと式が違う!

電気回路では以下のように説明され、電磁気学でさらに詳しく学ぶ。

- 交流の電圧が正負に変化することは誰でも知っている。だけど、どのような状態が正で、どのような状態が負であるか説明できるだろうか? 矢印で測定の向き(正方向)を決めると正負が決まる。
- 電圧  $V(t)$  の矢印は、矢の先端の電位から矢の根の電位を引いた量を意味する。
- 電流  $I(t)$  の矢印は、実際にその向きに電流が流れている(正電荷がその向きに動いている)ことを意味するのではなく、 $I(t)$  をその矢印の向きに動いている正電荷の量として測定することを意味する。従って、正電荷が矢印の向きに移動していれば  $I(t)$  の値は正、矢印と逆向きに移動していれば負となる(実際に動く電子の移動は正電荷と逆である)。電荷  $Q(t)$  はどちらの極板の値か・印で示す。
- 電圧や電流の矢印は自分の好きな向きに選んでよい。電圧と電流の矢印を逆向きに選ぶと、式にマイナスがつかない。このテキストで書く電圧や電流の矢印は測定の向きで、実際の向きとは限らない。



## まえがき

電磁気学では3次元空間と時間の変化を考えないといけない。このためいろいろと難しそうな式が出てきて、見ただけで不安に思う学生も多いだろう。これまで長年電気回路の講義を担当してきたが、電磁気学の入門として、自分なりの構成や説明で、疑問が解けずに悩んでいる学生に少しでも役に立つテキストが書けないかと思い立ち筆を執ることにした。このために、下記の点を特徴としてまとめることにした。

- 電気回路を通して電磁気学を見る。つまり、抵抗、コンデンサ、コイルを通して電磁気学を考えていくことで、理解を得やすくする。
- 電磁気学の教科書は真空のクーロンの法則より始めることが多い。この場合、次々にいろいろな式が出てくるが、その前提条件を考えて適用しないといけないので、前提が成り立たない場合どうすればよいか困るかもしれない。例えば、静電界で習うクーロンの法則や電位は時間的に変化しない静電界だけでしか役立たないのか気になるであろう。そこで、本稿では、電磁気学の根本となるマクスウェルの方程式から始める。これにより、問題を解くときの前提条件も自ずと明らかになるだけでなく、本稿の目的である工学的問題への応用を考えると便利である。またいろいろの公式も整理されたものになるから覚えるのも楽であろう。本稿の進め方をたとえて言うなら、まず世界地図を見せてから、次に各国のことを詳しく話すということである。順番が逆だと、自分の立ち位置が見えないので、整理がつきにくいだろう。そして世界地図は最初完全に理解しなくても全く構わない。国の勉強をするとき繰り返し見るうちに、だんだん理解が深まる。クーロンの法則からスタートして電磁気学を勉強した人は、整理の意味でこのテキストを活用することもできるだろう。
- マクスウェルの方程式からスタートする場合の問題点は、高校で見たことのない記号  $\text{rot}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$  などが初めから出てくることにある。しかし、これらの数学なしに大学レベルの電磁気学は説明しにくいので、クーロンの法則より始める場合でも、いずれ学ぶことになる。そこで本稿では、まず第1章で、これらの数学の利用の仕方を説明する。そして記憶に残るように、またイメージがわくようにたとえ話を時々入れることにした。
- 電磁気学の全領域をまんべんなくカバーするのではなく、根本的な話、面白い話を選ぶ。できるだけ少ないページ数で初心者レベルから大学レベル程度の内容まで伝えたい。この際、これまでの教科書で説明が十分でないと感じられるテーマに関し独自の解釈を試みている（例えばクーロン電界）。
- 電気回路も電磁気学も共に基礎科目として重要であるが、両科目で言葉が統一されていないものがある。例えば、回路で使う電圧の矢印が電磁気学では無視され、高校の教科書と同じように両端に矢をつけた教科書を見ることがある。これではどの点の電位を基準にしているか図から判断できないので符号で悩むことになる。実用上、電圧は片方に矢をつけて定義し、基準となる点を明確にしている。また、定常という言葉も回路と電磁気では意味が違う。これについてはたとえ交流の場合でも過渡現象が終わったならば定常状態（回路の定義）とよぶことに統一する。オームの法則は表現が違うが、混乱はないと思うのでそのまま使用する。

電磁気学の教科書は多く出版されているが、“電気回路から見た電磁気学”という変わったタイトルの本は恐らく世界中探してもないであろう。電気回路で扱う現象は電磁気学で扱う現象の一部である。ところが、抵抗  $R$ 、静電容量  $C$ 、インダクタンス  $L$  によって電磁気学の現象がかなり説明できる。さらに分布定数回路まで考えると電磁波のことも多少理解できるようになる。電気回路を通して電磁気学を眺めることで、電磁気学が分りやすくなったと感じられたら幸いである。

# 電気回路から見た電磁気学

Electromagnetics as viewed from Electric Circuit

## 目次

	ページ
第1章 ベクトルの演算と意味	1–19
第2章 電磁気学の世界地図	20–48
第3章 電源と抵抗	49–63
第4章 コンデンサ	64–102
第5章 コイル I	103–144
第6章 コイル II	145–179
第7章 電磁波 –空間に分布した回路–	180–219
文献	220
付録	
○ 単位	
○ ベクトルの公式	
○ 座標系	
○ ヘルムホルツの定理	
○ 分布定数回路の過渡現象	
○ 電磁界の数値計算法	
謝辞・著者紹介	
索引	

# 第1章 ベクトルの演算と意味

この章では、電磁気を学ぶときに必要となる数学をまとめて示しておく。一般にはベクトル解析とよばれる分野の公式である。高校までの微分と積分の知識で理解できるように書いたつもりで、最初から順に読んでいけば見かけほどは難しくない。電磁気学を考えるときには、常にスカラー場やベクトル場を思っていないといけない。

## スカラー場とベクトル場

まず、スカラー場とベクトル場について話そう。空気中の温度の分布は、場所によって値が異なり(負になることもある)、スカラー場の一例である。風速は場所(高さも含め)によって大きさが異なると同時に、その向きも違うのでベクトル場の一例である。このように、空間の至る所にスカラー量(1つの実数値)、ベクトル量(3つの実数値)が各点ごとに値を持って分布しているとき、それぞれスカラー場(scalar field)、ベクトル場(vector field)という。電磁気学で学ぶ電界や磁界は、大きさだけでなく向きをもつので、ベクトル場を構成する。

3次元空間を直角座標系で考えると、座標 $(x, y, z)$ の点Pに存在するベクトル量は、図1-1に示すように

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \\ &= (A_x, A_y, A_z) \end{aligned} \tag{1-1}$$

と表すことができる。 $A_x, A_y, A_z$ の目盛(単位)と $x, y, z$ の目盛(単位 m)は違う。ここで、 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ はそれぞれ $x, y, z$ の増える向きの単位ベクトル(大きさ1)である。 $A_x, A_y, A_z$ はそれぞれ実数で負になることもある。ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさを次式で表す。

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1-2}$$

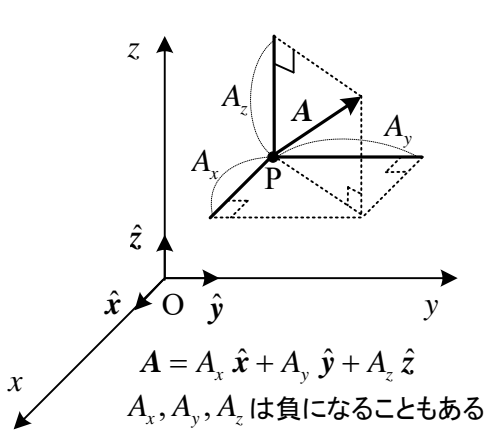


図1-1 点 $P(x, y, z)$ にあるベクトル量の表現

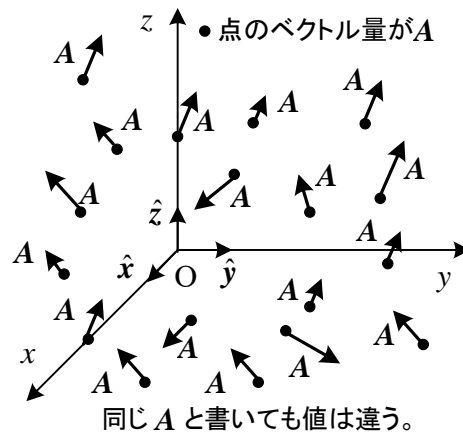


図1-2 ベクトル場(3次元空間)  
電磁気ではこの図をいつもイメージしよう!

ベクトル  $\mathbf{A}$  について、以下のことを知っておこう。

① ベクトルは大きさと向きで決まるから、(1-1)のように3つの成分で表すことができる。各成分はスカラー量であり、正負がある。1つのベクトル量は3つのスカラー量からなる。

② ベクトル  $\mathbf{A}$  は、電磁気の場合、P点の座標  $(x, y, z)$  と時間  $t$  の関数になり

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z, t)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z, t)\hat{\mathbf{z}} \quad (1-3)$$

と書くことがある。つまり、場所によって、また時間によって値が違ふ。

また、P点の位置ベクトル  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  を用いて

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_x(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{x}} + A_y(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{y}} + A_z(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{z}} \quad (1-4)$$

と書くこともある。簡単のため、あるいは注目しない  $\mathbf{r}$  や  $t$  を省くこともある。

③  $\mathbf{A}$  は空間に分布してベクトル場となるが、大きさ  $|\mathbf{A}|$  や成分  $A_x$  などは1つの量なのでスカラー場を構成する。

④  $\mathbf{A}$  のベクトル場を視覚的に表現する方法として、図1-2の様に3次元空間に適当に間引いて矢印を書く方法と、図1-3の様に力線を描く方法がある。矢印を書く方法で、 $\mathbf{A}$  は場所と時間によって値が異なるが、区別して書くのは面倒だから、普通は同じ記号で  $\mathbf{A}$  と書いている。ベクトル場の矢印は実際の向きを表す。回路で電圧や電流（いずれもスカラー量）に付ける矢印は測定の向きを示し、意味が違ふ。図1-2はイメージを得るためのもので、正式に書くなら、ある断面の2次元平面で格子点ごとに矢印を書く。

力線(line of force)について、以下に述べる。

- (1) 力線の接線方向が  $\mathbf{A}$  の方向で、曲線につけた矢印で  $\mathbf{A}$  の向きを表す。ベクトル場は3次元なので力線も3次元空間に書くべきであるが、複雑になるから、ある断面を考えて2次元で表示するのが一般的である。方向は直線の状態、向きには矢印がつく。
- (2) 力線の密度（混み具合）で  $\mathbf{A}$  の大きさを表す。

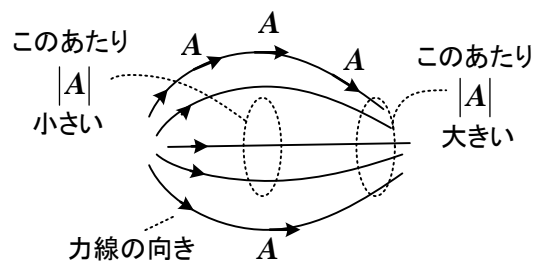


図1-3 力線によるベクトル場  $\mathbf{A}$  の表現例

### 基本的なベクトル演算の定義及び定理

必要に応じて、以下のベクトルを用いる。電磁気の場合は場所の関数だから動かさない。

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{C} = C_x\hat{\mathbf{x}} + C_y\hat{\mathbf{y}} + C_z\hat{\mathbf{z}} \quad \text{とする。}$$



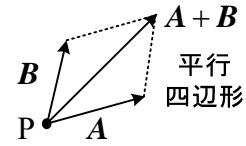
(1) 加法, 減法, スカラとベクトルの乗法

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} \equiv (A_x \pm B_x)\hat{x} + (A_y \pm B_y)\hat{y} + (A_z \pm B_z)\hat{z} \quad (1-5)$$

$$a\mathbf{A} \equiv aA_x\hat{x} + aA_y\hat{y} + aA_z\hat{z} \quad (1-6)$$

ただし,  $a$  はスカラ (場でない).  $\equiv$  は定義を表す.

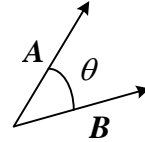
電磁気の場合, 通常同じ点  $P$  でのベクトルを加えないと意味がないであろう.



(2) 内積またはスカラ積(scalar product)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &\equiv |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1-7)$$

ただし,  $\theta$  は  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  のなす角である.



$\theta$  は  $\pi/2$  以上でも構わない. このとき内積は負となる.  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  が直交する必要十分条件は,  $\theta = \pi/2$  だから

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-8)$$

である. 内積には以下の性質がある.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \quad (1-9)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-10)$$

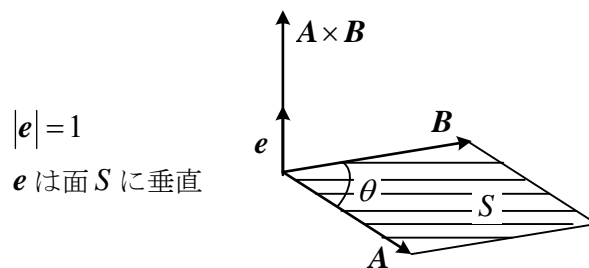
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-11)$$

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) \quad (1-12)$$

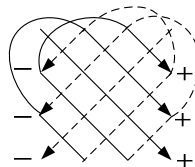
(3) 外積またはベクトル積(vector product)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &\equiv (|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta)\mathbf{e} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z} \end{aligned} \quad (1-13)$$

ただし,  $\theta$  は  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  のなす角で  $0 \leq \theta \leq \pi$  とする. また,  $\mathbf{e}$  は,  $\mathbf{A}$  を回転させて  $\mathbf{B}$  に重ねるとき, 右ねじの進む向きをもつ単位ベクトルである.



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-14)$$



と書くこともある. 2つのベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の作る平行四辺形の面積  $S$  は, 絶対値をとって

$$S = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \quad (1-15)$$

である。また、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が平行であるための必要十分条件は  $\theta = 0$  だから

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

となる。 $\mathbf{0}$  は全ての成分が  $0$  の零ベクトルである。外積については以下の性質がある。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{1-16}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{1-17}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{1-18}$$

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) \tag{1-19}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{左へ移動可能}) \tag{1-20}$$

#### (4) スカラとベクトルの偏微分(partial derivative)

ベクトル  $\mathbf{A}$  は、電磁気の場合、座標  $(x, y, z)$  と時間  $t$  の関数で、(1-3),(1-4)に示した。このとき、ベクトル  $\mathbf{A}$  の偏微分は、各成分の偏微分として定義される。例えば、 $x$  についての偏微分は

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \tag{1-21}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{\mathbf{z}} \tag{1-22}$$

スカラの偏微分は、例えば次式のように定義されている。 $\Delta$  (デルタ) は微小変動を表す。

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\partial A_x(x, y, z, t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_x(x + \Delta x, y, z, t) - A_x(x, y, z, t)}{\Delta x} \tag{1-23}$$

つまり、偏微分する変数以外は一定値と考えて微分すればよい。 2 階偏微分については

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \tag{1-24}$$

と考えればよい。 $\partial$  はラウンドと読む。

$$\text{例 } A_x = x^2 y z + 1 \quad \text{なら, } \frac{\partial A_x}{\partial x} = 2xyz, \quad \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 2yz$$

スカラ場として、空気中の温度分布  $f(x, y, z, t)$  がある。偏微分は微分する変数の向きの変化の割合を示すから、例えば  $\partial f / \partial x$  は、わずかに  $x$  方向にずれたら、温度  $f$  がどれくらい変化するかを考えている。点  $P$  では、図中のような正、負の値になるだろう。当然、点ごとに値は異なる。 $\partial f / \partial t$  も考えられる。この値は、同じ  $P$  点で時間がわずかに経過したときの温度変化の割合を表す。

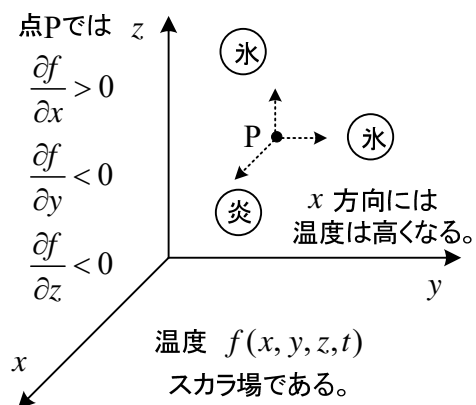


図 1-4 偏微分の意味

偏微分を用いた**テイラーの定理**(Taylor's theorem)を示しておく。スカラ関数  $f(x, y, z)$  について、任意の点  $P(x_0, y_0, z_0)$  の近くの点  $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  における関数の値は、 $P$  点の値で近似できる。近似と言うと嫌いな人もいるだろうが、 $Q$  点が非常に近いなら実質的に等号でよい。

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \Delta z \quad (1-25)$$

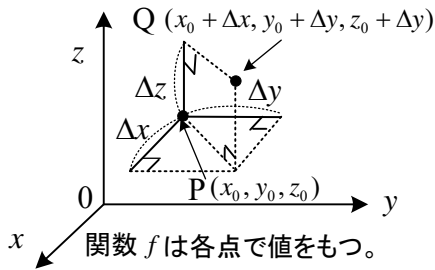


図 1-5 P, Q 点

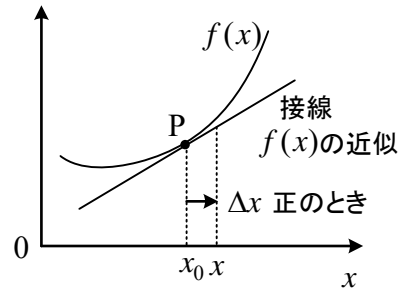


図 1-6 関数の接線 (1 変数)

$\Delta$ (デルタ)は点  $P$  からの小さな変動を意味する。 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  は負でもよい。時間  $t$  についても同様に考えてよいが、(1-25)では、ある瞬間を考え  $\Delta t = 0$  とした。右辺の第 2, 3, 4 項はそれぞれ  $f(x, y, z)$  を  $x, y, z$  で偏微分した後、 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  を代入して求める。つまり、 $P$  点での偏微分の値である。 $\partial f(x_0, y_0, z_0) / \partial x$  と書くと、一定値の偏微分で 0 になる。点  $P$  の近くの点では、関数  $f$  は、 $P$  点の値に、 $x, y, z$  の各向きの傾きに変動分をそれぞれ掛けた変化分(負になることもある)を全部加えたものになる。 $P$  点の座標を  $(x, y, z)$  として

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (1-26)$$

$$\text{全微分(total derivative)} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1-27)$$

と書くことも多い。 $f(x, y, z)$  を偏微分した後、 $x = x, y = y, z = z$  を代入するので、簡単な表現になる。(1-26)で  $\Delta y = \Delta z = 0$  とすると、(1-23)の偏微分の定義式に対応していることが判る。

変数が  $x$  だけなら  $\partial \rightarrow d$  としよく、 $x_0 + \Delta x = x$  とおくと、(1-25)より次式が得られる。

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

これは、高校で習う**接線(tangent)**の方程式である。つまり、元の関数は、 $P$  点の近くでは  $P$  点における接線の値で近似できるのである(図 1-6 参照)。(1-25)は、それが 3 変数になっただけである。(1-25), (1-26)はいろいろの場合に利用される重要な公式である。

## (5) 勾配

スカラ場  $f(x, y, z)$  の点  $(x, y, z)$  における勾配(gradient 日本語: グラジエント)は

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (1-28)$$

で表される。ここで、 $\nabla$  (ナブラと読む) は演算子で、次式で与えられる。

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-29)$$

$f(x, y, z) = c$  (一定) は、等位面を表す。例えば、 $f(x, y, z)$  が温度の分布なら、等位面は、同じ温度  $c$  の点を通る面となる。面上では、 $df = 0$  だから (1-27), (1-42) を用いて、 $(\text{grad } f) \cdot d\mathbf{l} = 0$  が得られ、ベクトル  $\text{grad } f$  は、等位面に垂直で  $c$  が増える向きを向く。 $\text{grad } f$  より面に垂直な法線ベクトルが計算できる。 $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$  である。

例 スカラ場  $f(x, y, z) = 2x^2 - xyz$  の点  $(2, 1, 1)$  における勾配を求めよ。

$$\text{grad } f = (4x - yz)\hat{x} - xz\hat{y} - xy\hat{z} = 7\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z}$$

点  $(2, 1, 1)$  から  $x$  軸の向きに進むと急に  $f$  が増え、 $y, z$  軸の向きに進むと  $f$  が減る。

## (6) 発散

ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  に対して

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-30)$$

を点  $(x, y, z)$  における発散(divergence ダイバージェンス)という。 $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$  である。

例 ベクトル場  $\mathbf{A} = (x^2 + yz)\hat{x} + (y^2 + zx)\hat{y} + (z^2 + xy)\hat{z}$  のとき、点  $(1, -1, 1)$  における発散を求めよ。 $\text{div } \mathbf{A} = 2x + 2y + 2z = 2$

## (7) 回転

ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  に対して

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad (1-31)$$

を点  $(x, y, z)$  における回転(rotation ローテーション)という。 $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$  である。

例 ベクトル場  $\mathbf{A} = x^2y\hat{x} - 2xz\hat{y} + 2yz\hat{z}$  のとき、点  $(1, 1, 1)$  における回転を求めよ。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = (2z + 2x)\hat{x} - (2z + x^2)\hat{z} = 4\hat{x} - 3\hat{z}$$

## 線積分, 面積分, 体積分

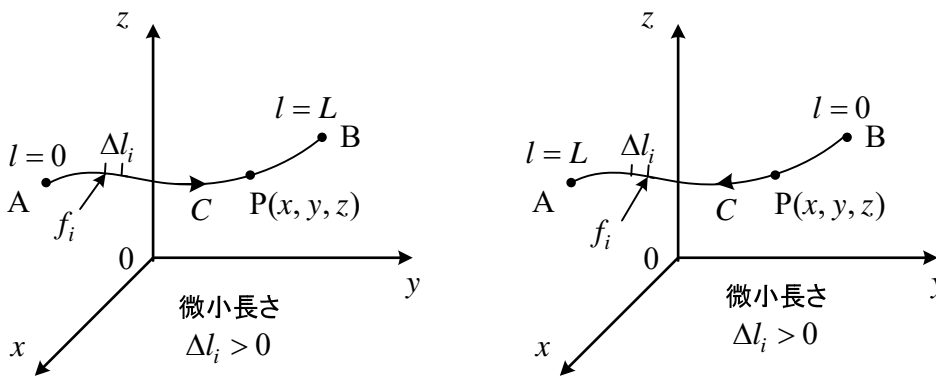
### (1) 線積分

図 1-7(a)の様に 2 点 A,B を結ぶ曲線  $C$  に沿って, 点 A から図った長さを  $l$ , 点 B では  $l=L$  (線の長さ) とする。  $C$  上の各点でスカラー関数  $f(x, y, z)$  が与えられているとき,  $f(x, y, z)$  の曲線  $C$  に沿っての線積分(line integral)は次式で定義される。

$$\int_0^L f(x, y, z) dl \equiv \int_C f(x, y, z) dl \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \Delta l_i \quad (1-32)$$

ここで,  $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$ ,  $\Delta l_i = L/n$

右辺の意味は, 2 点 A,B 間を  $n$  等分し, 各区間での関数の値  $f_i$  と微小長さ  $\Delta l_i$  (正) を掛けて, それらを加え合わせる。そのとき,  $n \rightarrow \infty$  として分割数を十分大きくし, その分  $\Delta l_i$  は十分小さく取る。A から B の道  $C$  の上にお金落ちていて (ある点ではお金を落としてマイナス), A から出発し B に着くまでに集めたお金の総額が線積分のイメージである。



(a)  $A \rightarrow B$  の線積分

(b)  $B \rightarrow A$  の線積分

図 1-7 スカラ場の線積分

図(b)では, 点 B から図った長さを  $l$  としている。今度は B から出発して A までお金を集めるということである。微小長さ  $\Delta l_i$  は正で変わらない。よって,

$$\int_{A \rightarrow B} f(x, y, z) dl = \int_{B \rightarrow A} f(x, y, z) dl \quad (1-33)$$

が成り立ち積分値は変わらない。もし,  $f(x, y, z) = 1$  なら, 線積分の値は道の長さ  $L$  になる。

高校で習う積分

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x \quad \text{ここで, } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (1-34)$$

は,  $x$  軸上での値が  $f(x)$  であるとき,  $a$  から  $b$  までの線積分と考えることができる。しかし,  $\Delta x$  は  $b > a$  なら正であるが,  $b < a$  なら負となる。この結果

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (1-35)$$

となる。この点は  $\Delta l_i$  が常に正で、(1-33)が成り立つ線積分と異なる。

例題1 点 A(0,0,0) から点 B(1,1,1) に至る直線を経路 C として、A から B までの線積分

$$\int_{A \rightarrow B} z dl$$

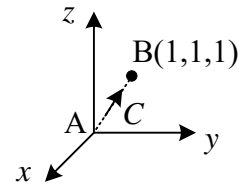
を求めよ。  $f(x, y, z) = z$  である。次に、B から A までの線積分を求めよ。

(解) AB 間の距離は  $\sqrt{3}$  である。A から経路 C に沿った長さ  $l$  に対し  $z = l/\sqrt{3}$  である。故に

$$\int_{A \rightarrow B} z dl = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{l}{\sqrt{3}} dl = \left[ \frac{l^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

B から測った長さ  $l$  に対し  $z = 1 - (l/\sqrt{3})$  である。よって

$$\int_{B \rightarrow A} z dl = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{3}}\right) dl = \left[ l - \frac{l^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

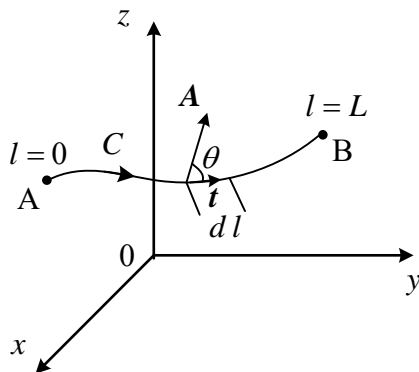


次にベクトル場の線積分について述べる。

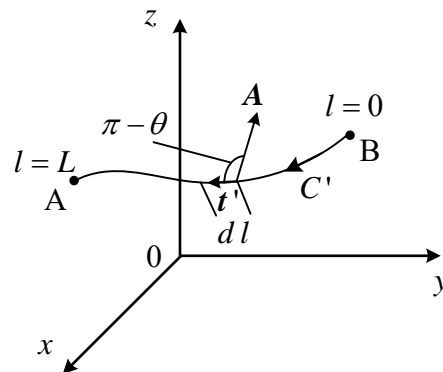
図 1-8(a)に示すように、空間の各点で値が異なるベクトル場  $\mathbf{A}$  がある。経路 C に対し、 $\mathbf{A}$  の線積分を次式で定義する。図 1-8 の  $dl$  は図 1-7 のように  $\Delta l_i$  と書くのが厳密だが、次式との対応が判りやすいので、 $dl$  と書いた。もともと  $dl$  は極めて小さいから図には書けないだろう。

$$\int_0^L \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad \text{または} \quad \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (1-36)$$

ここで、 $\mathbf{t}$  は経路 C と同じ向きの単位接線ベクトル(unit tangent vector)である ( $|\mathbf{t}| = 1$ )。  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}$  は内積で、スカラーである。よって、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} = f(x, y, z)$  とおけば、(1-32)の定義はそのまま使える。接線は tangent だから  $\mathbf{t}$  と書く。



(a)  $A \rightarrow B$  の線積分



(b)  $B \rightarrow A$  の線積分

図 1-8 ベクトル場の線積分

この場合、 $A \rightarrow B$  の線積分と  $B \rightarrow A$  の線積分は値が異なる。図に示すように、(a)の場合、 $A \cdot t = |A| \cos \theta$  だが、(b)の場合、 $A \cdot t' = |A| \cos(\pi - \theta) = -|A| \cos \theta = -A \cdot t$  となる。 $t$  と  $t'$  は向きが逆で  $t' = -t$  である。従って、(1-33)より

$$\int_C A \cdot t \, dl = - \int_C A \cdot t' \, dl \quad (1-37)$$

となる。ベクトルの線積分と言っても、内積を取るのだから、実はスカラーの線積分である。図 1-8 で物体に力  $A$  を加え、 $A$  から  $B$  まで動かしたとき、線積分はこの力がする仕事を表す。

図 1-9 を使って単位接線ベクトル  $t$  の公式を述べる。積分路  $C$  上の任意の点  $P$  は、点  $A$  から測った長さ  $l$  の点である。この点の位置ベクトルは、 $l$  だけの関数として

$$r(l) = x(l)\hat{x} + y(l)\hat{y} + z(l)\hat{z} \quad (1-38)$$

と書ける。つまり  $C$  上の点の座標  $(x, y, z)$  は  $l$  で表されるということ。点  $P$  から少し  $l$  が増えると、その分、座標も変化する。点  $P$  で、それぞれの座標を  $l$  で微分したベクトル

$$t(l) = \frac{dr(l)}{dl} = \frac{dx(l)}{dl} \hat{x} + \frac{dy(l)}{dl} \hat{y} + \frac{dz(l)}{dl} \hat{z} \quad (1-39)$$

は、点  $P$  での曲線  $C$  の単位接線ベクトルとなる。なぜなら、まず図 1-9 より

$$\frac{dr(l)}{dl} \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{r(l+\Delta l) - r(l)}{\Delta l} \quad (1-40)$$

は  $C$  の接線方向を向いている。次に、大きさについては次式が成り立つ。

$$\left| \frac{dx}{dl} \hat{x} + \frac{dy}{dl} \hat{y} + \frac{dz}{dl} \hat{z} \right| = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dl} = 1 \quad (1-41)$$

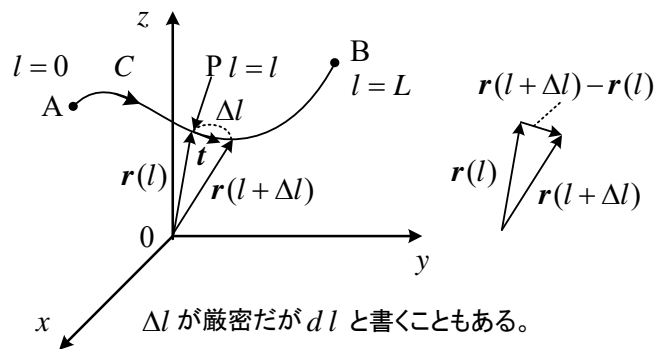


図 1-9 単位接線ベクトル  $t$

(1-39)より、次式が成り立つ。

$$t \, dl = dr = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (1-42)$$

また、 $t \, dl \equiv dl$  と置いて、(1-36)の線積分を

$$\int_C A \cdot t \, dl \equiv \int_C A \cdot dr \quad \text{あるいは} \quad \int_C A \cdot t \, dl \equiv \int_C A \cdot dl \quad (1-43)$$

と書いた本も多い。本稿では、内積  $A \cdot t$  を集めるという意味が明解な(1-36)のように書く。

## (2) 面積分

### スカラ場の面積分

図 1-10 に示すように、スカラ場  $f(x, y, z)$  の中に滑らかな曲面  $S$  がある。この曲面を  $n$  分割して、 $i$  番目の小片上に任意の点  $P_i$  をとる。点  $P_i$  でのスカラ場の値  $f(P_i)$  と小片の面積  $\Delta S_i$  (正) を用いて、**面積分**(surface integral)を次式で定義する。  $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$  である。

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \quad (1-44)$$

$n \rightarrow \infty$  とするのは、分割数を十分大きくし、 $\Delta S_i$  は十分小さく取るということである。十分小さくとるので、小片の形に制限はない。畑  $S$  上にお金落ちていて (ある点ではお金を落ととして)、畑で集めたお金の総額が面積分のイメージである。畑やベレー帽は面のイメージのため、ボールのような閉曲面であっても構わない。 $f=1$  なら面積分は  $S$  の面積になる。

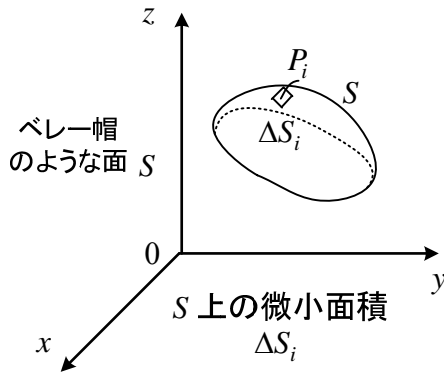


図 1-10 スカラ場の面積分

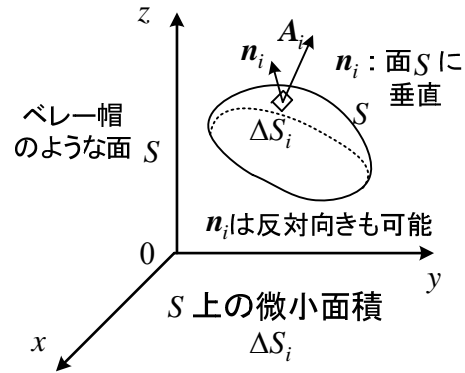


図 1-11 ベクトル場の面積分

### ベクトル場の面積分

図 1-11 に示すように、空間の各点で値が異なるベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  がある。いま曲面  $S$  があり、曲面上にある  $\mathbf{A}$  (ベクトル場  $\mathbf{A}$  の一部) の面積分を次式で定義する。

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (1-45)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は曲面  $S$  に垂直で  $S$  の向きを決める**単位法線ベクトル** (unit normal vector)である。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  は内積で、スカラである。よって、 $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i = f(P_i)$  とおけば、(1-44)と同じである。 $\mathbf{n} dS \equiv d\mathbf{S}$  と置いて

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-46)$$

と書く本もある。 $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i$  は、ベクトル  $\mathbf{A}_i$  のうちで面を  $\mathbf{n}_i$  の向きに**通過する量のイメージ**である。 $\mathbf{A}_i$  と  $\mathbf{n}_i$  のなす角が  $\pi/2$  なら  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i$  は 0 となり、面を通過する量が 0 ということである。 $\pi/2$  以上になると値が負になり、 $\mathbf{n}_i$  と逆向きに通過することを意味する。ベクトルの面積分と言っても、内積を取るの、実はスカラの面積分である。本稿では  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  を面で集めるという意味が明解で、 $\mathbf{n}$  が見えたほうが良いので(1-45)の様に書く。面  $S$  が与えられても  $\mathbf{n}_i$  は 2通りの選び方が可能である (ベレー帽なら外向きか内向きか)。両者の大きさは同じであるが符号が異なる。



### (3) 体積分

スカラー場  $f(x, y, z)$  の中にボールのような閉曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  がある。この領域を  $n$  分割して、 $i$  番目の小立体内に任意の点  $P_i$  とする。点  $P_i$  でのスカラー場の値  $f(P_i)$  と小立体の体積  $\Delta V_i$  を用いて、**体積分**(volume integral)を次式で定義する。

$$\int_V f(x, y, z) dV \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i \quad (1-47)$$

$n \rightarrow \infty$  は、分割数を十分大きくし、 $\Delta V_i$  は十分小さく取るということである。貯金箱の中  $V$  に各種のお金が入っていて、全部を集めたお金の総額が体積分のイメージである。  $f=1$  のとき体積分は  $V$  の体積となる。

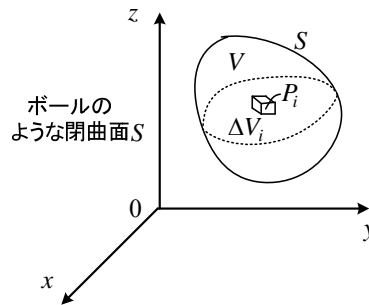


図 1-12 スカラー場の体積分

### 線積分，面積分，体積分の定理

#### (1) ストークスの定理

図 1-13 に示すように、ベクトル場  $A$  の中に開曲面  $S$  を考える。 $S$  上で面に垂直な単位法線ベクトルを  $n$  とする。もちろん  $A, n$  は場所によって異なる ( $A$  は面の上だけではない)。 $n$  と境界  $C$  の向き ( $t$  は  $C$  の向きの単位接線ベクトル) は**右ねじの関係** ( $C$  の向きに回すと  $n$  の向きに進む)に選ぶ。 $n$  と  $t$  は図のように 2 つの場合がある。このとき、次式が成立する。

$$\int_S (\text{rot} A) \cdot n \, dS = \int_C A \cdot t \, dl \quad (1-48)$$

これを**ストークスの定理**(Stokes' theorem)という。 $A$  の回転である  $\text{rot} A$  の面に垂直な成分を開曲面  $S$  上で集めた値と、境界  $C$  上で  $A$  の接線方向成分を 1 周回って集めた値は等しいことを意味する。

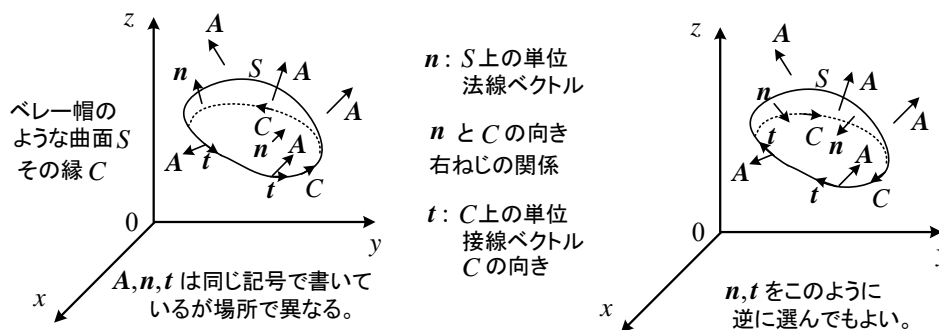


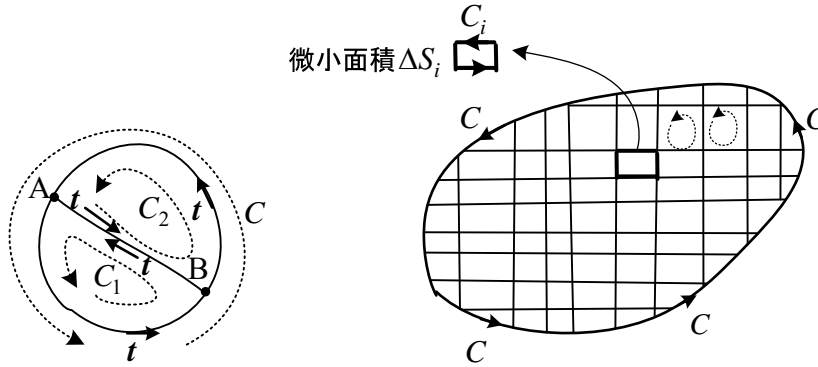
図 1-13 ストークスの定理

以下、回転の定義、ストークスの定理の証明、(1-31)の導出に関して説明しよう。

図 1-14 に示すように、曲面を 2 分割し、2 つのループ  $C_1, C_2$  を考える。1 周する  $C_1$  と  $C_2$  の線積分の和を考えると、A,B 間（直線部分）は向きが反対なので、(1-37)より打ち消し

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-49)$$

となる。 $C$  は外側の境界を 1 周している。単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  は  $C_1, C_2, C$  ごとに一部異なる。



(a) 開曲面(ベレー帽の一部)の 2 分割 (b) 開曲面 (ベレー帽) の多分割

図 1-14 線積分の和 (ベレー帽を真上から見た図)

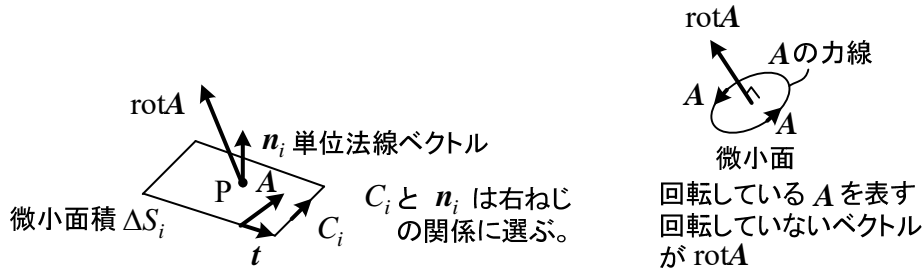


図 1-15  $\text{rot}\mathbf{A}$  の定義

図 1-14 (b)のように開曲面を小片（形に制限はない）に  $n$  分割した場合、(1-49)の考え方を何度も使うと内側の線積分は消えて、一番外側  $C$  の線積分だけが残る。よって、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-50)$$

が成り立つ。いま、図 1-15 に示す小片の境界での線積分を面積  $\Delta S_i$  で割って、小片での（極限では点と考えてよい）  $\text{rot}\mathbf{A}$  を次式で定義する。 $\mathbf{n}_i$  は面に垂直な単位法線ベクトルである。

$$(\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}_i \equiv \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_i} \quad (C_i \text{ と } \mathbf{n}_i \text{ は右ねじの関係に選ぶ}) \quad (1-51)$$

分りにくい定義の仕方であるが、以下の様に解釈しよう。ベクトル場  $\mathbf{A}$  について、ある点で、**うずを巻いている量**を定義したい。このために、ある点  $P$  を含む小さな面を考え、その境界  $C_i$  で線積分を計算する。これが大きければ経路  $C_i$  に沿って強いうずを巻いていると考えられる。なぜなら線積分は  $P$  の回りを 1 周する  $C_i$  の向きで  $\mathbf{A}$  の経路方向成分を集めたものだから。ところが、ある点  $P$  を含む小さな面は角度を変えればいろいろある。全部試してみて最も大きな線積分が得

られた面の法線の向きを  $\text{rot}\mathbf{A}$  の向きと定義する。 $\text{rot}\mathbf{A}$  の大きさはそのときの線積分の値としたところであるが、それだと面の大きさで値が異なるから、 $\Delta S_i$  で割って密度を求める。 $\lim$  は、 $\Delta S_i$  が極めて小さいなら、省いて考えてよい。適当に決めた経路  $C_i$  は、線積分が最も大きくなるとは限らず、 $\text{rot}\mathbf{A}$  の向きとのずれの分だけ小さくなる。それが(1-51)左辺で内積をとる理由である。たまたま線積分が最も大きくなるなら、 $\text{rot}\mathbf{A}$  と  $\mathbf{n}_i$  の向きは一致し、右辺が  $\text{rot}\mathbf{A}$  の大きさとなる。小さな水車を点 P において、角度をいろいろと試し、水車が最も速く回るときの水車の軸が  $\text{rot}\mathbf{A}$  の向きで、水車の速さが  $\text{rot}\mathbf{A}$  の大きさに対応すると考えるとイメージしやすい。

(1-51)で  $\Delta S_i$  は十分小さいとして  $\lim$  を省き、図 1-14(b)の場合について  $n$  個分加え合わせると

$$\sum_{i=1}^n (\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (1-52)$$

となる。分割数を多くし  $n \rightarrow \infty$  としたときの左辺を(1-45)の面積分の定義で

$$\int_S (\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

と書くので、右辺に (1-50)を用いて、(1-48)のストークスの定理が証明できた。

最後に、(1-31)の導出を行う。図 1-16 のような、微小な長方形の経路  $C$  を考える。 $z$  軸は紙面に対し手前を向いている。点 1  $(x, y, z)$  の  $\mathbf{A}$  を成分表示すると

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$$

と書ける。点 3 の  $\mathbf{A}$  を成分表示すると次式となる。

$$\mathbf{A}(x + \Delta x, y + \Delta y, z) = A_x(x + \Delta x, y + \Delta y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x + \Delta x, y + \Delta y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x + \Delta x, y + \Delta y, z)\hat{\mathbf{z}}$$

テイラーの定理を用いると、(1-26)より次式を得る。

$$A_x(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \approx A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y$$

$$A_y(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \approx A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y$$

点 2 は、上式の  $\Delta y$  を 0、点 4 は上式の  $\Delta x$  を 0 とすればよい。

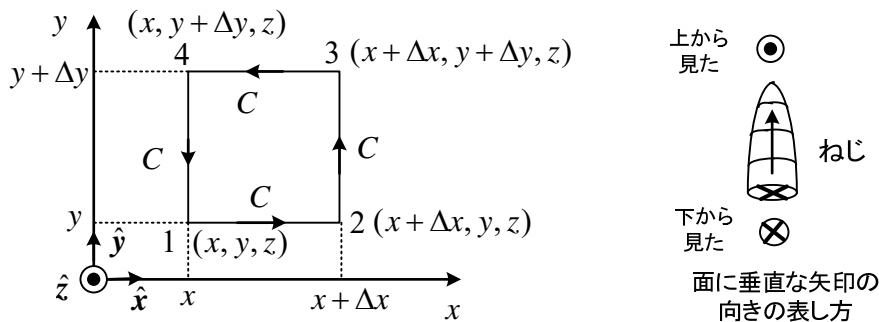


図 1-16  $z$  一定の  $x$ - $y$  平面にとった積分路

次に、経路  $C$  での  $\mathbf{A}$  の線積分を考える。例えば、 $1 \rightarrow 2$  への積分では、 $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{x}}$  であるから

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl &= \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl \\ &= \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dl + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} \, dl - \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dl - \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} \, dl \\ &= \int_{1 \rightarrow 2} A_x \, dl + \int_{2 \rightarrow 3} A_y \, dl - \int_{3 \rightarrow 4} A_x \, dl - \int_{4 \rightarrow 1} A_y \, dl \end{aligned} \quad (1-53)$$

各線積分を、例えば  $1 \rightarrow 2$  の場合は点 1 と点 2 の  $A_x$  の平均値に長さを掛けて求めると

$$\begin{aligned} \int_{1 \rightarrow 2} A_x \, dl &= \frac{1}{2} (A_x(x, y, z) + A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x) \Delta x \\ \int_{2 \rightarrow 3} A_y \, dl &= \frac{1}{2} (A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y) \Delta y \\ \int_{3 \rightarrow 4} A_x \, dl &= \frac{1}{2} (A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y + A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y) \Delta x \\ \int_{4 \rightarrow 1} A_y \, dl &= \frac{1}{2} (A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y + A_y(x, y, z)) \Delta y \end{aligned}$$

これらを(1-53)に代入して、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

(1-51)より

$$(\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1-54)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は経路  $C$  と右ねじの関係で決まるから、 $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$  で  $(\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$  は  $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $z$  軸方向成分である。以上、 $x-y$  平面での線積分の結果、 $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $z$  成分が求まった。 $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$  と順に入れ替えることで、 $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $x$  成分が求まる。 $x \rightarrow z, y \rightarrow x, z \rightarrow y$  と順に入れ替えることで、 $\text{rot} \mathbf{A}$  の  $y$  成分が求まる。以上で、(1-31)が導出できた。

## (2) ガウスの定理

図 1-17 に示すように、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の中に例えばボールのような閉曲面  $S$  とその中の領域  $V$  を考える。閉曲面  $S$  上で面に垂直な外向きの単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。もちろん  $\mathbf{A}, \mathbf{n}$  は場所によって異なる。このとき、次式が成立する。

$$\boxed{\int_V \text{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS} \quad (1-55)$$

これをガウスの定理(Gauss' theorem)という。 $\mathbf{A}$  の発散である  $\text{div} \mathbf{A}$  を領域  $V$  で集めた体積分と面  $S$  上で  $\mathbf{A}$  の外向き成分を集めた面積分が等しいことを意味する。 $\text{div} \mathbf{A}$  は水の源泉で、領域  $V$  中の湧き水を全て集めると、境界面から出て行く水の量( $\mathbf{n}$  方向成分)に等しいというイメージである。

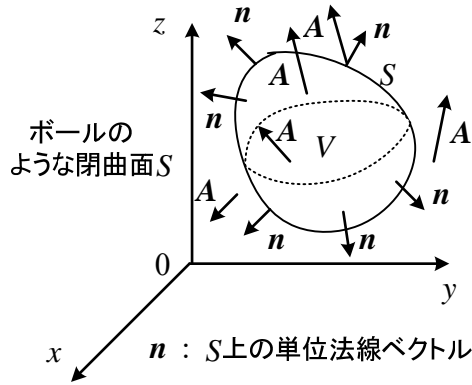


図 1-17 ガウスの定理

以下、発散の定義、ガウスの定理の証明、(1-30)の導出に関して説明しよう。

図 1-18(a)に示すように、ボールのような閉曲面を 2 分割し、2 つの閉曲面  $A+C$  と  $B+C$  を作る。境界面  $C$  は共通の断面である。閉曲面上でのベクトル場  $\mathbf{A}$  の面積分を考える。曲面  $C$  上の同じ点では、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_A = -\mathbf{n}_B$  であり、面積分について次式が成り立つ。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_A dS = -\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_B dS \quad (1-56)$$

したがって、境界面  $C$  上の面積分は打ち消すので

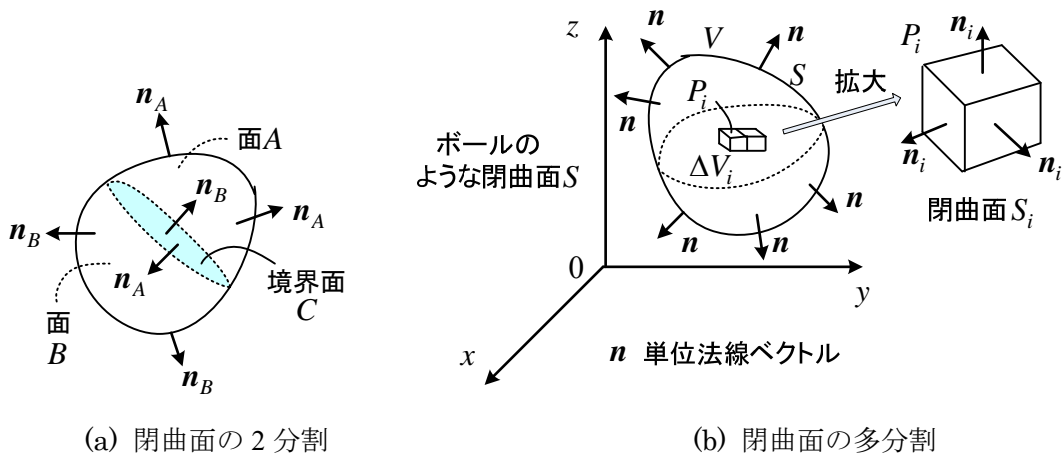
$$\int_{A+C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_A dS + \int_{B+C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_B dS = \int_A \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_A dS + \int_B \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_B dS \quad (1-57)$$

となる。

図 1-18(b)のように閉曲面内を小閉曲面  $S_i$  (形に制限はない) に  $n$  分割した場合、共通の面 (小立体中の面) の面積分が打ち消すので、この考え方を繰り返し用いることで

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_i dS \quad (1-58)$$

が成り立つ。 $\mathbf{n}_i$  は面  $S_i$  に垂直な単位法線ベクトルである。結局一番外の閉曲面  $S$  の面積分しか残らない。



(a) 閉曲面の 2 分割

(b) 閉曲面の多分割

図 1-18 面積分の和

いま、図 1-18(b)に示す小閉曲面の面上での面積分をその体積  $\Delta V_i$  で割って（極限では点と考えてよい）発散  $\text{div} \mathbf{A}$  を次式で定義する。lim は  $\Delta V_i$  が極めて小さいとして省いて考えてもよい。

$$\text{div} \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_i dS}{\Delta V_i} \quad (1-59)$$

$\text{div} \mathbf{A}$  は極めて小さい閉曲面(点とみなせる)から  $\mathbf{A}$  が外に出る量を集めたもので泉のイメージである。 $\mathbf{A}$  が面に垂直な部分では最も外に出る。

図 1-18(b)の場合について考えると、定義(1-59)より

$$\sum_{i=1}^n \text{div} \mathbf{A} \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_i dS \quad (1-60)$$

となる。 $n \rightarrow \infty$  とし、十分小さく分割したときの左辺を体積分の定義(1-47)で

$$\int_V \text{div} \mathbf{A} dV$$

と書くので、(1-58)であるから、ガウスの定理が証明できた。

最後に、(1-30)の導出を行う。図 1-19 のように、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の中に座標軸に平行な辺の極小の直方体を考え、6 つの面上で面積分を考えていく。

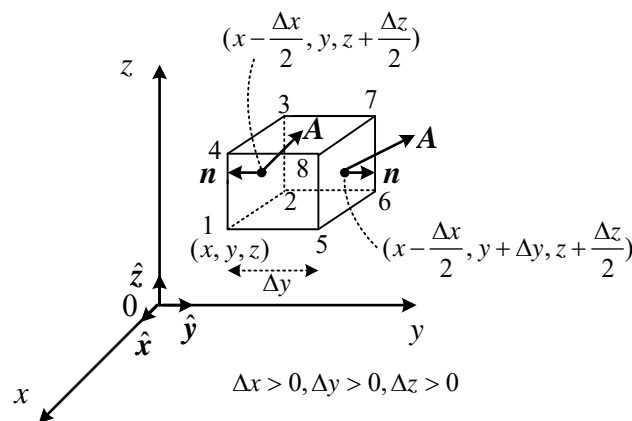


図 1-19  $\text{div} \mathbf{A}$  の公式の証明

点 1  $(x, y, z)$  の  $\mathbf{A}$  を成分表示して

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$$

とする。まず、面 1234 と面 5678 について考える。面 1234 の中心の  $\mathbf{A}$  を成分表示すると

$$\mathbf{A}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) = (A_x(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z), A_y(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z), A_z(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z))$$

と書ける。テイラーの定理を用いると、 $y$  成分について次式を得る。

$$A_y(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) \approx A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \quad (1-61)$$

同様に、面 5678 の中心の  $\mathbf{A}$  の  $y$  成分は、テイラーの定理を用いると、次式で表せる

$$A_y(x - \frac{1}{2}\Delta x, y + \Delta y, z + \frac{1}{2}\Delta z) \approx A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \quad (1-62)$$

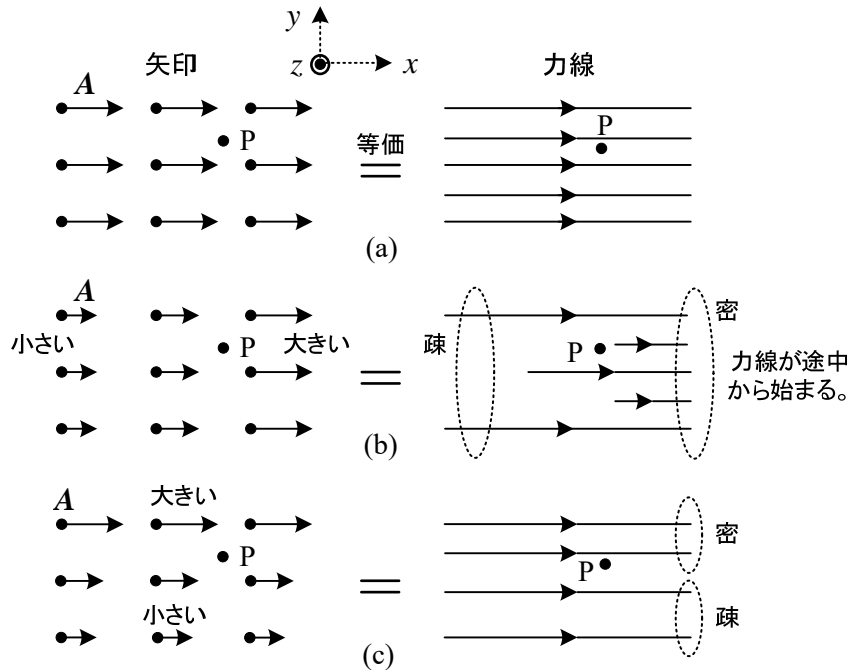
次に、面 1234 と面 5678 での面積分を考える。(1-61), (1-62)を用い、面積分を面の中心の値×面積と近似すると

$$\begin{aligned} \int_{1234} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{5678} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= -\int_{1234} A_y \hat{y} dS + \int_{5678} A_y \hat{y} dS \\ &= -\int_{1234} A_y dS + \int_{5678} A_y dS \\ &= -(A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta z + (A_y(x, y, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta z \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (1-63)$$

$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  であるから、(1-59)より、 $\Delta V$  で割って、これらの面に関しては  $\partial A_y / \partial y$  となる。他の  $x, z$  軸方向についても同様に求まり、これらの和として(1-30)が得られる。

以上は、直角座標系  $(x, y, z)$  (cartesian coordinate system) で考えたが、円柱座標系  $(r, \varphi, z)$  (cylindrical coordinate system) や球座標系  $(r, \theta, \varphi)$  (polar coordinate system) を考えることもある。定義は当然同じであるが、div, grad, rot などの得られる公式については付録を参照願いたい。

例題2  $\mathbf{A}$  のベクトル場があり、任意の  $z$  において、 $x$ - $y$  平面上で図のように矢印と力線で表されている。ある点  $P$  の  $\text{rot} \mathbf{A}$  (回転, うず) と  $\text{div} \mathbf{A}$  (発散, 泉) は零か零でないか<sup>(18)</sup>。



- (解) (a)  $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  うずも泉もない。  
 (b)  $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $\text{div} \mathbf{A} \neq 0$  うずはないが泉がある。

(c)  $\text{rot}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ,  $\text{div}\mathbf{A} = 0$  うずはあるが泉はない。

具体的な数値例で示そう。

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \text{ のとき, } \text{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ だから}$$

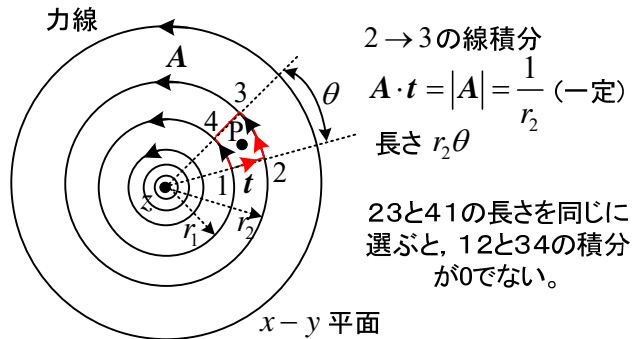
(a) の場合 例えば  $A_x = 2, A_y = 0, A_z = 0$  とすると  $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $\text{div}\mathbf{A} = 0$

(b) の場合 例えば  $A_x = 2x, A_y = 0, A_z = 0$  とすると  $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $\text{div}\mathbf{A} = 2$

(c) の場合 例えば  $A_x = 2y, A_y = 0, A_z = 0$  とすると  $\text{rot}\mathbf{A} = -2\hat{z}$ ,  $\text{div}\mathbf{A} = 0$

(b)の場合、力線が始まる点があり、それが泉と解釈できる。(c)の場合、うずが巻いている様子は見られないが、矢印を水の速度とみなすとき点Pに小さい水車(軸はz軸)をおくと、上側の流速が大だから水車は時計方向に回りそうである。水中の木の葉なら回るだろう。つまりうずがあり、rotの向きは右ねじの進む向きに約束しており $-\hat{z}$ の向きになる。なお、 $\text{rot}\mathbf{A}$ はベクトル場、 $\text{div}\mathbf{A}$ はスカラー場の1つである。よって、 $\text{div}\mathbf{A} = 2$ は、すべての点でこの値をもち、 $\text{rot}\mathbf{A} = -2\hat{z}$ も全ての点でこの値をもつ。

うずがありそうなのに $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ということがある。 $\mathbf{A}$ が図に示すようにz軸を中心とした同心円の力線で、任意のzにおいて半径rに反比例して、 $|\mathbf{A}| = 1/r$ の場合である。問題は図の任意の点Pの $\text{rot}\mathbf{A}$ の値である。



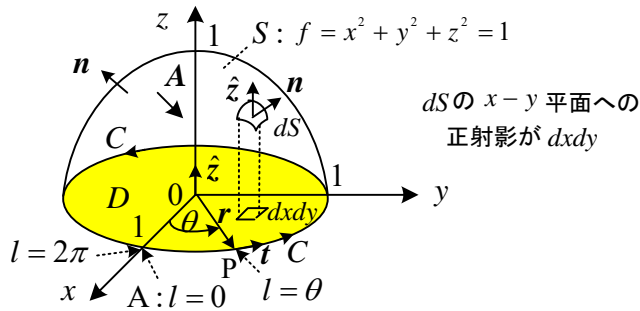
(1-51)で、点Pの周りの微小領域で $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ と $\mathbf{A}$ の周回積分を行う。すると、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 = 0 + \frac{1}{r_2} r_2 \theta + 0 - \frac{1}{r_1} r_1 \theta = 0$$

$1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 4$ の線積分は、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} = 0$ により0である。 $4 \rightarrow 1$ のマイナスは、 $\mathbf{A}, \mathbf{t}$ の向きが逆だから。(1-51)より、線積分が0だから $(\text{rot}\mathbf{A}) \cdot \hat{z} = 0$ となる。面の角度を変えるため、 $2 \rightarrow 3$ と $4 \rightarrow 1$ のzが異なるとしても線積分は0である。従って、z軸上を除いて $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ となる。点Pに水車をおき、軸の向きをいろいろ試しても回らない。なお、力線は連続だから、 $\text{div}\mathbf{A} = 0$ である。

例題3 ベクトル場を $\mathbf{A} = (2x - y)\hat{x} - yz^2\hat{y} - y^2z\hat{z}$ とし、曲面Sを半球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ とする。閉曲線CをSの境界として、ストークスの定理が成り立つことを確かめよ。





(解)  $C$  上の任意の点  $P$  の  $A$  点からの長さは  $l = \theta$  であり、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{注意 } \mathbf{r} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \text{ と書いてもよい。}$$

$P$  点の単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  は(1-39)より  $l = \theta$  だから

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \left( \frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl} \right) = \left( \frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta} \right) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

従って、 $C$  にそった周回積分は次式で求められる。 $C$  上では  $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0$  である。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \int_0^{2\pi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} d\theta = \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta - \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta = \pi \quad (1)$$

次に、曲面  $S$  上で面積分を求めよう。 $f = x^2 + y^2 + z^2$  とおくと(1-28)より

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z)$$

従って、曲面  $S$  に垂直な単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は次式で求められる。曲面  $S$  では  $f = 1$  に注意。

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) = \pm (x, y, z)$$

ストークスの定理を用いる場合、 $\mathbf{n}$  と  $C$  の向きは右ねじの関係に選ぶ必要があり、符号の+が該当する。-の場合  $\mathbf{n}$  は原点を向く。全ての点で

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

図より  $|\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}}| dS = dxdy$  と考えて、 $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}} = z$  より曲面  $S$  での  $\text{rot } \mathbf{A}$  の面積分は次式となる。

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \frac{dxdy}{|\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}}|} = \iint_D dxdy = \pi \quad (D \text{ の面積}) \quad (2)$$

(1),(2)は等しく、ストークスの定理が成立することが確認できる。

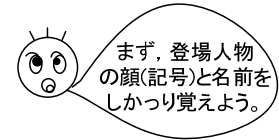
数学の公式は恐れることなく使ってみよう。複雑な式は覚える必要もない。また、導かなくても、3冊以上の版を重ねた本に同じ公式が載っていて本文中でも利用されていたら、正しいと信じて良いだろう。

## 第2章 電磁気学の世界地図

電界や磁界を記述する式は4つにまとめられ、これを**マクスウェルの方程式**(Maxwell's equations)という。実は不遇の天才と言われる**ヘビサイド**が現在の形にまとめた。ベクトル場は、div (発散) と rot (回転) と境界条件により一意に決まる(ヘルムホルツの定理:付録)。従って、マクスウェルの方程式が div と rot で表されていることは不思議なことではない。この章はマクスウェルの方程式を始めとした電磁気学の世界を紹介するもので、完全に理解できなくても全く構わない。特に、○\*のついた節は初読の際にはとばしてよい。

まず、用いる記号と名前を示しておく。単位については付録にまとめている。

$E$ : 電界, 電場, 電界の強さ [V/m]	⇒ 電気力線
$D$ : 電束密度 [C/m <sup>2</sup> ]	⇒ 電束線
$H$ : 磁界, 磁場, 磁界の強さ [A/m]	⇒ 磁力線
$B$ : 磁束密度, 磁界 [T]または[Wb/m <sup>2</sup> ]	⇒ 磁束線
$i$ : 伝導電流密度, 導電電流密度 [A/m <sup>2</sup> ] <sup>#</sup>	⇒ 電流線
$\rho$ : 自由電荷密度, 真電荷密度 [C/m <sup>3</sup> ] <sup>##</sup>	



上記の量は全て場所  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と時間  $t$  の関数であるが、簡単のため  $(\mathbf{r}, t)$  を省略している。高校で習う関数  $f(x)$  の独立変数は  $x$  だけであるが、上記の量は独立変数が4つある。本テキストでは、太字のよび方をする。 $B$  を磁界とよぶのがふさわしいと指摘する教科書も少なくないが、現在でも伝統的な磁束密度の用語が広く使われている。 $B$  を磁界とよぶ場合に  $H$  を磁界  $H$  とよんだ例がある<sup>(27)</sup>。矢印の右は**力線**の名称である。

# 導体中などの電荷の移動による**伝導電流密度  $i$**  と気体中を電子等が動く場合の**対流(携帯)電流密度  $\rho v$**  の和を**自由電流密度  $i_f$**  とよぶ<sup>(19),(24)</sup>。本テキストでは**伝導電流密度**だけを考える。

## 通常、自由電荷は導体表面, 真空中, 気体中にあり, 絶縁体中, 導体中の  $\rho$  は0である。コンデンサでは, 極板(導体)の**面自由電荷密度  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>]**を考える。 $\rho$ を直接考えるのはプラズマ, 半導体接合部の空乏層, 真空管などである。 $\rho, \sigma$ に**分極電荷は含まれない**。

肉太の量は, ベクトル場である。すなわち, 3つの成分を持つ。一方  $\rho$  はスカラ場である。真空中や空気中であれば,  $E$  と  $B$  (あるいは  $E$  と  $H$ ) だけ考えれば良いが, 物質中も考えるので,  $E, D, H, B$  の4つの量を用いる。

**マクスウェルの方程式**について, 以下のポイントは重要である。

- ① マクスウェルの方程式は, 物質中や動く物体がある場合でも成り立つ一般的なものである。ただし, 電磁気学は原子や電子レベルのミクロな現象を扱う学問ではなく(これは量子論の分野), 原子や電子の巨視的な挙動(それでもミクロ)についての学問である。
- ② 諸量を表す座標系は**静止座標系**である。地球自体が公転や自転をしているが, ここでいう静止座標系とは, 地球上に固定し, 一般に我々が静止と考えている座標系でよい。

## ○ 自由電荷密度, 伝導電流密度, 電荷保存の法則

電磁界を作る自由電荷密度と伝導電流密度を説明しよう。伝導電流は普通の電流のことである。全ての物質はだんだん細かく分けていくと、最後に**原子(atom)**に到達する。原子は中心に原子核があり、そのまわりに負の電荷を持つ幾つかの**電子(electron)**がある。原子核は正の**電荷(charge)**を持つ幾つかの**陽子(proton)**と電荷を持たない**中性子**からなっている。普通の状態では、電子と陽子の数は等しく、それらが打ち消し合って電荷は**0**と考えてよい。原子の中の電子と陽子の数は物質により異なる。図 2-1 は銅の原子の構造を示している。一番外側の電子は**価電子**と呼ばれ、銅の場合は**1**個である。銅線は電気をよく通す**導体**であるが、これは**価電子**が原子から離れ**自由電子(free electron)**になって動くためである。電子が**1**個原子外へ移動すると原子は正に帯電する。これを**イオン**という。電荷は**自由電荷(free charge)**と**束縛電荷(bound charge)**に分けられる。銅の場合、自由電荷は**価電子**1個と動かない陽子のどれか**1**個を指す(価電子だけではないので注意)。それ以外の電子と陽子を**束縛電荷**と呼ぶ。完全な絶縁物は束縛電荷のみである。

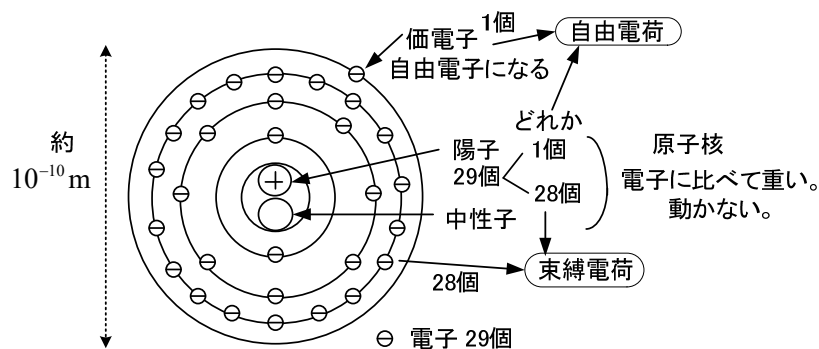


図 2-1 銅(原子番号 29)の原子の構造

電磁気学では**1**つひとつの原子のことは考えず、 $10^{-8}$ m程度の長さの平均値を考えれば十分だろう。従って、“+の電荷がある”と言う場合、電子が抜けた原子が多く、全体として+と考えよう。“-の電荷がある”と言う場合、電子が増えた原子が多く、全体として-と考えよう。なお、電子は気体中に取り出せるので、**2**極管のように電子だけを考える場合もある。

自由電荷密度について説明する。**自由電荷密度**  $\rho(\mathbf{r}, t)$  [C/m<sup>3</sup>] (free charge density) は **1m<sup>3</sup> に換算した自由電荷で、当然実際に1m<sup>3</sup>の体積を考えている訳ではない。これを単位体積中(per unit volume)の電荷ということもある。微小な体積  $\Delta V$  [m<sup>3</sup>] 中(それでも原子はたくさんある)の自由電荷の和を  $\Delta Q$  [C] とするとき、**

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_-(\mathbf{r}, t) + \rho_+(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad [\text{C/m}^3] \quad (2-1)$$

で求められる。 $\rho_-(\mathbf{r}, t)$  と  $\rho_+(\mathbf{r}, t)$  は自由電荷のうちそれぞれ電子分と陽子分を表す。一般に金属導体中では、たとえ電流が流れている場合でも各点で電子が動いた分が瞬時に補給されるので

$$\rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2-2)$$

と考えてよく、自由電荷は金属導体表面のみに現れる。自由電荷には陽子の一部も入っているので**0**になるのである。コンデンサの正に帯電した極板の電荷は、この陽子の電荷である。

電流（伝導電流）は自由電荷の動く量を表す。回路では電線の太さを考えないが、実際の電線や金属板に流れる電流は空間に分布するから伝導電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$  [A/m<sup>2</sup>] (conduction current density)（単に電流密度とよぶこともある）で表す。 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$  は一般に次式で表される。 $\rho_-(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho_+(\mathbf{r}, t)$  の平均の速度をそれぞれ  $\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}_+(\mathbf{r}, t)$  とする。

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \rho_+(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_+(\mathbf{r}, t) + \rho_-(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \quad (2-3)$$

金属導体中で実際に動くのは自由電子なので、自由電子の電荷密度  $\rho_-(\mathbf{r}, t)$  (負) と、その平均速度  $\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t)$  を用いて、(2-3)は次式となる。陽子は動かないので、 $\mathbf{v}_+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$  だからである。

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \rho_-(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \quad (2-4)$$

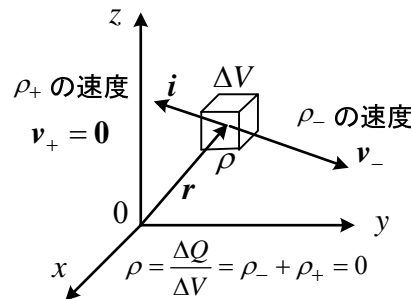


図 2-2 電荷密度と電流密度（金属導体中）

以上のように、金属導体中の電荷密度は0であっても、電流は流れている。

次に、電流が導体中を流れているとき、伝導電流密度  $\mathbf{i}$  と回路で使う電流  $I$  の関係を述べよう。図 2-3 は断面が一様でない導体を流れる電流である。導体の断面を含むように、任意の曲面  $S$ （平面でなく曲面でもよい）を考える。このとき、電流  $I$  は、 $\mathbf{i}$  を用いて次式で求められる。

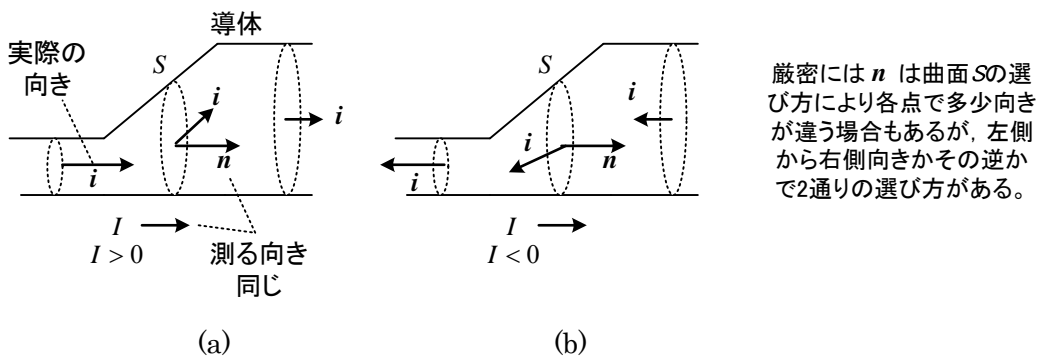


図 2-3 断面が一様でない導体を流れる電流

$$I(t) = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-5)$$

回路で使う電流  $I$  の矢印は、実際の電流の向きではなく、電流を測定する向きを表す。これは、断面  $S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の向きに相当する。電流密度の面  $S$  に垂直な成分を求め、導線の断

面で集めると、どの断面でも同じ電流  $I$  になる。電流密度  $\mathbf{i}$  の矢印は、 $\mathbf{H}, \mathbf{E}$  などのように実際の向きで、測定の向きではない。(b)の場合には、実際の電流が右側から左側へ流れており、 $I < 0$  となる。(a), (b)で、測定の向きつまり  $I, \mathbf{n}$  の矢印は右側から左側向きに選んでもよい。

次に、コンデンサの例で考えてみよう。図 2-4 にコンデンサの電荷と電流を示す。上の極板の電荷を  $Q[C]$  とする(明確にするよう  $\bullet$  印を書く)と次式が成り立つ。 $I'$  の向きなら  $-$  がつく。

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2-6)$$

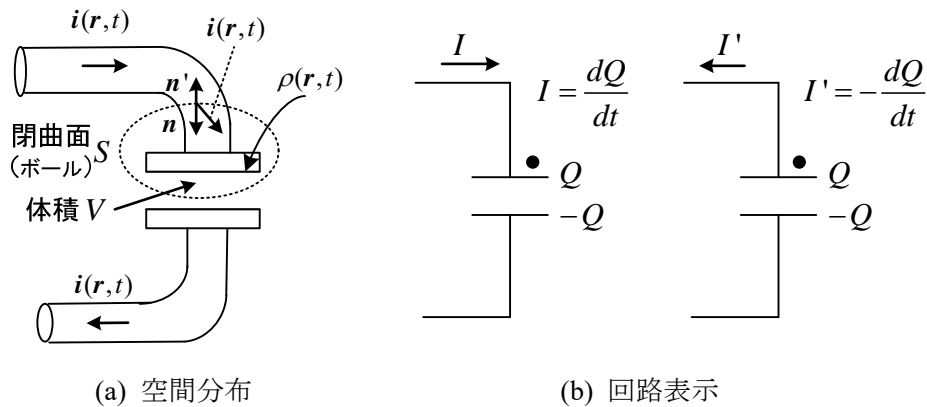


図 2-4 コンデンサの電荷と電流

図 2-4(a)のように、上の極板を囲むように、閉曲面  $S$  を考える。(2-6)の  $I$  と  $Q$  については、

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS, \quad Q = \int_V \rho dV$$

が成立する。コンデンサの場合、厳密には面自由電荷密度  $\sigma[C/m^2]$  しかないが便利のため電荷密度  $\rho[C/m^3]$  があるとしている。なお、閉曲面  $S$  は広いが、 $I$  の積分は電流が流れている導線の部分だけになる。この閉曲面で囲まれた領域の体積空間  $V$  についてガウスの定理を用いる場合、閉曲面  $S$  の外側に向いた単位法線ベクトル  $\mathbf{n}'$  をとらなければならない。 $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$  として (2-6)より

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}' dS + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

となる。左辺第 1 項は面  $S$  から流れ出す電流を意味する。ガウスの定理を用いて

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{i} dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \quad (2-7)$$

となる。偏微分するのは、積分の中では  $\rho(\mathbf{r}, t)$  が場所と時間の関数だからである。

任意の  $V$  で成り立つので、自由電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  と電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$  には各点で次式が成り立つ。

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \textcircled{0}$$

これは電荷保存の法則(charge conservation)または連続の式と呼ばれている。 $\operatorname{div} \mathbf{i}$  は  $\mathbf{i}$  が極めて小さい閉曲面  $S$  (微小体積  $\Delta V$ ) から外に出る電流を集めたものである。実際に電流が流れ出していたら、 $\operatorname{div} \mathbf{i} > 0$  で、その分微小体積  $\Delta V$  の自由電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  が減少することを意味する。

## ○ マクスウェルの方程式（微分形）

以下の式は、どんな物質中(動いていてもよい)でも空間の各点ごとに、ある瞬間に成立する。  
 ただし、物質と物質の境界では偏微分が無限大になるから用いず、後述の境界条件を用いる。

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{①}$$

図に示すように空間に自由電荷密度  $\rho[\text{C}/\text{m}^3]$ （これが湧き出し口（泉）や吸い込み口）が分布し、そこから電束密度  $\mathbf{D}$  (electric flux density)が生じる場合に両者の関係を表すガウスの法則 (Gauss's law)である。コンデンサに電源をつなぐと極板(導体)の表面に電荷（面自由電荷密度  $\sigma[\text{C}/\text{m}^2]$ ）が分布し、正の電荷から負の電荷に向けて電束密度が生じる。

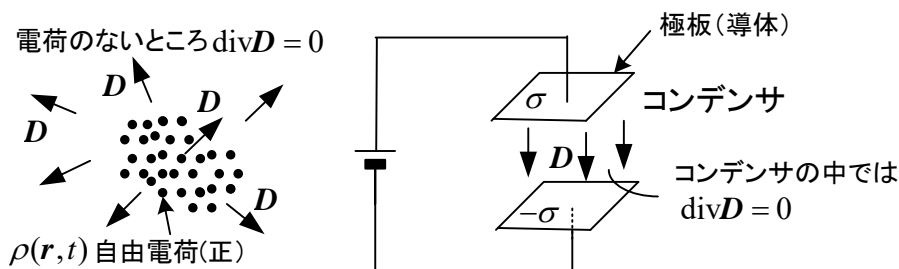


図 2-5 電荷密度による電束密度の発生例

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{②}$$

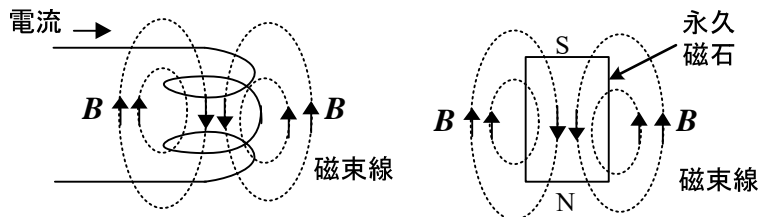


図 2-6 磁束密度の例

電流を流したコイルや永久磁石のまわりには磁束密度  $\mathbf{B}$  (magnetic flux density)が生じる。②は磁束密度には電束密度のような湧き出し口や吸い込み口はなく、 $\mathbf{B}$  の力線である磁束線(line of magnetic flux)は常に閉じている（ループになる）ことを意味する。

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{③}$$

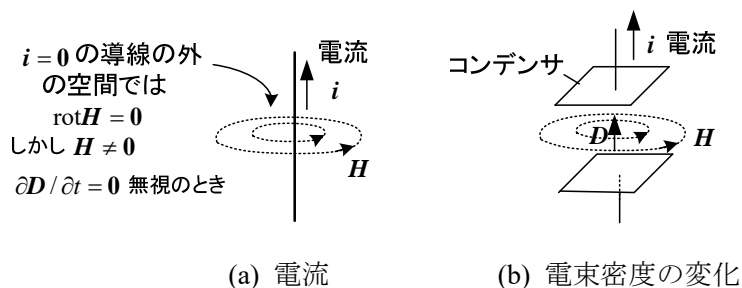


図 2-7 磁界の発生例

③は電流が流れると磁界  $H$  ができるというアンペアの法則(右ねじの法則)や電束密度  $D$  の時間変化  $\partial D / \partial t$  が磁界  $H$  を生じる場合の関係式である。  $\partial D / \partial t$  は変位電流(displacement current)とよばれ、マクスウェルによって発見された。変位電流は電磁波を考えるときにはなくてはならない量である。マクスウェルが電磁波を予見し、ヘルツが実験で確かめた。対流電流  $\rho v$  を考える場合は、③の  $i$  を自由電流密度  $i_f$  (伝導電流と対流電流の和) に変えないといけない。③の覚え方：H が頭で回転すれば愛( $i$ )をダメ( $D$ )にすると( $t$ )。

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{4}$$

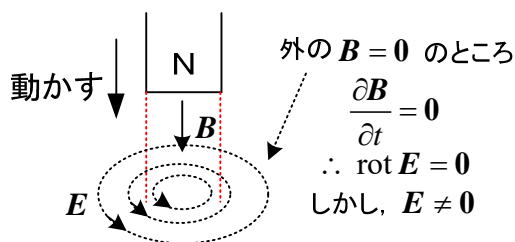


図 2-8 磁束密度の時間変化が作る電界の発生例

④は磁束密度が時間変化すると電界を生じる場合に両者の関係を表す式である。これはファラデーの電磁誘導の法則(Faraday's law of electromagnetic induction)とよばれる。電界の部分に閉じたコイルを置くと電流が流れる。磁束密度の変化がなければ、 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  である。

④の覚え方：胃( $E$ )が回る(腹痛)とビタミン( $B$ )使って( $t$ )マイナス(-)へ。

①～④は独立な式だが、①は①と③から導かれる。数学の公式(付 11)より

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = 0$$

は常に成り立つから、③の  $\text{div}$  をとり

$$0 = \text{div } \mathbf{i} + \text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{D}) = \text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

となって、①が導ける。ただ、①は電荷保存の法則という意味があり、基本式の中に入れている。④の  $\text{div}$  をとり、 $(\partial / \partial t)(\text{div } \mathbf{B}) = 0$  が得られる。しかし、これは②の  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  を意味しない(場所の関数でもよい)。同様に①と③より  $(\partial / \partial t)(\text{div } \mathbf{D} - \rho) = 0$  となるが、これは①と同じではない。ただし、①、②は交流定常の解析で、①、③、④から導出できる(第 7 章で述べる)。

## ○ マクスウェルの方程式 (積分形)

$\text{rot}$  については(1-48)のストークスの定理を用い、 $\text{div}$  については(1-55)のガウスの定理を用いて、ある面や閉路について成り立つ積分形のマクスウェルの方程式を得ることができる。 $\text{rot}$  では開曲面、 $\text{div}$  では閉曲面を考える。積分形は微分形と違い境界を含むことができる。

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \, dV \quad \left( \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS \right) \quad \textcircled{1}'$$

①にガウスの定理を適用して得られる。ガウスの定理を使うとき  $\mathbf{n}$  は外向きを選ぶ。空間に分布した自由電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  のスカラ場によって、電束密度  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  のベクトル場が生じている。空間に任意の閉曲面  $S$  を考えると、 $S$  上の  $\mathbf{D}$  の面積分は、その中  $V$  に含まれる自由電荷密度  $\rho$  の体積分となる。つまり  $\mathbf{D}$  を面上で集めれば、その中にある電荷の総和になるということ。閉曲面の外の  $\rho$  は体積分に関係ないことに注意しよう。なお、 $\mathbf{D}$  は閉曲面の内外の全空間にある。

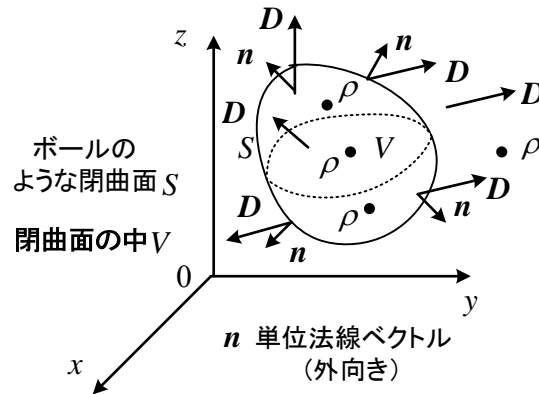


図 2-9 自由電荷が作る電束密度

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \textcircled{2}'$$

②にガウスの定理を適用して得られる。空間に分布した磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  のベクトル場があるとき、空間に任意の閉曲面  $S$  を考えると、 $S$  上にある  $\mathbf{B}$  の面積分は 0 になるということである。 $\mathbf{B}$  は体積  $V$  の中に入る量と出る量が変わらないことを意味する。例えば  $V$  の中にコイルを入れて電流を流したり、あるいは磁石を全部または半分だけ入れても、②'は成り立つ。

このように電荷に相当する磁荷は存在しない。

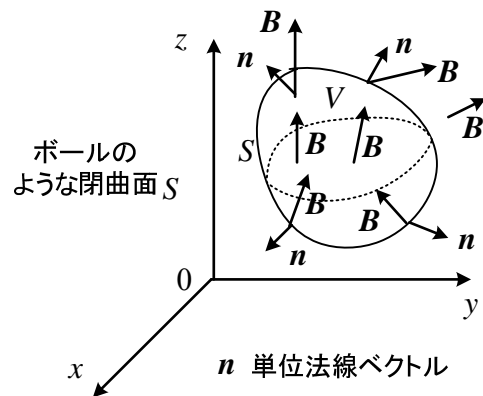


図 2-10 磁束密度

$$\int_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \left( \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \textcircled{3}'$$

③の左辺を任意の閉曲面  $S$  について面積分し、(1-48)のストークスの定理を用いると

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl$$



となる。右辺も同じ開曲面  $S$  で面積分して、③が得られる。これは、アンペアの周回積分の法則 (Ampere's circuital law) とよばれる。開曲面  $S$  は平面とは限らず、ベレー帽のような曲面でもよい。

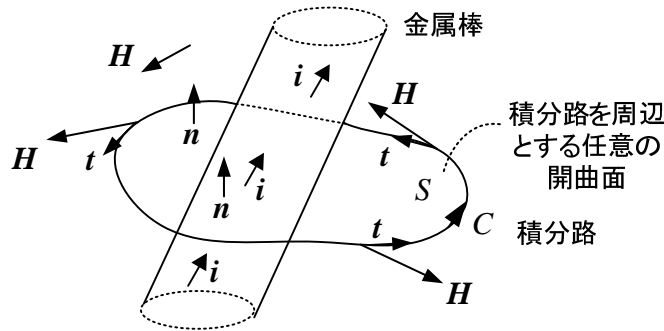


図 2-11 金属棒に分布して流れる電流が作る磁界

図 2-11 は、金属棒に伝導電流密度  $\mathbf{i}$  が分布して流れ、それにより空間に磁界  $\mathbf{H}$  ができる様子を示す。図の様にある積分路  $C$  と、それを周辺としたある開曲面  $S$  をとる。 $\mathbf{n}$  は開曲面  $S$  上の単位法線ベクトルで、 $C$  の向きに右ねじを回したときのねじの進む向きを選ぶ。図 1-13 のストークスの定理を参照のこと。電流  $\mathbf{i}$  が流れるコイルの磁界を計算する場合、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$  は無視されることが多い。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を無視すると

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = I \quad (2-8)$$

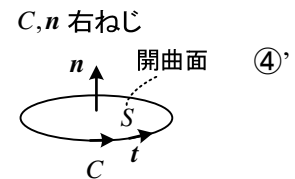
となる。 $I$  は棒に流れる電流である。どんな形の積分路でも、磁界  $\mathbf{H}$  (場所で異なる) を  $C$  上で集めると  $I$  になることを意味する。これはすごいと思う。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を無視すると③より

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (2-9)$$

である。伝導電流密度  $\mathbf{i}$  と  $\text{rot } \mathbf{H}$  が等しい。 $\text{rot}$  は回転と言うので、 $\text{rot } \mathbf{H}$  を回転しているベクトルと思う人はいないだろうか？ 図 2-11 の場合、 $\text{rot } \mathbf{H}$  つまり  $\mathbf{i}$  は回転していない。そして、(2-9) は空間の各点で成立つから電流が流れていない棒の外では  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$  である。 $\text{rot } \mathbf{H}$  は空間の各点ごとの小さな閉路に対する  $\mathbf{H}$  のうず (回転) を回転軸の向きのベクトルとして定義している。

$$V_e(t) = \int_C \mathbf{E}' \cdot \mathbf{t} \, dl = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} \, dl = - \frac{d\phi(t)}{dt}$$

変圧器起電力      速度起電力



ここで、 $V_e(t)$  : 閉路  $C$  に生じる起電力[V]

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2-10)$$

$$\phi(t) : \text{磁束 [Wb] (magnetic flux)} \quad \phi(t) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-11)$$

ファラデーの電磁誘導の法則である。磁束線のことを磁束とよび、(2-11)を全磁束とよぶこともある<sup>(29)</sup>。閉路  $C$  と  $\mathbf{n}$  は右ねじの関係に選ぶ必要がある。④にストークスの定理を適用すると

$$V_e'(t) = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2-12)$$

が得られる。これには変圧器起電力しか含まれていない。④'は(2-12)を含んだ、より一般的な式である。つまり、マクスウェルの方程式以外の内容を含む。そう言うとなんか難しく聞こえるかもしれないが、高校で習う線路の上を銅棒が動く問題にも適用できるようにしたいのである。

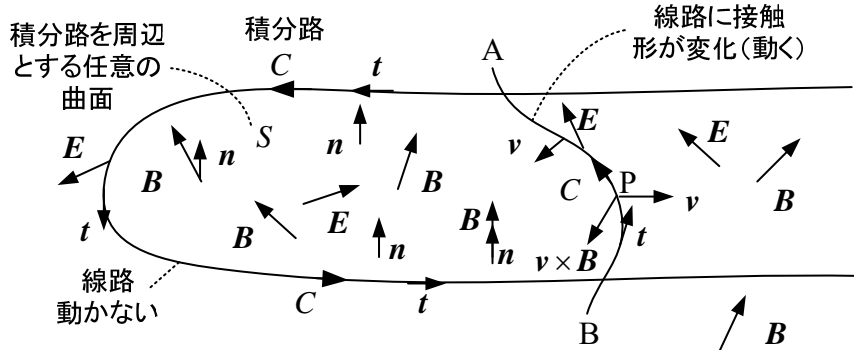


図 2-12 線路に接触しながら形を変え動く線路 AB

動かない線路に接触しながら線路 AB が形を変えて動いている図 2-12 を考える。空間には磁束密度  $B$  の磁界がベクトル場を作っている。 $B$  は場所と時間によって変化するとする。④'に示したように、 $B$  の時間変化は至る所に電界  $E$  のベクトル場を作る。線路 AB の一部を含む図の積分路  $C$  (閉路) を考え、この  $C$  上で電界  $E$  を集めた値は、④'の変圧器起電力(transformer electromotive force)となる。これは、④'の起電力  $V_e$  の一部で、全てではない。速度  $v$  (場所と時間で値は違う) で動く部分に、別の起電力が生じ、この分を加えなくてはならない。動く部分の起電力はベクトル  $v \times B$  の線積分で求められ、速度起電力(speed electromotive force)とよばれる。当然動かない部分には速度起電力は生じない。

磁束密度  $B$  の時間変化がない場合には、④'で、 $\partial B / \partial t = 0$  としてよい。このとき速度起電力は  $-d\phi / dt$  に等しい。高校時代に  $vBl$  と  $-d\phi / dt$  の 2 通りの方法で起電力を求めた人もいるだろう。

図 2-13 に示すように磁束密度  $B$  の中で、速度  $v$  で磁界を切るように棒を動かすと、棒に速度起電力が生じる。速度起電力の実際の向きはフレミングの右手の法則で求まる ( $v \times B$  で考えてもよい)。速度起電力は電池に対応させると分かりやすい。棒に図の極性の速度起電力  $V_e$  (正)の電池ができると考えよう。 $\theta = \pi / 2$  のとき、よく知られた  $V_e = vBl$  が得られる。同じ大きさの起電力が、棒を固定し磁石を逆向きに速度  $|v|$  で動かすときにも生じる。これは磁石の縁に  $\partial B / \partial t$  が生じることから説明できる<sup>(9),(23)</sup>。

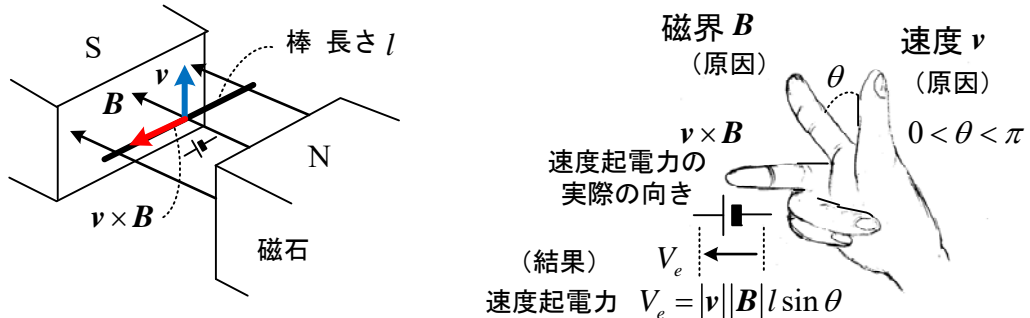


図 2-13 フレミングの右手の法則

(2-10)について簡単に述べておく。 $C$ の一部(全部でもよい)が磁界の中を光速に比べて無視できる速度で動くとき、 $C$ 上の $P$ 点から見た $P$ 点の電界を $\mathbf{E}'$ とする。この $\mathbf{E}'$ を地球上に固定した静止座標系の量 $\mathbf{E}, \mathbf{v}, \mathbf{B}$  ( $P$ 点の値)で表すと(2-10)となることが特殊相対性理論から導かれる<sup>(15),(28)</sup>。起電力は、たくさんの点の電界 $\mathbf{E}'$ を $C$ 上で線積分して得られ、それが④になる。 $P$ 点から観測するとき、 $P$ 点の $\mathbf{v}$ のことはわからず、単に電界が $\mathbf{E}'$ として観測され、静止座標系で観測する $P$ 点の電界 $\mathbf{E}$ とは値が異なる。観測する座標系により電界と磁界は相互に入れ替わるのである。 $\mathbf{v}$ は点で違うから座標系も点ごとに違うと考えるべきだろう(後で少し詳しく述べる)。起電力は動いている回路で観測されるので $\mathbf{E}'$ の線積分となる。磁束 $\phi$ を用いると

$$V_e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2-13)$$

となることが以下の様にして導出できる。非常に簡単な式となり感動的である。

図 2-14 に示すように磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ のベクトル場を速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (点ごとに異なる)で動く閉路 $C$ を考える。すなわち時間 $t$ での閉路 $C$ が、時間 $t + \Delta t$ での閉路 $C'$ に動くとする。 $S_1, S_2$ は、それぞれ $C, C'$ を周とする任意の面である。

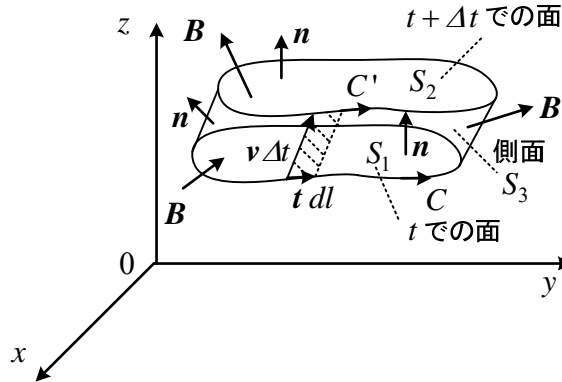


図 2-14 磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ のベクトル場を速度 $\mathbf{v}$  ( $C$ 上の点で異なる)で動く閉路

$S_1, S_2$ を通る磁束の変化分を $\Delta\phi$ とすると、(2-11)より

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{S_2} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-14) \end{aligned}$$

となる。第1項と第4項の和は0である。時間 $t + \Delta t$ における $\mathbf{B}(t + \Delta t)$ を用いて、 $S_1, S_2$ と、その側面 $S_3$ からなる閉曲面に磁束密度の連続性を表す②'を適用すると次式がえられる。 $S_1$ では外向き法線ベクトルを取らねばならず、マイナスがつく。②'は同じ時間で適用しなくてはならない。

$$\int_S \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{S_1} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

これを(2-14)の右辺3, 4項に代入すると

$$\Delta\phi = \int_{S_1} \{\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)\} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_3} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。図より  $S_3$  においては、接線  $\mathbf{t}$  と速度  $\mathbf{v}$  の外積  $\mathbf{t} \times \mathbf{v}$  が外向きの  $\mathbf{n}$  の向きと一致し、 $\mathbf{t} d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$  の大きさが平行四辺形の面積だから  $dS$  と考えられるので

$$\mathbf{n} dS = \mathbf{t} d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$$

が成り立つ。よって

$$\Delta\phi = \int_{S_1} \{\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)\} \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \int_C \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) d\mathbf{l}$$

テイラー展開した

$$\mathbf{B}(t+\Delta t) \approx \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t$$

を代入する ((1-26)参照)。(Δt)<sup>2</sup> の項を無視して、

$$\Delta\phi = \Delta t \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \int_C \mathbf{B}(t) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) d\mathbf{l}$$

を得る。右辺第 2 項に公式(1-20)より  $\mathbf{B}(t) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(t))$  を用いて、次式が得られる。

$$V_e = -\frac{d\phi}{dt} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(t)) \cdot \mathbf{t} d\mathbf{l} \quad (2-15)$$

(2-15)がファラデーの電磁誘導の法則で、変圧器起電力と速度起電力の両方を含む。(2-11)で面  $S$  が時間と共に変化するので、(2-13)で微分するとき、単純に積分の中に入れられない。この面  $S$  の変化が  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  の項になるのである。(2-7)では体積  $V$  が変化しないので積分の中に入れられた。

なお、(2-15)を使用する場合、速度起電力の速度  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  は物質の速度で、線積分を行う閉路  $C$  が移動物質を含むとき、 $C$  は移動物質と一緒に動き  $C$  上の物質が変わらないようにする<sup>(22)</sup>。

## ○ 電荷に働く力

電荷に働く力を述べる。図 2-15 に示すように、電界  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  と磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  のベクトル場で、 $q$  [C] の荷電微小粒子が、速度  $\mathbf{v}(t)$  [m/s] で動いているとき、微小粒子に働く力  $\mathbf{F}(t)$  [N] は次式で与えられる。体積力  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  [N/m<sup>3</sup>] の場合は、 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  を用い(2-16)の表現となる<sup>(15)</sup>。

$$\mathbf{F}(t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad \text{⑤}$$

⑤はローレンツ力(Lorentz force)と呼ばれている。 $q$  とともに  $\mathbf{v}$  で動く点から見れば、電界  $\mathbf{E}'$  が

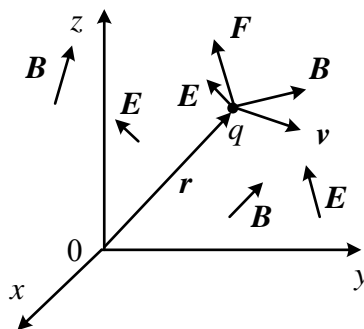


図 2-15 電荷に働く力

観測されるだけで、止まっている電荷に  $q\mathbf{E}'$  ( $\mathbf{E}'$ は(2-10)と同じ) のクーロン力が働く。当然ながら静止座標系での電磁界で表した力⑤と等しい。

実用上重要な電流に働く力をローレンツ力より導く。

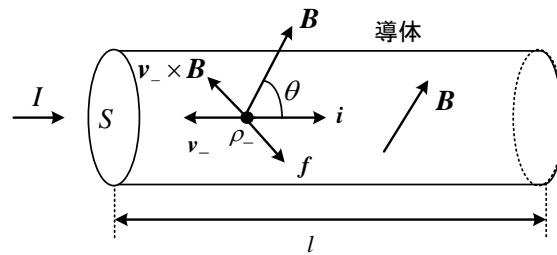


図 2-16 電流に働く力

図 2-16 のように、磁束密度  $\mathbf{B}[T]$  の磁界中で断面積  $S[m^2]$  の導体に一様に伝導電流密度  $\mathbf{i}[A/m^2]$  の電流が流れているとする。 $\mathbf{i}$  は(2-4)で与えられ、自由電荷密度  $\rho_- < 0$  だから、 $\mathbf{i}$  の向きは図のようになる。⑤のローレンツ力より、 $\rho_-$  に働く単位体積当たりの力  $\mathbf{f}[N/m^3]$  は

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho_-(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2-16)$$

となる。 $\rho_- < 0$  だから、 $\mathbf{f}$  の向きは図のようになる。(2-4)を(2-16)へ代入して

$$\mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (2-17)$$

となる。断面積  $S[m^2]$ 、長さ  $l[m]$  の体積  $V$  の部分の導体に働く力  $\mathbf{F}[N]$  は  $\mathbf{f}$  がどこでも一定と仮定して単純に体積を掛け、 $S\mathbf{i} = \mathbf{I}[A]$  とおいて次式で求められる。

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{i} \times \mathbf{B} dV = S l \mathbf{i} \times \mathbf{B} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} l \quad (2-18)$$

$\mathbf{i}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\mathbf{i} \times \mathbf{B} = (|\mathbf{i}| |\mathbf{B}| \sin \theta) \mathbf{e} \quad (2-19)$$

ここで、 $\mathbf{e}$  は  $\mathbf{f}$  方向の単位ベクトルである。大きさを  $|\mathbf{F}| = F, |S\mathbf{i}| = |\mathbf{I}| = I, |\mathbf{B}| = B$  とおくと、

$$F = I B \sin \theta \quad (2-20)$$

となり、向きはフレミングの左手の法則が有名である。 $\mathbf{i}$  と  $\mathbf{B}$  が直交している場合

$$F = I B l \quad [N] \quad (2-21)$$

となる。直線電流  $\mathbf{I}$  が作る磁界と電流  $\mathbf{I}$  による自己力は直流の場合 0 で、交流の場合も極めて小さく (電磁波放射の反作用)、 $\mathbf{B}$  は磁石だけが作る外部磁界としてよい<sup>(15)</sup>。

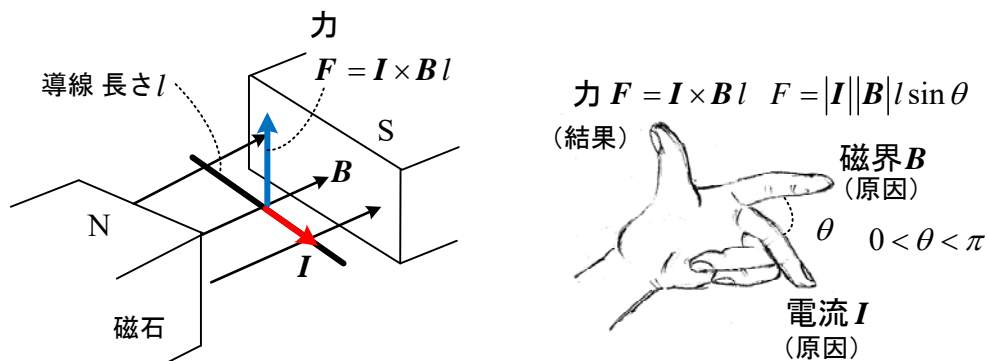


図 2-17 フレミングの左手の法則

## ○ 物質の式

これまで述べたマクスウェルの方程式は、空間を占める物質が何であっても成り立つ。実は物質がある場合を想定して、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$  の4つの量を考えているのである。

多くの物質に関して、以下の関係式が成り立つとして問題を解くことが多い。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{⑥}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad \text{⑦}$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \kappa (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t)) \quad \text{⑧}$$

ここで、 $\varepsilon$  : 誘電率(dielectric constant) [F/m],  $\mu$  : 透磁率(permeability) [H/m],  
 $\kappa$  : 導電率 (conductivity)[S/m]

導電率 $\kappa$ (カッパ)は $\sigma$ の記号で書かれることが多いが、面電荷密度に $\sigma$ の記号を使うのでこの記号とする。 $\mathbf{E}_e$ は電池の等価な電界であるが、説明すべきことが多いので第3章で詳しく述べる。

⑥~⑧の使用に関し、以下に注意事項をまとめておく。

(1)真空中(空気中もほぼ等しい)の $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ の値は、以下のようになる。

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}, \quad \kappa_0 = 0$$

真空中の $\varepsilon_0$ と $\mu_0$ は、真空中の光速 $c$ (speed of light in vacuum)と次の関係がある。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(2) 空間には、空気の部分、金属の部分、絶縁物の部分などいろいろの状況がある。その部分ごとに、 $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ も異なる値として扱う必要がある。永久磁石については、⑦は成立しない。

表 2-1 誘電率, 透磁率, 導電率の目安

	誘電率 $\varepsilon$ [F/m]	透磁率 $\mu$ [H/m]	導電率 $\kappa$ [S/m]
真空	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\mu = \mu_0$	$\kappa = 0$
空気	$\varepsilon \approx \varepsilon_0$	$\mu \approx \mu_0$	$\kappa \approx 0$
銅 (導体)	$\varepsilon_0$ 程度*	$\mu \approx \mu_0$	$5.9 \times 10^7$ (20°C)
鉄 (磁性体)	$\varepsilon_0$ 程度*	$\mu \approx 5 \times 10^3 \mu_0$	$1.0 \times 10^7$ (20°C)
磁器 (誘電体)	$\varepsilon \approx 3000 \varepsilon_0$ チタン酸バリウム	$\mu \approx \mu_0$	$10^{-14}$

\* 金属(銅や鉄)の誘電率は測定できず、推定値である。

(3) ⑧は考える物質（空間）ごとに適宜組み合わせで使用する。例えば、動いていない金属中では  $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$  でよい。⑧をオームの法則(Ohm's law)とよぶ。伝導電流ではオームの法則が成立するが、対流電流では成立しない。伝導電流密度  $\mathbf{i}$  に関して

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_c \quad (2-22)$$

と空間を2つに分けて考えることがある。 $\mathbf{i}_0$ は伝導電流ではあるが問題を解くときに既に値がわかっている電流で、強制電流とよぶ。一方、 $\mathbf{i}_c$ は⑧の関係を利用して問題を解く。

⑥～⑧は測定に基づく近似式であり(共変性が成立しない)、自然界の法則を記述するマクスウェルの方程式やローレンツ力とは同列に扱うことはできない。これに関して簡単に述べよう。

速度  $\mathbf{v}$  で動いている物質中の点について、⑥は次式で表される。以下の関係も含め、これらは1次近似のローレンツ変換\*とアインシュタインの特殊相対性理論から導かれる<sup>(15),(28)</sup>。

$$\mathbf{D} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c^2} = \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{ここで, } c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (2-23)$$

特殊相対性理論は、互いに等速運動をしているすべての座標系(慣性系)でマクスウェルの方程式が全く同じ形で表される共変性(covariance)と、光速不変の原理からなる。(2-23)の  $\mathbf{D}, \mathbf{E}$  は静止座標系で観測した値であるが、物質と共に動く座標系で観測した  $\mathbf{D}', \mathbf{E}'$  を用いると、止まって見えて  $\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}'$  が成立する。(2-23)で左辺の第2項は光速に比べ遅い運動の場合は小さく、右辺の第2項は誘電体が動く問題を扱わない限り考える必要はない。よって、⑥を使うことが多い。

速度  $\mathbf{v}$  で動いている物質中の点については、⑦の関係は、次式で表される。

$$\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} = \mu(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad \text{ここで, } c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (2-24)$$

動く点と共に動く座標系の値  $\mathbf{B}', \mathbf{H}'$  を用いると、止まって見えて  $\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}'$  が成立する。左辺の第2項は光速に比べ遅い運動の場合には小さく、準静的磁界系の問題では右辺の第2項は第1項に比べて無視でき、動いている物質中でも⑦を用いてよい。

速度  $\mathbf{v}$  で動いている物質中の点のオームの法則は、その点と共に動く座標系でみると、止まって見えて  $\mathbf{i}' = \kappa \mathbf{E}'$  が成立する。これを静止座標系の量で表すと、 $\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  と表せる。伝導電流については、 $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$  が成立する。新たに増える等価な電界  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  を考慮する必要があるが、⑧ではこれを考慮している。対流電流  $\rho \mathbf{v}$  を考慮するには、③の  $\mathbf{i}$  を  $\mathbf{i}_f = \mathbf{i} + \rho \mathbf{v}$  に置き換えればよい。このとき、 $\mathbf{i}_f - \rho \mathbf{v} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  が成立し、左辺は伝導電流  $\mathbf{i}$  だから、⑧と等しくなる。

\* 座標変換式は、 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, t' = t - \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$  である<sup>(28)</sup>。'の付いた量は物質と共に速度  $\mathbf{v}$  で等速度直線運動する座標系から見た量である。厳密には時間も速度で変る。(2-23)などは、微小時間間隔、微小領域(点)についてしか成り立たないが、場所ごとに違った速度の座標系を考えると、 $\mathbf{v}$  は任意の速度  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  と考えてよいであろう。例えば教科書によく見られる第6章の例題9は場所で速度が異なる。

## ○ 電位とベクトルポテンシャル

マクスウェルの方程式を使って問題を解く場合、ポテンシャルを利用することがある。

(付11)の  $\text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) = 0$  が常に成り立つことから②より

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2-25)$$

と置くことができる。 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャル(vector potential)と呼ばれる。(2-25)を④に代入すると次式が得られる。

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

(付 10)より、 $\text{rot}(\text{grad}V) = \mathbf{0}$  が常に成り立つことから、次式が得られる。 $-\text{grad}V$  の $-$ は $+$ でもよいが慣用による。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-26)$$

ここで、(記号“ $\equiv$ ”は定義の意味で使用，以下同様)

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \equiv -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) \quad (2-27)$$

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \equiv -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-28)$$

と定義し、 $\mathbf{E}_c$  : クーロン電界(coulomb electric field),  $\mathbf{E}_b$  : 誘導電界(induced electric field)とよぶことにする。このような言葉の定義は一般の教科書では見られないようである。少ない例ではあるが、宮副は、端子が開放されたコイルの電磁誘導に関し以下の様に述べている<sup>(13)</sup>。“導体中に誘導電界が誘導されると電荷が動き、電荷分布が変わるので、クーロン界ができる”。また、“電流が0のときオームの法則から電界も0で、誘導電界とクーロン界はつりあっている”。この場合のクーロン界は時間的に変化し、静電界ではない。(2-26)より電界は次式で表せる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \quad \textcircled{9}$$

なお、 $\mathbf{E}_c$ ,  $\mathbf{E}_b$ は後述のローレンツゲージを前提とする。定義した(2-27)のクーロン電界では、時間的変化も考えているので、時間的変化がない静電界を特別な場合として含む。 $V(\mathbf{r}, t)$ を電位 (electric potential)と呼ぶ。物理学で $V$ はスカラポテンシャルとよばれ $\phi$ の記号で書かれることが多い。

(付 10)より  $\text{rot}(\text{grad}V) = \mathbf{0}$  が常に成り立つことから、(2-27)の定義より次式が成立つ。

$$\text{rot} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (2-29)$$

以下に、電荷がクーロン電界を作り、電流が誘導電界を作ることを説明しよう。電位とベクトルポテンシャルを定義するとき、②と④を用いた。よって、①と③を使う必要がある。⑥、⑦、⑧の $\epsilon, \mu, \kappa$ は、ここで考える空間で一定と仮定する。また、⑧において、動く物体はなく $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，電池は考えず $\mathbf{E}_e = \mathbf{0}$ とする。この結果、(2-22)より

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_c = \mathbf{i}_0 + \kappa \mathbf{E}$$

となる。これを③に代入して、

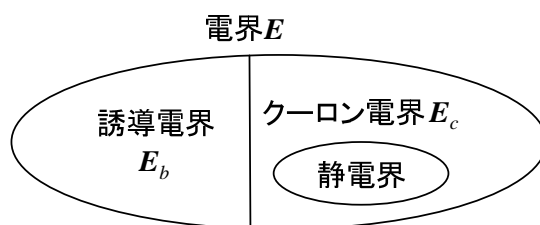


図 2-18 電界の分類



$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}_0 + \kappa \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2-30)$$

となる。⑥, ⑦, (2-25), (2-26)を用いて  $\mathbf{A}, V$  だけの式にすると

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{i}_0 - \kappa(\text{grad}V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \quad (2-31)$$

が得られる。ここで, (付 13)のベクトルの公式の定義より

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A})$$

を用いると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{i}_0 + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \mu \kappa V) \quad (2-32)$$

となる。①については,

$$\varepsilon \text{div}(-\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = \rho$$

である。ここで(付 12)のベクトル公式

$$\text{div}(\text{grad}V) = \nabla^2 V$$

を用いると, 次式が得られる。

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2-33)$$

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  を(2-25)で定義したが, ヘルムホルツの定理より  $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  を選ぶ自由度が残されていた。そこで(2-32)の  $\text{grad}$  の括弧の中を 0 とする次式の  $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  を選ぶ。

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mu \varepsilon \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu \kappa V(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2-34)$$

これはローレンツゲージ(Lorenz gage)と呼ばれる<sup>(3),(14)</sup>。(2-32), (2-33)は次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu \mathbf{i}_0(\mathbf{r}, t) \quad (2-35)$$

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon} \quad (2-36)$$

ローレンツゲージを用いると, 時間変化する場合においても, 電流によってベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  が作られ, 電荷によって電位  $V(\mathbf{r}, t)$  が作られると見える。 $\kappa = 0$  の場合, 無限に広い空間で限られた領域に電流と電荷があるときの (2-35), (2-36)の解が遅延ポテンシャルとして導出されている<sup>(2),(28)</sup>。この解は第 7 章で述べる。なお, ローレンツ力(Lorentz force)とは別人である。

(2-35), (2-36)はローレンツゲージが前提であった。飯田は, 広い物理学の解析の基礎となる条件はローレンツゲージ以外になく, 物理的条件が与えられた場合, 物理的実在としての  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $V(\mathbf{r}, t)$  は一意に決ると述べている<sup>(5)</sup>。本テキストではローレンツゲージのみ使用する。

(2-35)の  $\text{div}$  をとり, (2-36)を時間で偏微分して, ⑩の電荷保存の法則

$$\text{div } \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

に代入すると次式が得られる。

$$(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2})(\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \varepsilon\mu \frac{\partial V(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mu\kappa V(\mathbf{r},t)) = 0 \quad (2-37)$$

ローレンツゲージは電荷保存則と対応している。山下は、(2-34)で関係づけられているから、(2-35)か(2-36)のどちらか都合の良い方を解けばよいと述べている<sup>(10)</sup>。

## ○\* エネルギーと電力

$$\textcircled{3}\text{より } \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \text{であった。}\textcircled{3}\text{の各項と}\mathbf{E}\text{の内積をとって } \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \text{rot}\mathbf{H} = 0$$

である。ここで、(付7)を用い、 $\textcircled{4}$ を代入して次式が得られる。

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot}\mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \text{rot}\mathbf{H}$$

両式から、次式が得られる。

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (2-38)$$

$\textcircled{8}$ より、電流が流れている空間で

$$\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e) \equiv \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) \quad (2-39)$$

とおくと<sup>(15)</sup>、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = \left(\frac{\mathbf{i}}{\kappa} - \mathbf{E}_s\right) \cdot \mathbf{i}$  だから

$$\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{i} = \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad [\text{W/m}^3] \quad (2-40)$$

(2-40)を領域 $V$ について体積分すると次式が得られる（右辺の第4項にガウスの定理を使用）。

$$\int_V \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{i} dV = \int_V \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV + \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) dV + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad [\text{W}] \quad (2-41)$$

両辺は電力(electric power)を表す。右辺第2項は以下のように変形できる<sup>(28)</sup>。

$$\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \int_0^t \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial \tau} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial \tau}\right) d\tau dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dV$$

ここで、 $t=0$ で $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ とすると

$$w_e = \int_0^t \mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial \tau} d\tau = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \quad [\text{J/m}^3] \quad : \text{単位体積中の電界のエネルギー} \quad (2-42)$$

$$w_m = \int_0^t \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial \tau} d\tau = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad [\text{J/m}^3] \quad : \text{単位体積中の磁界のエネルギー} \quad (2-43)$$

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{W/m}^2] \quad : \text{ポインティングベクトル(Poynting vector)} \quad (2-44)$$

(2-42), (2-43)の $d\mathbf{D}, d\mathbf{B}$ は全微分だが、時間の変化のみが考えられている。 $\textcircled{6}$ ,  $\textcircled{7}$ で $\varepsilon, \mu$ が $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ の関数でない線形の場合(場所 $\mathbf{r}$ の関数でもよい)次式となる。

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad [\text{J/m}^3], \quad w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu(\mathbf{r})}{2} |\mathbf{H}|^2 \quad [\text{J/m}^3] \quad (2-45)$$

(2-41)は図 2-19 に示す閉曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  についての電力の保存則を表している。

左辺：発電あるいは電動にともなう電力，電池が供給する電力

右辺第 1 項：抵抗で消費される電力

右辺第 2 項：単位時間に蓄積される電磁界のエネルギー(すなわち電力)。蓄積されている電磁界のエネルギーは  $w_e, w_m$  を領域  $V$  で体積分すればよい。

右辺第 3 項：領域  $V$  から空間へ放射される電力

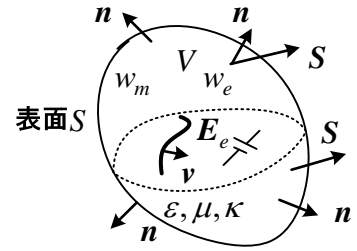


図 2-19 電力の保存

## ○\* 物質に働く電磁力

力としては機械的な力も考えなくてはならないが，まず電磁力について，今井の著書を基に説明しよう<sup>(19)</sup>。天下り的ではあるが，任意の閉曲面  $S$  の内部の領域  $V$  に存在する物質に働く電磁力  $F$  は，次式で与えられる<sup>(15),(19)</sup>。( , , )は成分表示のベクトルである。

$$F = \int_V f dV = \int_S (T_x \cdot n, T_y \cdot n, T_z \cdot n) dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_V D \times B dV \quad [N] \quad (2-46)$$

ここでの体積分は成分ごとの演算である。(2-46)の  $f$  は微小部分に作用する単位体積当たりの力である。 $D \times B$  は電磁運動量密度と解釈され，真空中でも存在する。この項は物質中では他の項に比べて小さく無視できる<sup>(24)</sup>。 $T_x, T_y, T_z$  の各成分はマクスウェルの応力と呼ばれ，次式で与えられる<sup>(2),(3),(11),(15),(17),(19),(20),(22),(23),(24)</sup>。マクスウェルの応力から求まる力から，電磁波で運ばれる電磁運動量に相当する項を引き算して物体に働く力が求められる。

$$T_x = \left( E_x D_x - \frac{1}{2} E \cdot D + H_x B_x - \frac{1}{2} H \cdot B, E_x D_y + H_x B_y, E_x D_z + H_x B_z \right) \quad (2-47)$$

$$T_y = \left( E_y D_x + H_y B_x, E_y D_y - \frac{1}{2} E \cdot D + H_y B_y - \frac{1}{2} H \cdot B, E_y D_z + H_y B_z \right) \quad (2-48)$$

$$T_z = \left( E_z D_x + H_z B_x, E_z D_y + H_z B_y, E_z D_z - \frac{1}{2} E \cdot D + H_z B_z - \frac{1}{2} H \cdot B \right) \quad (2-49)$$

ここで， $E \cdot D = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z$ ， $H \cdot B = H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z$

これらを用い，次式の行列  $T$  はマクスウェルの応力テンソル(Maxwell stress tensor)とよばれている。

$$T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad [N/m^2 = Pa] \quad (2-50)$$

ここで， $T_{xx} = E_x D_x - (1/2)E \cdot D + H_x B_x - (1/2)H \cdot B$ ， $T_{xy} = E_x D_y + H_x B_y$  などで，各行が対応する。ガウスの定理を用いて，(2-46)の右辺第 1 項は体積分で表すことができる。

$$\int_S (T_x \cdot n, T_y \cdot n, T_z \cdot n) dS = \int_V (\text{div} T_x, \text{div} T_y, \text{div} T_z) dV \quad (2-51)$$

(2-51)を成分に分けて書くと、(2-46)の $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ の項を無視して、我々が知りたい力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は次式で表せる。 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は領域 $V$ の表面 $S$ の外向き単位法線ベクトルである。表面 $S$ にはガウスの定理を適用するからガウス面とよぶ。

$$F_x = \int_S (T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z) dS = \int_V \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dV \quad [\text{N}] \quad (2-52)$$

$$F_y = \int_S (T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z) dS = \int_V \left( \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) dV \quad [\text{N}] \quad (2-53)$$

$$F_z = \int_S (T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z) dS = \int_V \left( \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) dV \quad [\text{N}] \quad (2-54)$$

$\mathbf{F}$ の計算について、図2-20に一例を示す。一般に**応力(stress)**は、ある面で考えている側（ここでは $V$ 内の微小立方体側）が外部から受ける単位面積当たりの力をいう。 $T_{xx} > 0$ のとき色塗りの面の外側に向かって働く引張り応力（引張られる）、 $T_{xx} < 0$ なら圧縮応力（圧縮される）となる。

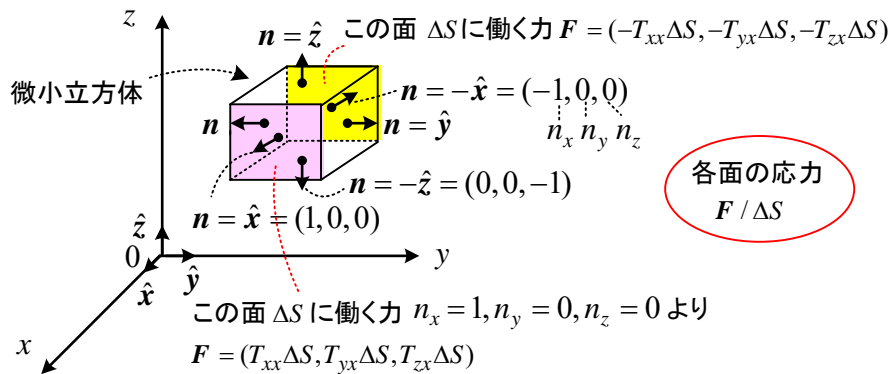


図 2-20 微小立方体(各面の面積 $\Delta S$ )の表面に電磁界が及ぼす応力

線形で等方性物質については、 $\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}$  より(2-46)の力密度 $\mathbf{f}$ は次式で求められる。式の導出は後で述べる。 $\epsilon$ 、 $\mu$ は不均質でもよい。

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2}E^2 \text{grad}\epsilon - \frac{1}{2}H^2 \text{grad}\mu \quad [\text{N}/\text{m}^3] \quad (2-55)$$

ただし、 $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 、 $H^2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$

(2-55)の右辺第1項と第2項は自由電荷に働くローレンツ力である。第2項がフレミングの左手の法則に相当する。第3項と第4項は、束縛電荷に働く力で、物質の境界でも生じる。この式は多くの教科書に見られる<sup>(1),(2),(3),(4),(11),(15),(16),(17),(19),(22),(24)</sup>。特に、今井は機械的な応力や圧力も同時に考えて詳しく論じている<sup>(19)</sup>。なお、(2-55)で**電気ひずみ**と**磁気ひずみ**の項を考える教科書が多いが、本テキストでは今井の考え方に従い電気ひずみと磁気ひずみは電磁界に影響される圧力と考える。

(2-55)はエネルギーの変化を考えて導出することもできるが<sup>(2),(3)</sup>、線形で等方性物質の仮定を行って(2-46)から導こう。(2-47)より

$$\text{div}T_x = \frac{\partial}{\partial x}(E_x D_x + H_x B_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x D_y + H_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x D_z + H_x B_z)$$

$$\begin{aligned}
&= E_x \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + H_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\
&\quad + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right)
\end{aligned}$$

マクスウェルの方程式①, ②を用いて

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_x = E_x \rho + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

$$\text{ところで, } \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ D_x & D_y & D_z \\ \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z & \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x & \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y \end{vmatrix}$$

よって, マクスウェルの方程式③, ④を用いて,  $x$ 成分について

$$D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = -(\mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_x + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z} = -(\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_x + B_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial H_z}{\partial x} = -(\mathbf{B} \times (\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}))_x + B_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

を得る。( ) $_x$ は $x$ 成分を表す。従って次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{T}_x &= E_x \rho + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \\
&\quad + (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})_x + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right)
\end{aligned}$$

これは一般的に成立する。線形で等方性物質については,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  より

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{T}_x &= E_x \rho + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon E^2 + \mu H^2) + (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})_x \\
&= E_x \rho + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x - \frac{E^2}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{H^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x} + (\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})_x + (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})_x
\end{aligned}$$

同様に,  $\operatorname{div} \mathbf{T}_y, \operatorname{div} \mathbf{T}_z$  が求まるので, (2-46), (2-51)より

$$\mathbf{f} = (\operatorname{div} \mathbf{T}_x, \operatorname{div} \mathbf{T}_y, \operatorname{div} \mathbf{T}_z) - \frac{\partial (\mathbf{D} \times \mathbf{B})}{\partial t} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad} \epsilon - \frac{H^2}{2} \operatorname{grad} \mu \quad [\text{N/m}^3] \quad (2-56)$$

となり, (2-55)が得られる。

物質に働く力密度(体積力)としては, 機械的力を含めて, 静止状態で次式が成立する<sup>(19)</sup>。

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}_x^{(m)}, \operatorname{div} \mathbf{T}_y^{(m)}, \operatorname{div} \mathbf{T}_z^{(m)}) + \rho_m \mathbf{K} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad [\text{N/m}^3] \quad (2-57)$$

左辺第1項は機械的応力 $\mathbf{T}_x^{(m)}, \mathbf{T}_y^{(m)}, \mathbf{T}_z^{(m)}$  [N/m<sup>2</sup>]による体積力で, 液体の場合は $-\operatorname{grad} p$  ( $p$  [N/m<sup>2</sup>]: 圧力)と等しい。第2項は外力(重力等)で,  $\rho_m$  [kg/m<sup>3</sup>]は物質の密度である。機械的応力もマクスウェルの応力と同様(2-50)のテンソル形式で表現される。(2-57)において物質中の自由電荷や電流が0で, かつ誘電率と透磁率が変化しない部分では $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ )である<sup>(19)</sup>。

## ○ 境界条件

異なる物質が空間を占めるとき、その境界ではどのような関係式が成り立つであろうか？ $\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{D}$  自体とその時間微分は境界で無限になることはないが、それらの  $\text{rot}, \text{div}$  は偏微分するので無限になることがある。よって微分形のマクスウェルの方程式ではなく、その積分形を用いて境界条件(boundary condition)を導出する。先に結果を示し、例題で証明する。 $\text{div}$  の式では垂直成分、 $\text{rot}$  の式では接線方向成分について境界条件が得られる。境界条件とは境界で成り立つマクスウェルの方程式といえよう。微分形のマクスウェルの方程式を解くとき境界条件が必要となり重要である。完全導体の場合を除き、境界条件はその多くが電磁界の時間変化に関係ない。

まず、磁界  $\mathbf{H}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  については、境界面の任意の点(よって位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は境界面上のみを表す)について次式の境界条件が成り立つ。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}_s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{境界面の接線方向}) \quad (2-58)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{境界面に垂直方向}) \quad (2-59)$$

ここで、 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  はそれぞれ境界面の点 P の媒質 1 側、2 側の磁界である。 $\mathbf{n}$  は境界面に垂直な単位法線ベクトルで、図のように媒質 1 から 2 に向けた向きである。 $\mathbf{i}_s [\text{A/m}]$  は境界面に流れる単位長あたり(単位に注意)の面伝導電流密度(surface conduction current density)を表し、磁化電流密度は含まれない。図 2-21(a)には、媒質 1 から媒質 2 に移ったとき磁界が変化する様子を示している。本来 P 点近傍の磁界だから、(b)のように 2 つに分けて考える。 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2, \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1$  は外積の定義より、いずれも境界面上にある。これらの差が面電流密度だから、(c)の図が得られる。 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2, \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1$  の大きさは、それぞれ  $\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1$  の面に平行な方向(接線方向という)成分の大きさである。

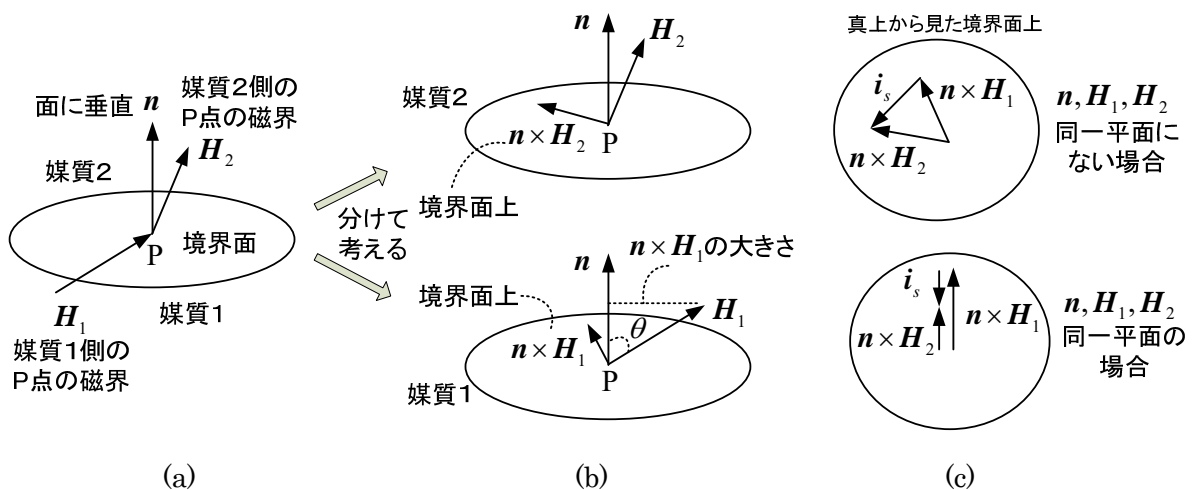


図 2-21 磁界  $\mathbf{H}$  の境界条件

$|\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1| = |\mathbf{n}| |\mathbf{H}_1| \sin \theta = H_1 \sin \theta$  である。面電流があると、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{H}_2$  が作る面と、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{H}_1$  が作る面は必ずしも同じにならないだろう。面電流が流れていない場合、 $\mathbf{n}, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1$  は同一平面にある。この場合を図 2-22 に示し、磁界の接線成分は等しくなる。(2-58)の証明は例題 1 で述べる。

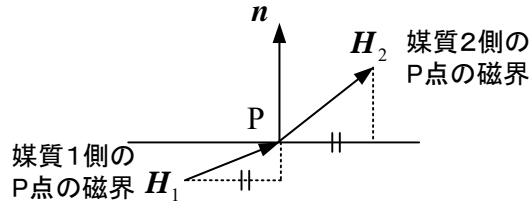


図 2-22  $n, H_2, H_1$  を含む面で切った断面図 (面電流がない場合)

磁束密度  $B$  について, (2-59) は図 2-23 に示すように垂直方向成分が等しいことを表す。等方性の場合  $B_1 = \mu_1 H_1, B_2 = \mu_2 H_2$  より,  $B_1$  と  $H_1$  は同じ向き,  $B_2$  と  $H_2$  は同じ向きである。

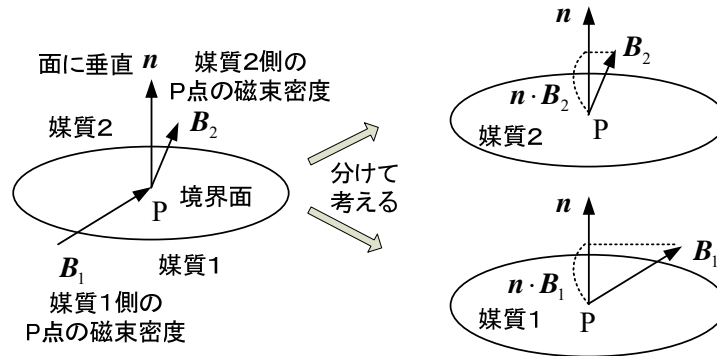


図 2-23 磁束密度  $B$  の境界条件

面伝導電流が流れていない場合, 図 2-22 を詳しく書くと, 図 2-24 のようになる。各ベクトルは全て同じ平面にある。このとき, (2-58), (2-59) より, (a),(b)いずれの場合でも

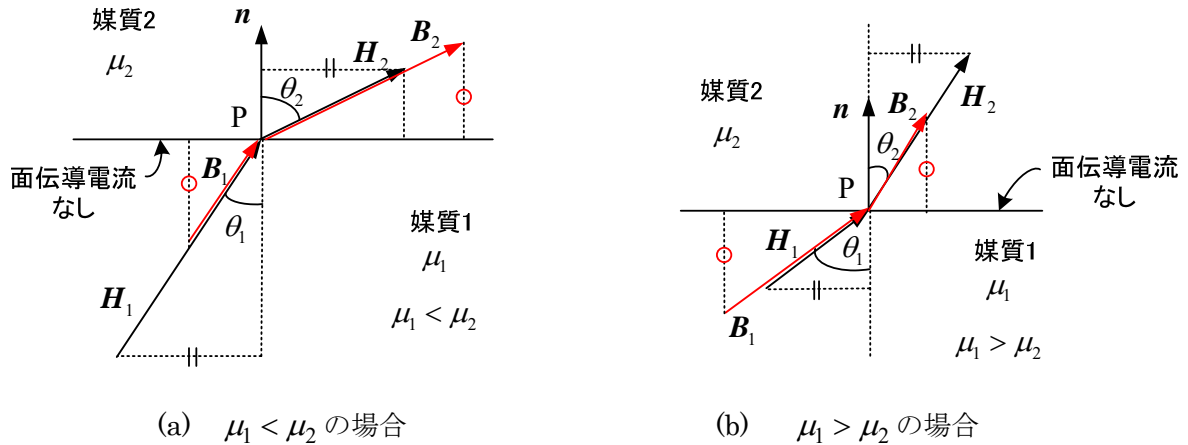
$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2, \quad B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$$

$$B_1 = \mu_1 H_1, \quad B_2 = \mu_2 H_2$$

であるから, これらの式より次式が得られる。

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{2-60}$$

$0 < \theta < \pi/2$  で  $\tan \theta$  は単調に増加するから,  $\mu_1 < \mu_2$  のとき  $\theta_1 < \theta_2$  となる。



(a)  $\mu_1 < \mu_2$  の場合

(b)  $\mu_1 > \mu_2$  の場合

図 2-24 磁力線と磁束線の屈折

次に、媒質1が完全導体( $\kappa_1 = \infty$ )の場合を述べる。完全導体中には電界は存在しないので、④より、 $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$ だから、交流磁界の場合には $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ となる<sup>(3)</sup>。よってこの場合(2-58)、(2-59)より次式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{i}_s(\mathbf{r}, t) && (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) && (2-61) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) &= 0 && (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) && (2-62) \end{aligned}}$$

(2-62)より $\mathbf{B}_2$ は境界面上になくなくてはならない。よって、 $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$ より、 $\mathbf{H}_2$ も境界面上になくなくてはならない。つまり、磁界や磁束密度の垂直成分は0である。

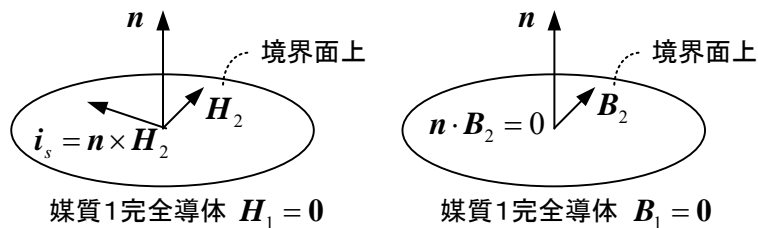


図 2-25 交流の  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  の境界条件 (媒質1が完全導体の場合)

次に、電界 $\mathbf{E}$ 、電束密度 $\mathbf{D}$ については、境界面の任意の点について次式の境界条件が成り立つ。

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} && (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) && (2-63) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t) &= \sigma(\mathbf{r}, t) && (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) && (2-64) \end{aligned}}$$

ここで、 $\sigma[\text{C}/\text{m}^2]$ は境界面の面自由電荷密度であり、分極電荷密度は含まれない。媒質1と媒質2がいずれも絶縁物(真空含む)の場合、通常 $\sigma = 0$ としてよい。(2-63)は面電流が流れていない場合の磁界と同じ関係である。電界の面の接線方向成分は境界面の両側で等しいことを意味する。 $\mathbf{n}, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1$ は同じ平面内にある。(2-63)は磁束の時間変化が境界面で有限であることから導ける<sup>(13)</sup>。電束密度 $\mathbf{D}$ の場合には面に垂直な成分の差が、境界面の $\sigma$ に等しいことを示している。⑥より $\mathbf{n}, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_1$ は同じ平面内にある。(2-64)の証明は例題2で述べる。 $\sigma = 0$ の場合、図2-26のように

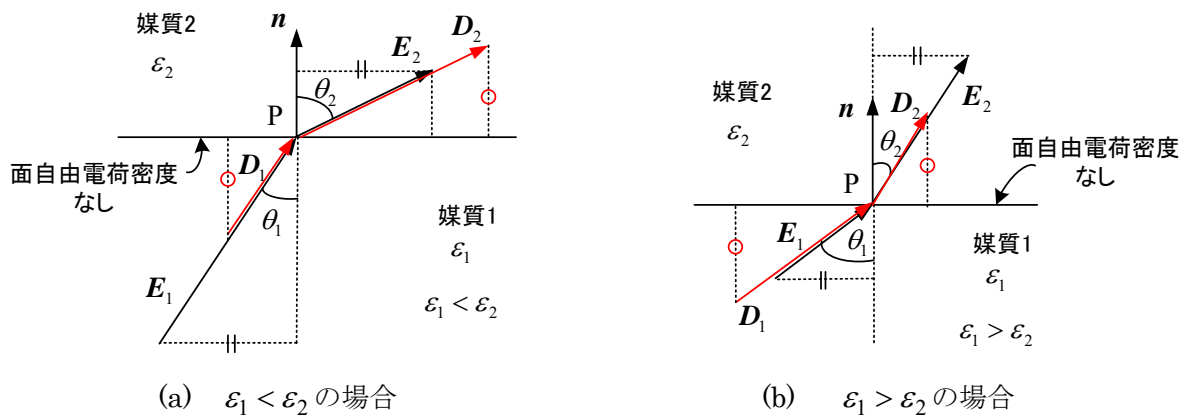


図 2-26 電気力線と電束線の屈折



なる。各ベクトルは全て同じ平面にある。このとき、磁界の場合と同様にして、次式が得られる。

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2-65)$$

$0 < \theta < \pi/2$  で  $\tan \theta$  は単調に増加するから、 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  のとき  $\theta_1 < \theta_2$  となる。

次に、媒質 1 が完全導体 ( $\kappa_1 = \infty$ ) の場合を述べる。完全導体中には電界は存在しないので、 $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$  となる (もし電界があれば電流が無限大となる)。よって、(2-63),(2-64)より次式が成り立つ。

$$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}} \quad (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) \quad (2-66)$$

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}, t)} \quad (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) \quad (2-67)$$

(2-66)より、 $\mathbf{E}_2$  は  $\mathbf{n}$  と同じ方向であることを示している。つまり電界は面に垂直である。 $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2$  の関係があるので、電束密度も面に垂直である。この様子を図 2-27 に示す。 $\sigma$  の正、負に対し、(2-67)より電束密度の向きが決まる。

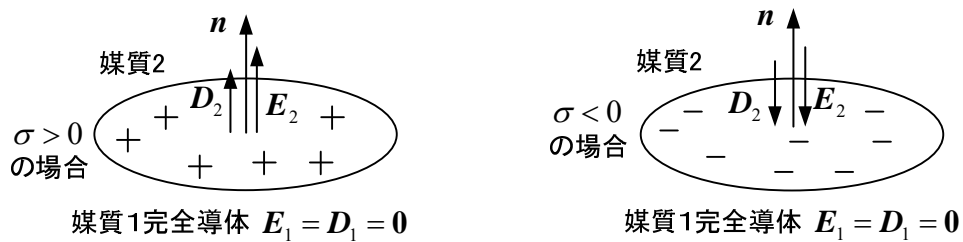


図 2-27  $\mathbf{E}, \mathbf{D}$  の境界条件 (片方が完全導体の場合)

次に伝導電流密度について述べる。電流密度に関しては、電荷保存の法則⑩より次式が成り立つ。

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t}} \quad (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) \quad (2-68)$$

$\sigma$  は境界面の面自由電荷密度である。(2-63)より  $\mathbf{n}, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1$  は同じ平面内にあり、オームの法則  $\mathbf{i}_1 = \kappa_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{i}_2 = \kappa_2 \mathbf{E}_2$  が成り立つので、 $\mathbf{n}, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1$  も同じ平面内にある。図 2-28 はこの平面での断面図

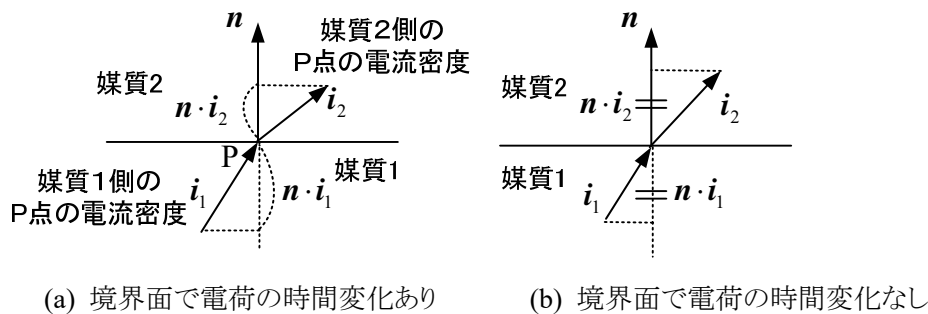


図 2-28 電流  $\mathbf{i}$  の境界条件

である。媒質 1 が完全導体の場合、図 2-25 に示したように電界は面に垂直だから、 $\mathbf{i}_2 = \kappa_2 \mathbf{E}_2$  より電流密度も面に垂直となる。

電位  $V(\mathbf{r}, t)$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  の境界条件については、それらから求まる電界や磁界の境界条件を適用すればよいが、境界面で連続し次式が成り立つ<sup>(5)</sup>。

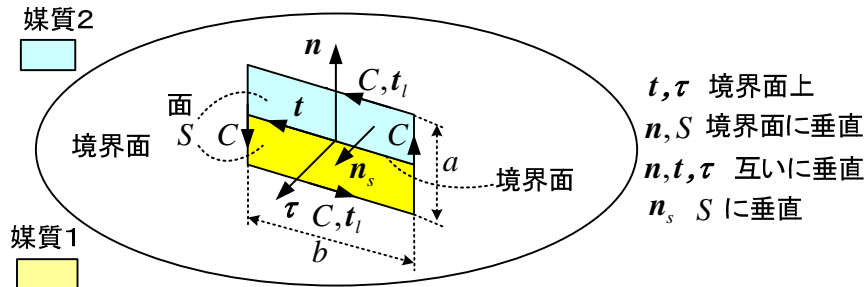
$$V_1(\mathbf{r}, t) = V_2(\mathbf{r}, t) \quad (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) \quad (2-69)$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_2(\mathbf{r}, t) \quad (\mathbf{r} \text{ は境界面上}) \quad (2-70)$$

電位はクーロン電界の積分で与えられ、境界で電界は有界だから電位は連続と考えられる。ベクトルポテンシャルについては、 $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$  より、境界で  $\mathbf{B}$  が有界だから  $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$  となり、ローレンツゲージで  $\text{div} \mathbf{A}$  は境界で有界だから、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$  が得られる。この結果、(2-70) が成り立つ（何故なら  $\mathbf{n} \times \mathbf{X} = \mathbf{0}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$  なら  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ）。電界や磁界は  $V(\mathbf{r}, t)$  と  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  の偏微分で求まるので、電界や磁界の境界条件は(2-69)と(2-70)を含まない。

不連続面がある速度で運動する場合、境界条件は変わってくる<sup>(4),(15),(19)</sup>。ただし、後述の緩慢に変化する磁界系の問題を考える場合には電束密度の項を無視して(2-58)を用いてよい。(2-59) の法線成分についてはそのまま成り立つ。

例題1 透磁率の異なる境界面において、 $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  より磁界  $\mathbf{H}$  の境界条件を求めよ。



(解) 図のように境界面をまたいで幅  $a, b$  の長方形の積分路  $C$  をとり、 $\mathbf{H}$  についてストークスの定理を適用する。幅  $a$  を  $b$  に対して十分小さく取ると、 $a$  についての線積分は無視できるので

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t}_l \, dl = \int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_s \, dS = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_s \, dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_s \, dS$$

$$\therefore (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} b = \mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\tau} a b + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\tau} a b \quad (\mathbf{H}_1 : \mathbf{t}_l = -\mathbf{t}, \mathbf{H}_2 : \mathbf{t}_l = \mathbf{t})$$

$a \rightarrow 0$  のとき、 $\mathbf{i} a = \mathbf{i}_s$  [A/m] が境界面の単位長当たりの電流密度として存在する場合、次式が得られる。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$  は有界（無限でない）と考えてよく、 $a \rightarrow 0$  のとき  $a \partial \mathbf{D} / \partial t \rightarrow \mathbf{0}$  である。

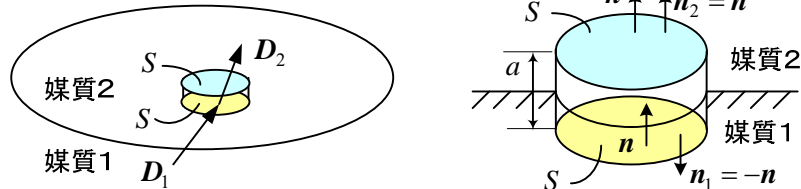
$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{i}_s \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$  だから、(1-20)より、 $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}) = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1))$  である。任意の  $\boldsymbol{\tau}$  について成立することから次式が得られる。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_s$$

境界では③がそのまま使えず (③' は使用可能), そのかわりに境界条件を使う。完全導体であれば表面電流が考えられるが, 完全導体でない場合も非常に薄い層に電流が流れる場合にも表面電流として近似できよう。また薄い導体板 (あるいは巻線) に電流が流れている場合, 導体板の厚さを無視し, 面電流として考えることもある。両側が絶縁体の境界には面電流は流れない。

**例題2**  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$  より, 電束密度  $\mathbf{D}$  の境界条件を求めよ。



(解) 図のように境界をまたいで厚さ  $a$  の薄い円板状の体積  $V$  をとり, それにガウスの定理を適用する。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV$$

左辺は  $a$  を非常に小さくすれば, 側面の積分は  $0$  となり, 上面と下面のみの積分となる。円板の面積  $S$  を小さくして, その面積  $S$  内で  $\mathbf{D}$  は一様と考えると

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 S + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 S = \rho a S = \sigma S$$

$\sigma$  は面自由電荷密度である。下の面では法線ベクトル  $\mathbf{n}_1$  は  $\mathbf{n}$  と向きが反対だから

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \sigma$$

境界に電荷があるとき, 自由電荷密度  $\rho$  は無限大になっている。なぜなら電荷密度は電荷を体積で割り算しないといけないからである。 $\rho a = \infty \times 0$  が有限の面自由電荷密度  $\sigma$  になっている。難しい話ではなく, コンデンサの電荷を極板の面積で割った値が  $\sigma$  である。よって, 境界では①がそのまま使えず (①' は使用可能), そのかわりに境界条件を使う。通常面自由電荷密度  $\sigma$  は導体の表面に存在する。

## ○ いろいろな場合の問題の解き方

これまで, 一般的に成り立つ式を述べてきた。本テキストの目的はこれらの式を使って, いろいろの問題を解いていくことにある。第3章以降で, いろいろの問題を解いていくが, まず, これらの問題を大きく3つの場合に分類しておく。

### (1) 静電界と静磁界

電界や磁界が時間的に変化しない場合,  $\partial/\partial t = 0$  とおけて, マクスウェルの方程式と物質の式は電界と磁界が無関係となる。この場合を, 静電界(electrostatic field), 静磁界(static magnetic field)という。電気回路で言えば, スイッ

静電界	静磁界
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

チを入れて時間が十分経過した直流回路に相当する。

静電界では、時間的に変化しない電荷が与えられた場合の電界を求めることがまず考えられる。次に直流回路にいろいろのコンデンサが接続されていて時間が十分経過したとき、コンデンサの電荷や電界を求める問題がある。本テキストでは第4章のコンデンサで主に静電界を扱う。一方、静磁界は時間的に変化しない直流電流  $\mathbf{i}$  が与えられた場合の磁界を求めることが典型的な例である。静磁界については第5章で述べる。

静電界、静磁界は、電磁気学の中では比較的理解しやすいテーマである。とは言っても、偏微分方程式を解くことになるから、特別な形状でなければ式で解を求めることは困難である。よって電磁気学の教科書に書かれているのは簡単な形状の場合だけである。

## (2) 緩慢に変化する現象(準静的電磁界)

緩慢に変化する現象<sup>(9)</sup>は準静的電磁界<sup>(4),(24)</sup>ともいわれ、応用分野により電界系と磁界系に分類されている<sup>(4),(16),(24)</sup>。この分類を明確に述べた教科書は少ないようである。この分類がないと、 $\text{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$  などの近似が不明確となるであろう。

電界系： $\partial \mathbf{D} / \partial t$  は考慮するが、 $\partial \mathbf{B} / \partial t$  を無視する場合である。利用する式は

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2-71)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (2-72)$$

$$\text{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-73)$$

と物質の式⑥、⑧である。③を用いて磁界を計算することもできる。コンデンサ(漏れ電流のある場合も含む)で、電荷が時間的に変化する場合が当てはまり、当然電界も時間変化するのでコンデンサ内の  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  が無視できない。ここで扱う(2-71)、(2-72)の電界はクーロン電界である。第3, 4章ではこの問題も扱う。静電界と類似しているが、電荷の時間変化を考えている点が異なる。

磁界系： $\partial \mathbf{B} / \partial t$  は考慮するが、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$  を無視する場合である。利用する式は

$$\text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (2-74)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-75)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2-76)$$

と物質の式⑦、⑧である。(2-74)より、両辺の  $\text{div}$  をとると(付11)より  $\text{div}(\text{rot} \mathbf{H}) = 0$  だから

$$\text{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2-77)$$

となる。よって、⑩で  $\partial \rho / \partial t$  も無視することになる。ただし、 $\rho = 0$  (あるいは  $\sigma = 0$ ) とは限らない。例え使わなくとも  $\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$  (あるいは  $\sigma$  の境界条件) は生きている。(2-75)の電界は誘導電界だけでなく電荷によるクーロン電界も含む。磁界系の問題を考える場合でも導体表面や接合部の電荷は、たとえ求めなくてもクーロン電界とその線積分の電圧及びオームの法則を説明するため必要である。磁界系は比較的低い周波数の伝導電流が流れる電線や金属板とその近くの電磁界を考える場合に有効である。 $R, L, C$ の集中定数回路として解析される電気回路や変圧器、電動機、発電機等を扱う分野があてはまり、実用上重要である。この解析が可能な範囲は、回路の長さが数 m 以内でかつ周波数がおよそ 1MHz 以下であることが目安となろう。第5, 6章で主にこの問題を扱う。磁界系は電磁気学の教科書で準定常電磁界あるいは準定常電流とよばれる

ことがある<sup>(13),(28)</sup>。

電気回路は抵抗やコンデンサを含むが、抵抗やコンデンサの内部には立ち入らないので一応磁界系に入れている。電気回路で $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を無視するということは、電線間や電線と大地間等の浮遊容量に伴う導体表面の電荷や導体と素子の接合部の電荷の時間変化を伝導電流の計算に入れないということである。 $\rho$  (あるいは $\sigma$ ) を0と考えるわけではない。この結果、(2-77)の $\text{div} \mathbf{i} = 0$ が得られる (コンデンサは点とみる)。 $\text{div} \mathbf{i} = 0$ は、ガウスの定理より導線が枝分かれしないなら、どこでも同じ電流が流れることを意味し、電気回路の前提となっている。

### (3) 急速に変化する現象

アンテナや伝送路の電波や電磁波を考える場合には、変位電流 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が重要な役割を演じる。本テキストでは、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 、 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ を同時に考慮した解析を第7章で扱う。電気回路の場合には分布定数回路で解析する。分布定数回路では分布したコンデンサを考えることで、等価的に $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が考慮されているとみることができよう。低い周波数では、電波時計の60kHz (波長5km)、NHKラジオAM放送(長崎)の684kHz (波長439m)などが使われている。この場合1MHzより低い周波数であるが、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を考える必要がある。

最後に、全体を通しての解法のポイントや注意事項をまとめておく。

- (1) 上記(1)~(3)の各場合で述べたマクスウェルの方程式(偏微分方程式)+境界条件 か 線積分や面積分を使って表されるいろいろの法則 のどちらかを用いて問題を解くことになる。前者のマクスウェルの方程式は境界を含んでいないので、一般に境界条件が必要となる。電位 (スカラーポテンシャル) やベクトルポテンシャルを使うこともある。後者の法則には、ガウスの法則、クーロンの法則、アンペアの周回積分の法則、ビオ-サバールの法則及び電磁誘導の法則などがある。これらの法則の適用に関しては、3章以降で詳しく述べる。得られた解が正しいかどうかは前者のマクスウェルの方程式+境界条件を満足するかどうかでチェックできる。
- (2) 解は、式として得られる解 (解析解とよぶ) とコンピュータにより有限要素法などで数値計算した解 (数値解とよぶ) に大別される。本テキストでは、一般の電磁気学の教科書と同様に解析解のみを扱う。
- (3) 3次元空間の問題として捉え、空間を表す3つの変数 (直角座標なら $x, y, z$ ) を含んだ解析解を得るのは多くの場合容易ではない (本テキストでは第7章の導波管で扱う)。そこで、2方向あるいは1方向は一樣と考えて、実質的にそれぞれ1次元空間あるいは2次元空間の問題として解く場合がほとんどである。1次元空間の問題では、偏微分方程式が常微分方程式となり解きやすくなる。
- (4) 実質的な1次元空間や2次元空間の問題にするためには、いろいろの工夫が必要となる。まず、考える問題の形状を考慮して座標系 (直角, 円柱, 球) を選ぶ必要がある。次に、解の対称性を考える。それでも、時には、簡単化のため物理的直観力を必要とすることがあろう。このことは、何かしっくりこない印象を与えるかもしれないが、自分なりの解釈をしてみよう。単純な形状でなければ、解析解を得ることは無理と思ってよい。

- (5) 電気回路（集中定数回路）の問題では、直流と交流があり、それぞれにスイッチをオンしたりオフしたりした後の過渡状態(transient state)の解析と時間が十分経過した後の定常状態(steady state)の解析がある。電磁気学では、解析解を得るのがもともと回路のように簡単ではないので過渡現象解析まで行ったものはほとんど見当たらない。本テキストでも、導体内の電荷の解析と付録に示した分布定数回路の過渡現象解析以外は定常解析を行っている。分布定数回路は電磁気学の1次元空間の問題と等価で、その過渡現象解析は電気回路の教科書に見られる。集中定数回路では、回路が枝分かれしないかぎり流れる電流はどこでも同じであるが、分布定数回路では1本の線路の電流が場所で異なる。

電磁気学の教科書では定常電流というと一定の直流を意味するが、本テキストでは、回路で使う定常の意味に統一する。

- (6) 重ね合わせの理(principle of superposition)が多くの場合適用できる。これはマクスウェルの方程式が線形な演算で表されていることによる。すなわち、

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_1 = \rho_1 \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \quad (2-78)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_2 = \rho_2 \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_2 = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \quad (2-79)$$

なら、 $\operatorname{div}(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) = \rho_1 + \rho_2 \quad \operatorname{div}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = 0$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = -\frac{\partial(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)}{\partial t} \quad \operatorname{rot}(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \frac{\partial(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2)}{\partial t} \quad (2-80)$$

が常に成り立つ。つまり、電荷や電流によって電界や磁界ができるとき、(2-78)、(2-79)に分けて解を求め、そのあとで加算することができる。

ただし、マクスウェルの方程式だけで解は得られず、物質の式を必要とする。このとき、誘電率、透磁率、導電率の物質定数が電界や磁界の大きさに依存しないなら線形(linear)、電界や磁界の大きさで物質定数が増える（例えば $\varepsilon = \varepsilon(E)$ ）なら非線形(nonlinear)という。物質定数が空間の関数となる場合（例えば $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ ）を不均質、そうでない場合を均質(homogeneous)という。線形の場合、物質定数がたとえ空間の関数（不均質）であっても重ね合わせの理が使えるが、非線形の場合には重ね合わせの理は使えない。磁束の飽和はその例である。磁束の飽和とヒステリシス現象については永久磁石のところでも説明する。等方(isotropic)とは物質定数が電界や磁界の向きの関数でないということで、そうでない場合を異方という。異方の場合、物質定数が3行3列の行列になる。電磁界の周波数で物質定数が増える場合（例えば $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ）を分散性(dispersive)、そうでないなら非分散性(non-dispersive)という。なお、不均質、異方だが線形ということもある。本テキストでは、特にことわらない限り、 $\varepsilon, \mu, \kappa$ を定数とした線形、均質、等方、非分散性の物質がいくつか集まって構成された空間を考える。なお、真空中に点電荷がある場合のように全空間で $\varepsilon, \mu$ が定数なら、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ の4つの量は必要なく、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ のどちらかと $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ のどちらかで解析できる。

- (7) 重ね合わせの理が使えるような線形物質の場合、解の一意性といって、マクスウェルの方程式と境界条件を満足する解は1つしかない<sup>(3)</sup>。よって、どんな方法でもよいからそのような解を1つ見つければ、それが解である。

# 第3章 電源と抵抗

この章では、電源と抵抗からなる簡単な回路を電磁気学の立場から考えて、第2章で述べた電磁気学の法則がどのように利用できるかを述べよう。特に電界の分類、起電力と電位の違い、導体や抵抗とは何かについて詳しく述べよう。

多くの電磁気学のテキストでは、静電界の章で電位や電圧が定義されているが、この章では、直流電源だけでなく時間とともに変化する交流電源も考え、クーロン電界を用いて電位や電圧を定義する。また、導体や抵抗についても、静電界や一定電流に限らず一般的に成立する性質を述べたい。最後に、直流電源と抵抗を接続した場合の定常状態とスイッチをオンした直後の過渡状態、さらに交流電源を接続した場合の定常状態について説明しよう。

図 3-1(a)は、電源に抵抗をつないだ最も簡単な回路である。電気回路では、普通これを(b)図のようにモデル化する。電源は直流電源(電池)か交流電源の場合がある。成り立つ式は、

$$V_e(t) = R_0 I(t) + V(t) \tag{3-1}$$

$$V(t) = RI(t) \tag{3-2}$$

である。この章では電磁気学の法則を使って(3-1), (3-2)を導くことにする。

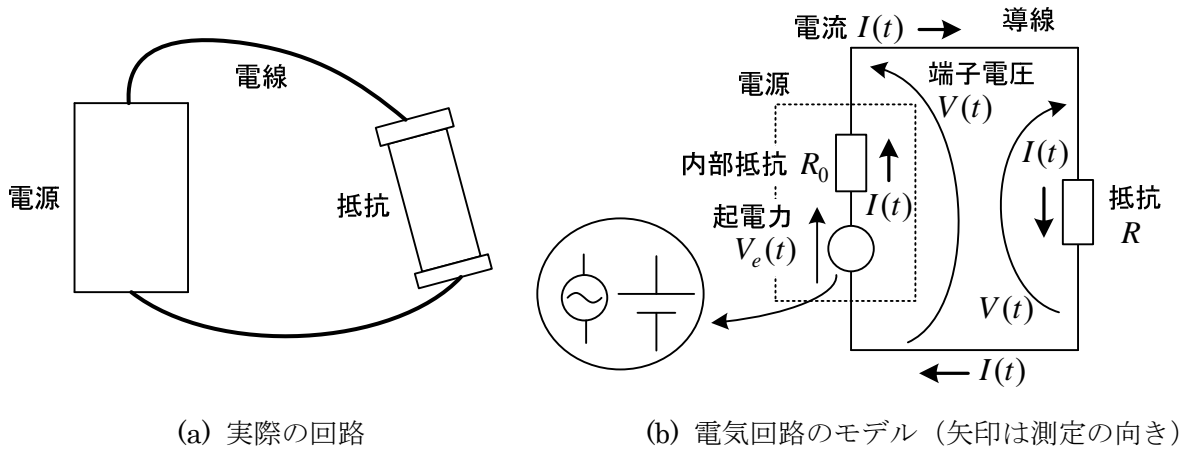


図 3-1 電源につないだ抵抗

## ○ 電界の分類

まず電界について説明しよう。

$q[C]$ の自由電荷にいろいろの種類の力  $F_{all} [N]$  が働いているなら、そこには広い意味での電界があると考え、  $E_{all} [V/m]$  を次式で定義する。

$$E_{all} = \frac{F_{all}}{q} \tag{3-3}$$

$E_{all}$  を働く力によって、表 3-1 の様に分類する。大きくはクーロン電界  $E_c$  と非クーロン電界  $E_{nc}$  に分ける。⑤のローレンツ力には電池の中の電荷に働く力は含まれていないので、その分も追加

している。 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}_e$  は電界とはよべないが、電荷に働く力を生むので等価な電界とよぶ。

表 3-1 拡張した電界の分類

クーロン電界 $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$	自由電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ が作る電界で $\text{rot } \mathbf{E}_c = \mathbf{0}$ である。 電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ に含まれる。(2-27)参照。
非クーロン電界 $\mathbf{E}_{nc}(\mathbf{r}, t)$	電流密度 $\mathbf{i}$ の時間変化が作る誘導電界 $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t)$ である。 電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ に含まれる。(2-28)参照。
	磁界中の運動による等価な電界 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ④', ⑤, ⑧)に含まれる。
	電池の等価な電界 $\mathbf{E}_e(\mathbf{r})$ ①~⑤)にはない。⑧)に含まれる。

$\mathbf{E}_{all}$  [V/m] は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc}, \quad \mathbf{E}_{nc} = \mathbf{E}_b + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e \quad (3-4)$$

(3-4)は、空間の点ごとに各時間で和をとる。場所によっては、存在しないものもある。例えば  $\mathbf{E}_e$  は電池の中にしかないので電池以外の点では  $\mathbf{0}$  と考える。当然  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{B}$  が共に  $\mathbf{0}$  でない空間の点だけに  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  があり、他の点では  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  である。

マクスウェルの方程式④, ④' やローレンツ力⑤及び⑥, ⑧)の電界  $\mathbf{E}$  は(2-26)で

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b \quad (9)$$

と定義した。一般に電界とよべるのは  $\mathbf{E}$  だけである。(3-4)は  $\mathbf{E}$  を用い

$$\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e \quad (3-5)$$

とも表せる。 $\mathbf{E}_{all}$  により、電流が流れ、⑧)のオームの法則が成り立つ。

$$\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}_{all} = \kappa (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e) \quad \kappa : \text{導電率(真空中 } 0) \quad (8)$$

自由電荷密度  $\rho$  が時間的に変化する場合も含めて、 $\rho$  の作るクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  は、(2-27)で  $\mathbf{E}_c = -\text{grad}V$  により定義した。よって、(2-29)に示したようにたとえ時間的に変化しても

$$\text{rot } \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (3-6)$$

である。一般に静電界は時間的に変化しない  $\rho$  によってつくられる電界として定義されているので、クーロン電界に含まれる。



⑨, (3-6)を用いると, ④より

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot}(\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) = \text{rot } \mathbf{E}_c + \text{rot } \mathbf{E}_b = \text{rot } \mathbf{E}_b = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-7)$$

である。(3-7)を見て,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_b$  と考えてはいけない。 $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$  でも  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  とは言えない。

## ○ 電位, 電圧

電磁気学の教科書では静電界を考えて, 電位や電圧を定義しているようである。しかし, 電気回路では, 交流回路においても電位や電圧を良く使っているので, どうなっているのか疑問に思う人も多いだろう。交流回路では明確に電位が定義されていないとの指摘もある<sup>(19)</sup>。

よって, 本テキストでは, 電界の時間変化を許した上で, 電圧や電位を定義しよう。電圧や電位は, (3-6)を満たすクーロン電界  $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$  に対して定義する。(3-6)にストークスの定理を用いると, ある瞬間に次式が得られる。

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad (3-8)$$

図 3-2(a)で, 図の様に 1 周回る積分路  $C$  とそれで囲まれた任意の開曲面  $S$  を考えている。一方(b)では, 図の様に点 A から点 B へ 2 つの積分路  $C_1, C_2$  を定義している。(a)と(b)は, 積分路の向きが違うだけで他は同じである。このとき, (3-8)より, 次式が成立する。

$$\int_C \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{C_1} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl - \int_{C_2} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad (3-9)$$

積分路の向きが変わると, 単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  が反対向きになることに注意せよ。故に

$$\int_{C_1} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{C_2} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl \quad (3-10)$$

この結果は, 点 A から点 B へのクーロン電界の線積分は, 積分路に無関係であることを意味している。すなわち回転が  $\mathbf{0}$  のベクトル場(保存場 conservative field)の線積分は道に関係しない。

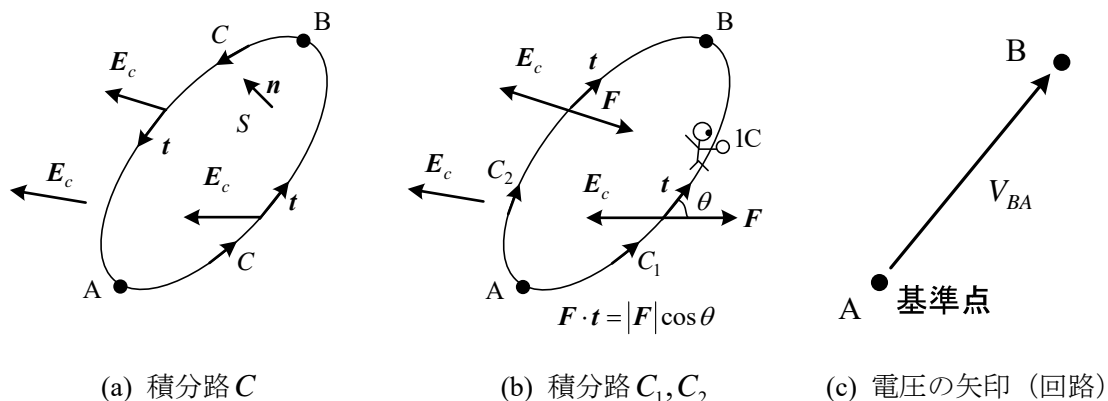


図 3-2 クーロン電界  $\mathbf{E}_c$  の線積分

点 A を基準点とした点 B の電圧  $V_{BA}$  (voltage) を次式で表すことができる (導出は後述)。

$$V_{BA}(t) = -\int_A^B \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl \quad [\text{V}] \quad (10)$$

(3-10)の結果から、この線積分はどのような道を選んでも値は変わらない( $C_1, C_2$  どちらでもよい)。電気回路では、点 A を基準とした点 B の電圧  $V_{BA}$  (点 A から見た点 B の電圧ともいう) を図 3-2(c) の向きの矢印 (曲線でもよい) を使って表す (外国では逆向きの矢印で定義することもある)。この矢印は(b)の  $\mathbf{t}$  の向きに相当する。1C の電荷を点 A から点 B まで、電界から受ける力に逆らって  $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}_c = -\mathbf{E}_c$  の力を加えて動かすと想像した場合、⑩はある瞬間で見積もられる 1C 当たりのエネルギー (仕事) を表しており、 $\mathbf{F}$  と  $\mathbf{t}$  との内積が力の有効分である。重力場も、道筋によらず持ち上げた高さだけ位置エネルギーが増すので保存場である (摩擦がある面を動かす場合は道筋に依存し保存場ではない)。

無限遠点 (あるいはアース点) から見た点 A, 点 B の電圧を特に**電位**(electrical potential)といい、それぞれ次式で表される。

$$V_A(t) = -\int_{\infty}^A \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl, \quad V_B(t) = -\int_{\infty}^B \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl \quad (3-11)$$

電位を用いると、⑩の電圧は次式で表せる。

$$V_{BA}(t) = -\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = -\left(\int_A^{\infty} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\infty}^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl\right) = V_B(t) - V_A(t) \quad (3-12)$$

本テキストでは、“電圧” という言葉を**電位差**(potential difference)の意味で使用する。図 3-3 に電圧と電位の関係を示す。図の矢印は電気回路で用いるもので、電圧の測定の向きを示す(曲線で書いても構わない)。この矢印はベクトルではないが、ベクトルの和と同じ関係になるので覚え易い。

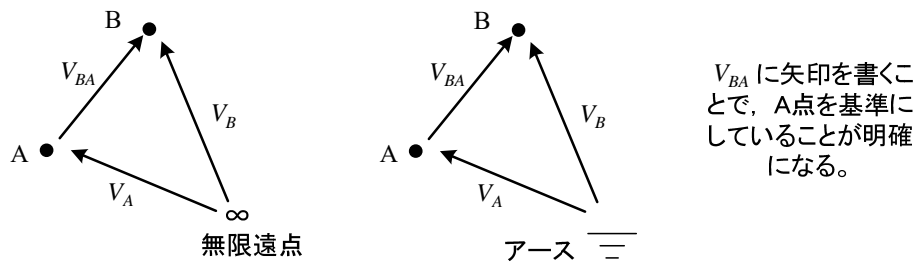


図 3-3 電圧と電位の関係 (回路で使う矢印)

電磁気学の教科書で (高校の教科書を含めて)、電圧を表すのに両端に矢を書いたものを見ることがある。これは困ったことで、符号で混乱することになる。電圧や電流に使う測定の向きを表す矢印 (正方向ともいう) を明確に示すことが大切と考える。

ところで、本テキストではクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  は(2-27)より電位  $V$  を用いて次式で定義していた。

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}V(\mathbf{r}, t) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (3-13)$$

ここで、 $\nabla$  は**ナブラ**と読み、演算子として良く用いられ、直角座標系では下記の意味がある。

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3-14)$$

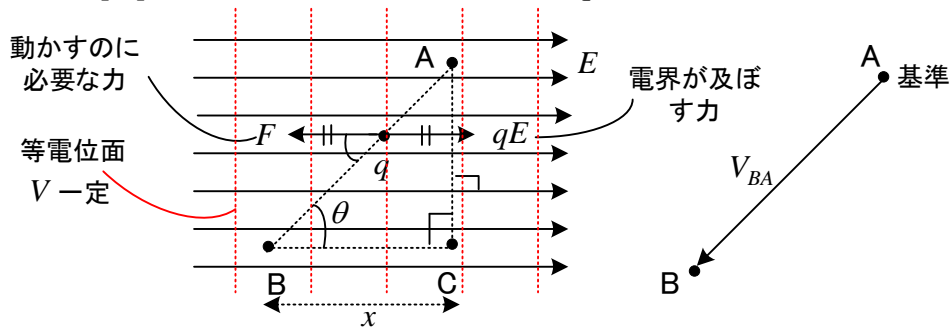
以下に、電位  $V$  をクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  で表そう。単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  は(1-39)で求まるから

$$-\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B (\text{grad}V) \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dl} \right) dl$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_A^B \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \quad \text{全微分: } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\
 &= \int_A^B dV = V_B - V_A \quad (3-15)
 \end{aligned}$$

無限遠点の電位を 0 とすると、A または B を無限遠点とすることで、(3-11)が得られる。また、電位差  $V_{BA} = V_B - V_A$  が⑩で求められることがわかる。

**例題 1** 図のように一様なクーロン電界中の点 A に  $q[C]$  (ただし  $q>0$ ) の電荷がある。この電荷を A から B へ動かすときの仕事  $W[J]$  を求めよ。ただし、電界の大きさを  $E[V/m]$ 、BC 間の距離を  $x[m]$  とする。なお、自己力は 0 だから  $q$  による電界は考えなくてよい<sup>(2)</sup>。



(解) 求める仕事は動かす道に関係ないので、まず A から C へ動かす、次に C から B へ動かす。AC 間では、動かす方向と電界が直交しているため、仕事は 0 である。C から B へ動かす場合には、電界と反対方向の力  $qE$  を加えて  $x$  動かす必要がある。このときの仕事は、BC 上では全て同じ力を必要とするので単純に長さを掛ければよく  $qEx$  で求まる。よって、 $W = qEx$  である。

- \* A 点から見た B 点の電圧  $V_{BA}$  は 1C を運ぶ場合の仕事なので  $V_{BA} = Ex$  となる。AC 間は仕事が 0 なので、A 点と C 点の電位は等しい。この結果電界に垂直に等電位面(equipotential surface)ができる。(3-13)より、クーロン電界  $E$  と電位  $V$  一定の等電位面は必ず直交する。
- \* AB 間で直接仕事を計算しても良い。加える力は電界  $E$  と逆方向に  $F = qE$  で、これを AB に沿って動かすときは、その AB 方向成分だけが仕事になる。よって仕事は、 $W = F \cos \theta \times r$ 、ここで  $r$  は AB の長さである。 $r \cos \theta = x$  だから、 $W = qEx$  となる。

## ○ 起電力

起電力(electromotive force)は、英語で理解できるように電力ではなく力である。閉路(積分路)  $C$  に生じる起電力  $V_e$  を、非クーロン電界  $E_{nc}$  を用いて次式で定義する。

$$V_e \equiv \int_C E_{nc} \cdot t dl \quad (3-16)$$

$C$  の向き ( $t$  の向き) を起電力の測定の向き (正の向き) という。測定の向きなので、自由に選んでよく、2通りの選び方がある。 $E_{nc}$  のうち、 $E_b$  は変圧器起電力を作り、 $v \times B$  は速度起電力を作り、 $E_e$  は電池の起電力をつくる。通常、交流の起電力は、 $E_b$  または  $v \times B$  により、直流の起電力は  $E_e$  で作られる。クーロン電界については(3-8)より閉路での線積分値が 0 になるから、

(3-4)の  $\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc}$  を用いて次式で表すこともできる。

$$V_e = \int_C \mathbf{E}_{all} \cdot \mathbf{t} dl \quad (3-17)$$

起電力の測定の向きは図 3-4(a),(b)どちらを選んでも良いが、当然符号は異なってくる。

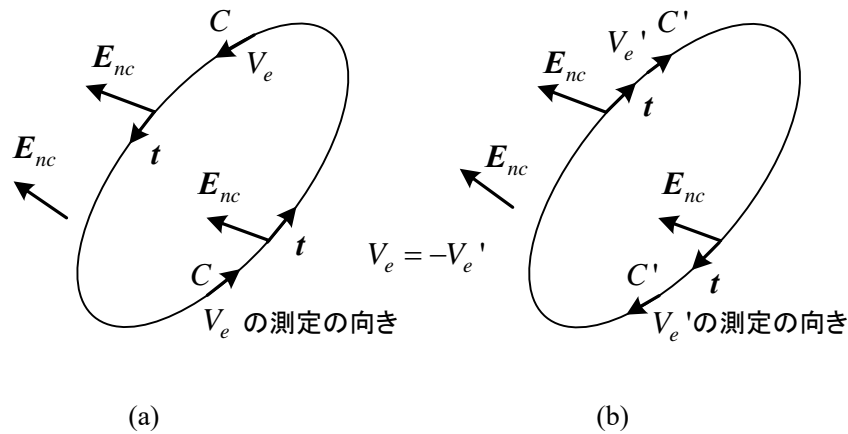


図 3-4 起電力の測定の向き

以上のように、電位や電位差はクーロン電界で、起電力は非クーロン電界で求められる。従って、両者は根本的に違うものである。ところが、実際には電圧という言葉が電位、電位差、起電力のいずれにも使われており、区別は曖昧となっている。本テキストでは電圧は電位差の意味で用いる。

電位と起電力は定義できたが、図 3-1 を理解するためには、接続する電線、抵抗そして電源のことを知らなければならない。このことを順に説明していこう。

## ○ 導体

物質を導電率の違いにより、導体、抵抗体、半導体、絶縁体に分類しよう。銅やアルミニウムで作られた電線は、導体（良導体）である。ニクロム線は抵抗体の例である。導電率  $\kappa$  が無限大である導体を**完全導体**(perfect conductor)という。本テキストでは導体と言う言葉を小さい抵抗がある場合または**完全導体**の場合で使うので、文脈で判断して欲しい。金属は導体や抵抗体になる。

### 導体の性質 1 導体の内部の電界

⑧のオームの法則より、完全導体ではたとえ電流が流れていても

$$\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e = \mathbf{i} / \kappa = \mathbf{0} \quad (3-18)$$

となる。すなわち、クーロン電界と非クーロン電界は完全に打ち消しあう。(3-24)で述べるようにオームの法則が成立するには $10^{-14}$ sより十分大きな時間が必要である<sup>(12)</sup>。このことは周波数が $10^{14}$ Hzより十分小さいならオームの法則が適用できることを意味する。(3-18)で $\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_e = \mathbf{0}$ なら、電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b = \mathbf{0}$ となる。

孤立した導体に外部から電界 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ を加えると、導体の自由電子は導体表面に移動して、導体

内の電界を瞬時に  $\mathbf{0}$  にする。導体内に少しでも電界が残っていると自由電子に⑤の力が働き動くからである。電界  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$  はオームの法則が成立する範囲で時間的に変化しても良い。これを静電誘導（もともと時間的に変化しない静電界の場合に使われる言葉であるが）とよぶ。

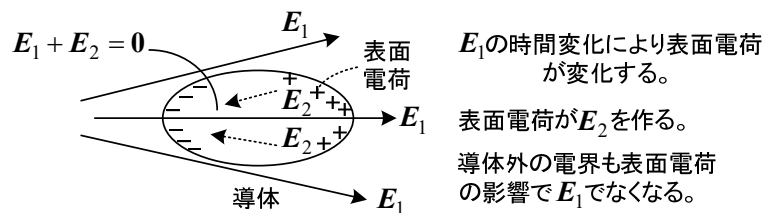


図 3-5 静電誘導

導体の性質 2 導体の電位

導体では非クーロン電界  $\mathbf{E}_{nc}$  が  $\mathbf{0}$  であれば、(3-18)よりクーロン電界  $\mathbf{E}_c = \mathbf{0}$  となる。導体上の点 A と点 B 間の電圧はクーロン電界を用いて⑩より

$$V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad (3-19)$$

となる。よって、非クーロン電界  $\mathbf{E}_{nc}$  が  $\mathbf{0}$  であれば、クーロン電界も  $\mathbf{0}$  となるので導体は至る所で同電位である。図 3-1 (b)の電気回路では、電源と抵抗をつなぐ導線は通常至る所で同電位と考える。同電位と考えてはいけないのは、非クーロン電界  $\mathbf{E}_{nc}$  が  $\mathbf{0}$  でない場合である。周波数が非常に高い場合、誘導電界  $\mathbf{E}_b$  が無視できなくなるため導線もインダクタンスをもつ。この場合電気回路では分布定数回路として取り扱う（第 7 章参照）。また導体が磁界中を動く場合も速度起電力  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  が生じるので同電位と考えてはいけない（第 6 章参照）。

導体の性質 3 導体の内部の電荷

導体の内部に何らかの方法で電荷を持ち込んだとしても、電荷は互いに反発して瞬時に導体表面に集まる。以下これを説明しよう。

仮に、導体中の自由電荷密度が時間  $t = 0$  で  $\rho(\mathbf{r}, 0)$  に分布しているとし、時間が経過すればどうなるか調べてみよう。

⑥より、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  ( $\epsilon$  は一定と仮定)、これを①に代入して  $\epsilon \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$  となる。⑧より  $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$  の場合、 $\tau \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$  となる。ただし、 $\tau = \epsilon / \kappa$ 。これを、⑩に代入して

$$\frac{1}{\tau} \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \text{ を得る。両辺に } e^{t/\tau} \text{ を掛けて } e^{t/\tau} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau} e^{t/\tau} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \text{ だから}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{t/\tau} \rho(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad \therefore e^{t/\tau} \rho(\mathbf{r}, t) \equiv \varphi(\mathbf{r}) \quad \therefore \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-20)$$

ここで、 $t = 0$  の条件より、 $\varphi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, 0)$  を用いた。偏微分方程式はそう簡単でない。(3-20)は場所で異なる電荷密度も同じように減衰することを意味する。表 2-1 より、銅では  $\tau = 1.54 \times 10^{-19} \text{ s}$  となる。極めて短い時間で導体内の電荷は  $0$  となることを意味する。しかしながら、前提となる

オームの法則  $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$  が成立するのに  $10^{-14}$  s よりも十分大きい時間が必要である。よって、電荷が再配置するのに必要な時間は  $10^{-10}$  s 程度と考えれば十分であろう。なお、(3-20)は絶縁物においても成立するので、時定数  $\tau$  で長くなるがいずれ絶縁物内部の電荷も 0 になる。

なお、(2-2)より導体内部の自由電荷密度は 0 であっても、電流は流れることができる。

#### 導体の性質 4 導体表面の電界

(2-66)で述べたように完全導体の表面では、電界は面に垂直であり、ガウスの法則①' は常に成立するから、電界の面に垂直な  $\mathbf{n}$  方向成分は  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}, t) / \epsilon$  あるいは  $\mathbf{D}_n(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}, t)$  である ((2.67)参照)。ここで  $\sigma(\mathbf{r}, t)[\text{C}/\text{m}^2]$  は境界面の面自由電荷密度である。

### ○ 抵抗

次に図 3-1 の抵抗で成り立つオームの法則を説明する。抵抗には、電流  $I$  が流れているとする。抵抗の様な断面積を  $S[\text{m}^2]$ 、長さを  $l[\text{m}]$  とする。抵抗の両端 A, B には、自由電荷があり、抵抗の中に様なクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  を作っているとする。抵抗も金属であり、抵抗の中の自由電荷密度  $\rho$  は 0 である。 $\mathbf{E}_c$  により負の電荷 ( $-e$ ) をもつ自由電子が力  $-e\mathbf{E}_c$  (⑤より) を受け運動するが、熱振動している陽イオンと衝突を繰り返す。そこで、電子の質量を  $m[\text{kg}]$ 、多数個の電子の平均速度 (ドリフト速度 drift velocity) を  $\bar{\mathbf{v}}$  とし、次式の運動方程式を仮定する。

$$m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -e\mathbf{E}_c - k\bar{\mathbf{v}} \quad (3-21)$$

ここで、 $-k\bar{\mathbf{v}}$  は衝突の効果を抵抗力として表す。 $k$  は正の定数で温度が高いほど大きな値をもつ。ここで、 $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$  の時間変化は緩慢で、(3-21)を解く場合には定数とみなす。初速度を  $\mathbf{0}$  として(3-21)を解くと次式が得られる。

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{e}{k} \mathbf{E}_c \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\} \quad \text{ただし、} \tau = \frac{m}{k} \quad (3-22)$$

平均速度は時間が  $\tau$  の数倍経過すると、 $\bar{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}_c / k \equiv -\mu_e \mathbf{E}_c$  となる。 $\mu_e$  は電子の移動度 (electron mobility) とよばれる。自由電子が  $1\text{m}^3$  当り  $n$  個あるとすると、電荷密度は  $-en$  であるから、伝導電流密度  $\mathbf{i}$  は次式となる。

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = -en\bar{\mathbf{v}} = en\mu_e \mathbf{E}_c = \kappa_R \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \quad (3-23)$$

となる。これは⑧のオームの法則に相当する。ただし、導電率  $\kappa_R = en\mu_e$  である。 $\tau$  は自由電子の緩和時間 (relaxation time) とよばれ次式となる。回路の時定数に相当する。

$$\tau = \frac{m}{k} = \kappa_R \frac{m}{ne^2} \quad (3-24)$$

$\kappa_R = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}$  ( $20^\circ\text{C}$ )、 $m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、 $n = 8.46 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  を代入すると、 $\tau = 2.5 \times 10^{-14} \text{ s}$  となる。 $n$  の求め方も述べておこう。原子量 63.5 の銅は、アボガドロ数  $6.02 \times 10^{23}$  個の原子が  $63.5 \text{ g}$  となる。銅の密度は  $8.92 \text{ g/cm}^3 = 8.92 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  である。銅の場合、原子の数と自由電子の数は等しいので

$$n = \frac{6.02 \times 10^{26} \times 8.92 \times 10^3}{63.5} = 8.46 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

このことから、 $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$ の時間変化が $\tau$ に比べてゆっくりなら、(3-23)のオームの法則は交流回路でも成り立つと考えられる。

図3-6のように、面 $S$ と垂直の向きに $\mathbf{n}$ をとる。A点から見たB点の電圧は、⑩より

$$V(t) = -\int_A^B \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} dl = E_{cn}(t)l \quad (3-25)$$

となる。 $\mathbf{t} = -\mathbf{n}$ であり、 $E_{cn}$ は $\mathbf{E}_c$ の $\mathbf{n}$ 方向成分である。電流密度については

$$I(t) = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = i_n(t)S \quad (3-26)$$

である。 $i_n$ は $\mathbf{i}$ の $\mathbf{n}$ 方向成分である。(3-23)の $\mathbf{n}$ 方向成分を考え、(3-25)、(3-26)を代入すると

$$V(t) = \frac{l}{\kappa_R S} I(t) \quad (3-27)$$

となる。これは電気回路のオームの法則(Ohm's law)に他ならない。(3-27)は交流の場合にも成立し、 $V > 0$ のとき $I > 0$ 、 $V < 0$ のとき $I < 0$ である。抵抗は次式で与えられる。

$$R = \frac{l}{\kappa_R S} \quad (3-28)$$

導電率は温度で変化し、例えば銅の場合、抵抗の値は

$$R = R_0 \{1 + 0.0039(T - 20)\} \quad (3-29)$$

となる。 $T$  [°C]は温度である。 $R_0$ は温度 $T = 20^\circ\text{C}$ の抵抗である。

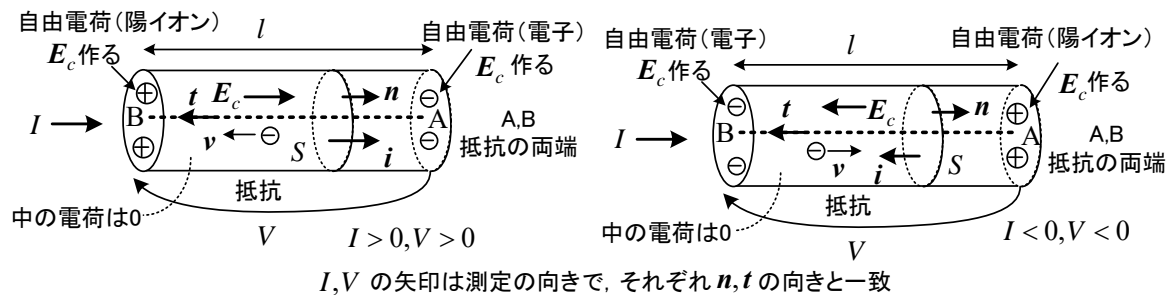


図3-6 オームの法則の説明

(3-23)より、電流密度が $i = 1 \text{ A/mm}^2$ のとき、ドリフト速度 $\bar{v}$ は

$$|\bar{v}| = \frac{i}{en} = \frac{10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 8.46 \times 10^{28}} = 0.074 \times 10^{-3} \text{ m/s} = 0.074 \text{ mm/s} \quad (3-30)$$

となり、平均した速度はかなり遅い。電界がない場合にも各電子は $10^6 \text{ m/s}$ 程度でランダムに動いているが平均すると0である。

## ○ 電源と抵抗の接続

最後に電源と抵抗の接続について考えよう。

まず、図 3-7(a)に示すように、スイッチ S をオフして電池（直流電源）だけを考える。

電池は+極から-極に、電池の中の電子を動かす働きがある。すなわち、電池は起電力という力を電子に働かせる。これは化学的に電子に及ぼす力で、**非クーロン電界  $E_e$**  を作って、電子に力を及ぼすと考えることができよう。この結果、一極には電子が増加し、その分+極には電子が少なくなって+に帯電される。しかし、電子の移動がずっと続くことはない。なぜなら、両極にたまった電荷によって、電池の中にクーロン電界  $E_c$  が  $E_e$  と逆向きに生じるからである。最終的には

$$E_c + E_e = 0 \tag{3-31}$$

で電子の動きは止まる。このとき、電池の一極から見た+極の端子電圧  $V$  は⑩より

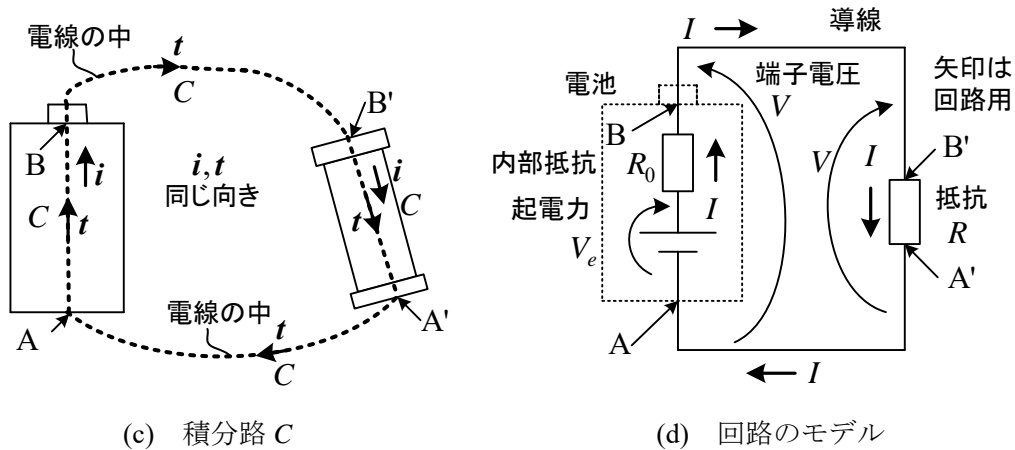
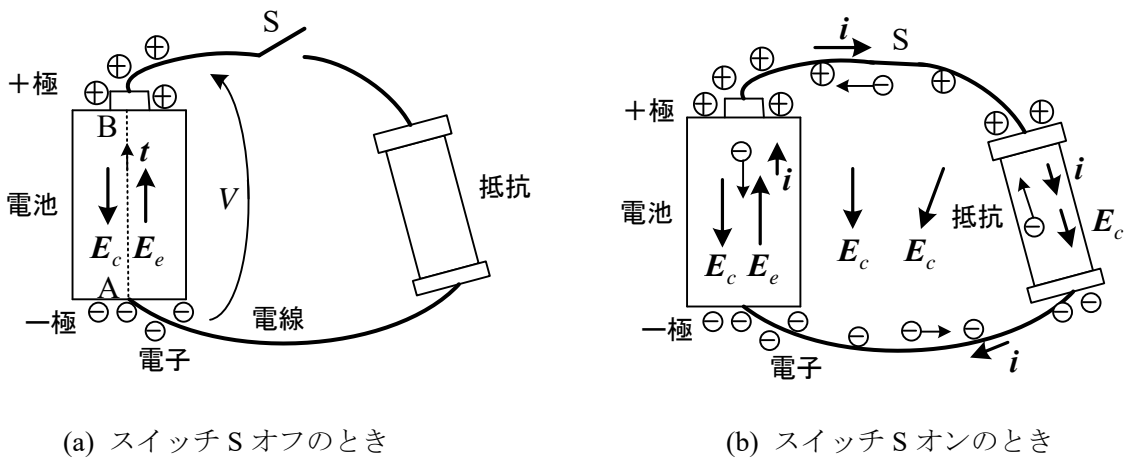


図 3-7 電池（直流電源）と抵抗の接続

$$V = -\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \tag{3-32}$$

である。電圧はクーロン電界に対して定義されていることに注意しよう。一方、起電力については、⑩より

$$V_e = \int_C \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl \tag{3-33}$$



である。本来起電力は閉曲線での線積分だが、 $\mathbf{E}_e$ は電池の中しかないなのでその部分だけでよい。(3-33)に(3-31), (3-32)を用いると

$$V_e = \int_A^B \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl = - \int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = V \quad (3-34)$$

が成り立つ。つまり起電力 $V_e$ と端子の電圧 $V$ は等しい。図 3-1(b)で、抵抗を接続しない場合には電流が流れないから $R_0 I = 0$ で、(3-34)が成り立ち、モデルが妥当であることが判る。ここで、 $V_e$ につけた矢印は、本来起電力を測る $\mathbf{t}$ の向きを表すものであるが、(3-34)が成り立つことから電圧につける矢印(矢印の先端の電位から根の電位をひく)とみなすこともできる。

次に、スイッチ S をオンし定常状態となった図 3-7 (b)の場合を考える。スイッチオンから定常になるまでの時間は非常に短く、これについては後述する。

同じ大きさの電流が流れる回路に沿って、 $\mathbf{E}_{all}$ の線積分を考える。電線は完全導体と仮定すると、(3-18)より完全導体中の $\mathbf{E}_{all}$ は $\mathbf{0}$ と考えて良いので、その線積分は $\mathbf{0}$ になる。従って、閉じた積分路 $C$ を図 3-7(c)に示すように選ぶと次式が得られる。

$$\int_C \mathbf{E}_{all} \cdot \mathbf{t} dl = \int_C (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl = V_e \quad (\because \int_C \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = 0 \text{ より}) \quad (3-35)$$

$$\begin{aligned} \text{一方、} \int_C \mathbf{E}_{all} \cdot \mathbf{t} dl &= \int_A^B (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{B'}^{A'} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \\ &= \int_A^B \frac{\mathbf{i}}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{B'}^{A'} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_R} \cdot \mathbf{t} dl = \frac{l' I}{\kappa S'} + \frac{l I}{\kappa_R S} \quad \text{⑧より} \\ &= R_0 I + R I \end{aligned} \quad (3-36)$$

$\kappa, \kappa_R$ はそれぞれ電源と抵抗の導電率である。 $R_0$ は電源の内部抵抗である。電流が電源内と抵抗で一樣と仮定し、これらが存在する電源の断面積を $S'$ 、長さを $l'$ 、同様に抵抗の断面積を $S$ 、長さを $l$ としている。(3-35), (3-36)が等しいので次式が得られる。

$$V_e = R_0 I + R I \quad (3-37)$$

これは、キルヒホッフの電圧則の一例となっている。

A'点から見た B'点の電圧は

$$V = - \int_{A'}^{B'} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t}' dl = \int_{B'}^{A'} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = R I \quad (\mathbf{t}' = -\mathbf{t}) \quad (3-38)$$

となる。 $V$ の矢印は $\mathbf{t}'$ の向きであることに注意。 $V$ の矢印を $\mathbf{t}$ の向きに選ぶと、 $V = -R I$ である( $V, I$ が同じ向きなら)。以上により、(3-1), (3-2)が導けた。電流が流れているときは電池の中で $\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e$ は $\mathbf{0}$ とはならない。ただし、電源の内部抵抗 $R_0$ が無視できる場合には、例え電流が流れていても、 $\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e = \mathbf{0}$ が成立し、起電力と端子電圧は一致する。図 3-7 (b)に電荷分布のイメージ図を示している。自由電荷は、主に電池の両端、抵抗の両端、電線の表面に存在すると考えられよう。電線の表面に分布する電荷により上側と下側の空気中にクーロン電界でき、その積分である電圧が生じると考えられる。この例では、電荷分布を正確に求める必要はなかった。しかし、おおまかでも電荷分布を考えないと、いろいろの現象が説明できない。ただし、この移動に伴う電流は普通の電気回路においては考慮しないでよい(第7章の分布定数回路では考慮する)。

次に、電力について考えよう。このために、空間に起きる現象を簡単に説明しよう。図 3-8 に

示すように電流が流れるとその周りに磁界  $\mathbf{H}$  が生じる。そして電線表面などに生じる電荷によって空間にクーロン電界が生じる。直流電源なので、定常状態では電界や磁界の時間変化がないから、(2-41)より次式が得られる。

$$\int_{V_1} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i} dV = \int_{V_1} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV + \int_{V_2} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa_R} dV + \int_S (\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad [\text{W}] \quad (3-39)$$

$V_1$  は電池、 $V_2$  は抵抗の体積領域である。直流電源なので、定常状態では電波が生じることはなく、ある程度広い球面  $S$  を考えると、その面上では電界や磁界は 0 になる。よって右辺第 3 項は 0 となる。このとき

$$\int_{V_1} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i} dV = \int_{V_1} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV + \int_{V_2} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa_R} dV \quad (3-40)$$

図 3-6 の寸法の抵抗に、一様な電界  $\mathbf{E}_e$  があって、一様な電流  $\mathbf{i}$  が流れている場合、

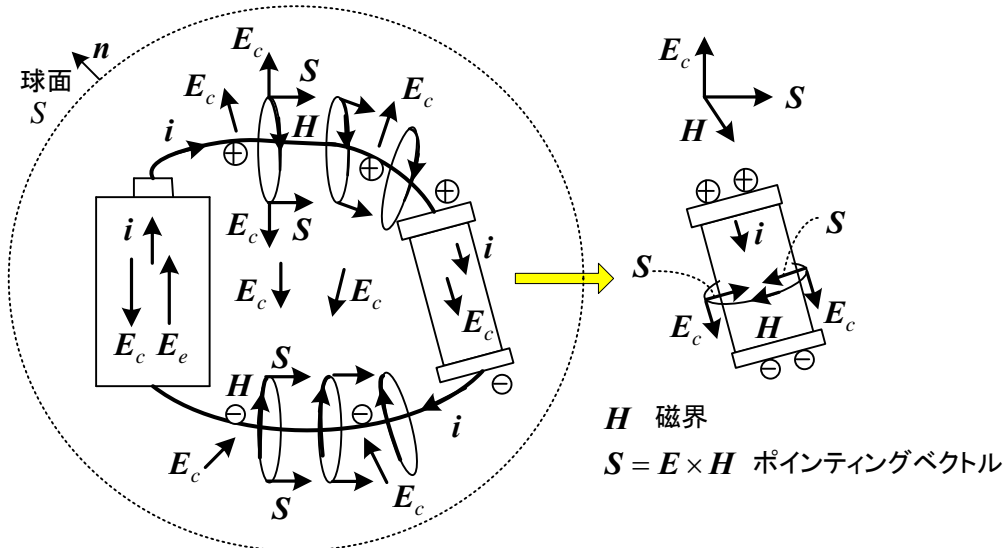


図 3-8 電力

$$\int_{V_2} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa_R} dV = \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa_R} S l = \frac{1}{\kappa_R} \left(\frac{I}{S}\right)^2 S l = \frac{l}{\kappa_R S} I^2 = R I^2 \quad (3-41)$$

電源も同様に内部抵抗を  $R_0$  とすると

$$\int_{V_1} \frac{|\mathbf{i}|^2}{\kappa} dV = R_0 I^2 \quad (3-42)$$

これは、内部抵抗で消費される電力を表す。電源が供給する電力は  $\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i}$  が電源内で一様と仮定し、

$$\int_{V_1} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i} dV = \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i} S' l' = \mathbf{E}_e \cdot (I t / S') S' l' = \mathbf{E}_e \cdot t l' I = V_e I \quad (3-43)$$

がえられる。以上の結果を(3-40)に代入すると電力の関係が得られる。

$$V_e I = R_0 I^2 + R I^2 \quad [\text{W}] \quad (3-44)$$

図 3-8 に示すように、ポインティングベクトル  $\mathbf{S} = \mathbf{E}_c \times \mathbf{H}$  は球面  $S$  内には存在している。電線の部分で考えると  $\mathbf{S}$  は電源側から抵抗に向かっていて、これは電力が電源側から抵抗に向かって、電線の中でなく、その周りの空間をポインティングベクトルとして送られていることを意味する。抵抗の部分では、 $\mathbf{S}$  は抵抗の中に向かっていて、つまり抵抗の中に電力が入って消費されることを意味する。ポインティングベクトルは特に電磁波を考える場合に利用される。

次に、直流電源のスイッチを入れた後の過渡状態から定常状態までを図 3-9 で考えよう<sup>(21)</sup>。スイッチ  $S$  を入れた直後、電源の起電力は電子を動かすので電線の一番左端の電子が電源を通り上の電線から下の電線に動く。上の電線では左端の電子が動いた後、その右側の電子が順次左に動きだす。下の電線では、電源から来た電子がその右側の電子を押し、それが順次右側に伝わっていくイメージである。その際、上の電線では電子がぬけた陽子が+イオンとなり、逆に下の電線では+イオンに対応して電子が表面に分布する。これらはクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  ①を作り、この電圧が電源の電圧と釣り合うようになる。この時点では図に示す  $AB$  のラインの右側の電子はまだ動いていない。 $AB$  のラインは時間と共に右側へ移動し、 $\mathbf{E}_c$  ②、③、④と順番に電界が伝搬していく。 $AB$  のラインが動く速度は速く光速と考えてよい。要するに左側の上下電線から電流は流れ始め右に広がる。

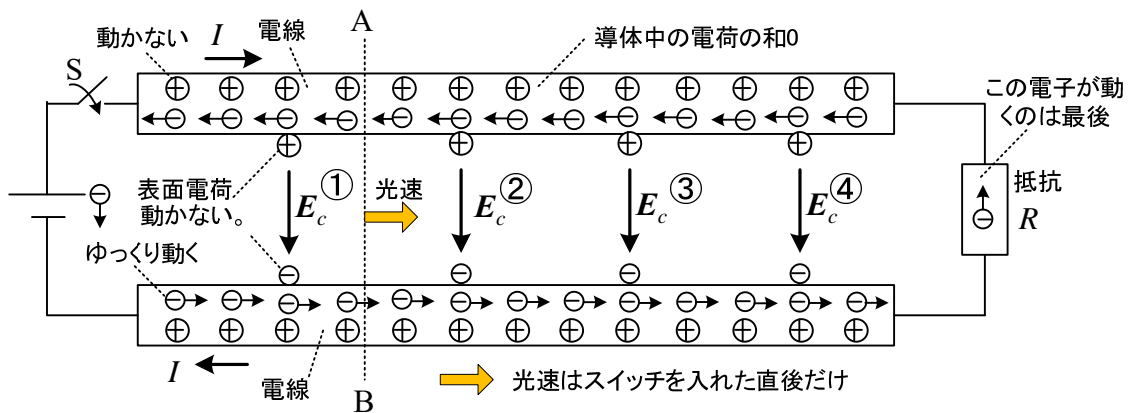


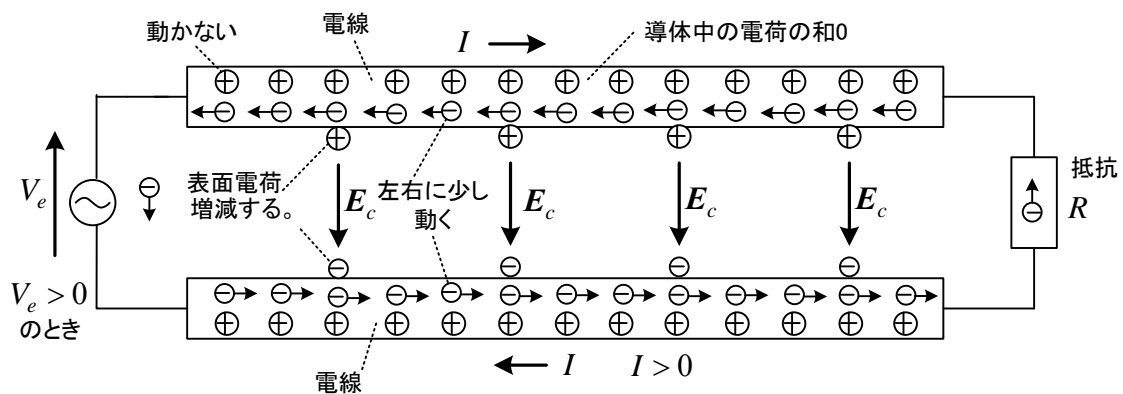
図 3-9 直流電源のスイッチ  $S$  を入れた後の電界

定常状態では、電線（導体）の中の電子が図の矢印の向きに動くが、その平均速度は遅い。また導体中の電荷はトータルとして  $0$  であるが、導体表面には電荷が分布する（プラスは電子が足りないイオンである）。スイッチを入れてもすぐに抵抗  $R$  に電流が流れる訳では無く、電子を動かす電界が光速で伝わってくるまでの時間遅れる。また、スイッチをオフしても、瞬時に電流は  $0$  にならない。ただ、それらの時間は非常に短いので、抵抗だけの電気回路ではスイッチを入れると瞬時に抵抗  $R$  に電流が流れ、スイッチを切ると瞬時に抵抗  $R$  の電流が  $0$  になると考える。なぜ光速で電界（よって電圧）や電流が左から右へと生じていくかについては、付録の分布定数回路の過渡現象解析で説明している。

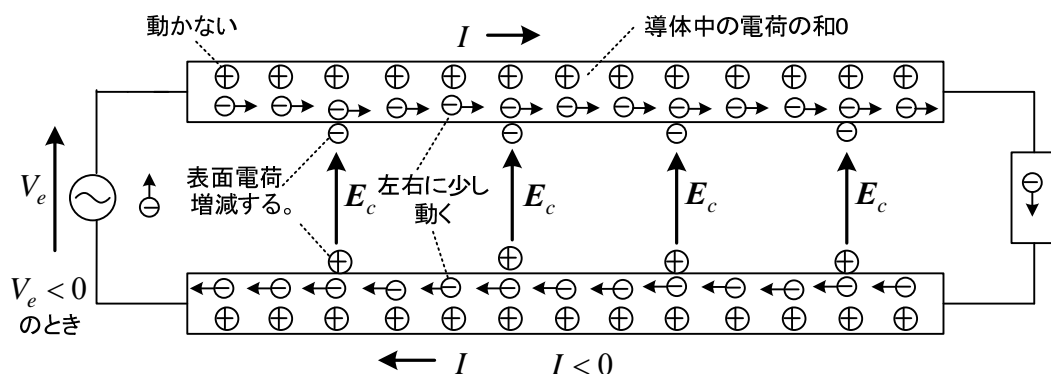
交流電源の場合には、電源内で非クーロン電界が時間的に正弦波で変化していると考えればよ

い。交流の電流では、磁界が時間的に変化し、その結果④で電界が変化する。そうすると、①～⑧の多くの式がお互いに関係してくる。電源、電線、抵抗だけでなく空気中の電磁界も含めて①～⑧は成り立つ。回路で、電源、電線、抵抗だけを考えているのは大きな違いである。

しかしながら、電源の周波数が60Hz程度で、電線の長さも送電線のように長くなければ、その動作は簡単になる。交流回路で(3-1)、(3-2)が成立することは電源の起電力 $V_e$ を時間の関数と考えるだけで、直流の場合と式は同じである。オームの法則については(3-27)で詳しく述べた。これらの前提の下、交流電源を接続した図3-10の場合について考えよう。スイッチを閉じて時間が十分経過した定常状態にあるとする。導線の中の電位は変わらないから、クーロン電界 $E_c$ より求めた導線間の電圧が電源の起電力 $V_e(t)$ と等しくなければいけない(電源の内部抵抗は無視する)。従って導体表面の電荷は時間と共に各点で正負に増減する必要がある。これは導体中の電子の移動によって達成される。電子の速度は遅いので、 $V_e$ の極性や大きさに応じて電子は左右に行き来するだけで、電子が循環することは考えられない。ただし電子の速度が遅いのは平均値であり、かなりの速度で動く電子もあろう。なおポインティングベクトルの向きは電流の向きが逆になっても電界の向きも逆になるから常に右向きである。周波数が高くなると電界が場所によって変わってくる(第7章参照)。 $V_e, I$ の矢印は測定の向きである。



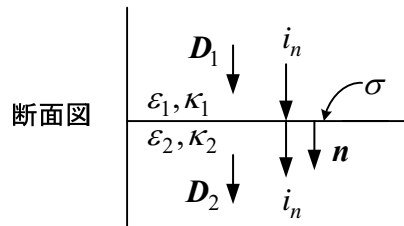
(a) 電源電圧 $V_e$ が正のとき



(b) 電源電圧 $V_e$ が負のとき

図3-10 交流電源の電界(定常状態)

**例題 2** 誘電率と導電率がそれぞれ  $\epsilon_1, \kappa_1$  の媒質 1 と  $\epsilon_2, \kappa_2$  の媒質 2 の境界面に垂直に電流密度  $i_n$  の直流電流が流れるとき、境界面に蓄積される面自由電荷密度  $\sigma$  を求めよ。



(解) 境界面において、境界条件(2-64)より

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \sigma \quad \therefore \quad \epsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 = \sigma \quad (1)$$

オームの法則より

$$\mathbf{i}_1 = \kappa_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{i}_2 = \kappa_2 \mathbf{E}_2 \quad (2)$$

である。(2)を(1)に代入して

$$\frac{\epsilon_2}{\kappa_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_2 - \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1 = \sigma$$

(2-68)の境界条件で、直流電流だから電荷密度の時間変化がないので

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1 = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

であるから、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1 = i_n$  である。よって、

$$\sigma = \left( \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \right) i_n \quad (4)$$

媒質 1 が完全導体  $\kappa_1 = \infty$ 、媒質 2 が抵抗の場合を考える。媒質 2 は銅の 100 倍の抵抗率と真空の誘電率とする。電流密度  $i_n = 1 \text{ A/mm}^2$  としよう。このとき面自由電荷密度  $\sigma$  は、(4)より次式で求められる。

$$\sigma = \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} i_n = \frac{8.854 \times 10^{-12}}{5.9 \times 10^5} \times 1 \times 10^6 = 1.5 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$$

よって、境界面にある自由電子の個数は

$$n = \frac{\sigma}{e} = \frac{1.5 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-19}} = 0.94 \times 10^8 \text{ 個/m}^2$$

となる。銅の場合、 $n = 8.46 \times 10^{28} \text{ 個/m}^3$  であり、原子 1 個の層中には  $10^{19} \text{ 個/m}^2$  程度の自由電子が存在する。これに比べると境界面にある自由電子の個数は非常に少ない。しかし、この電荷が抵抗中のクーロン電界を作っている<sup>(12)</sup>。

抵抗では両端の  $\sigma$  の変化による電流を考える必要はない。しかし、導電率  $\kappa_2$  が非常に小さくなって絶縁物に近づくと、抵抗がコンデンサのようになって  $\sigma$  の変化による電流が無視できなくなる。電荷の時間変化がある場合、媒質 2 が絶縁物で  $\kappa_2 = 0$  のとき、(2)より  $\mathbf{i}_2 = \mathbf{0}$  だから、(2-68)より  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_1 = \partial \sigma / \partial t$  であり、境界面の面積を両辺に掛けると  $I = \partial Q / \partial t$  になる。コンデンサの極板の式である。

## 第4章 コンデンサ

コンデンサでは、多くの場合、磁束密度の変化による誘導電界  $\mathbf{E}_b$  は  $\mathbf{0}$  と考えるので、以下に示す電界  $\mathbf{E}$  は特に断らない限り電荷が作るクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  を意味する（面倒なので  $\mathbf{E}_c$  の代わりに  $\mathbf{E}$  と書く）。すなわち、⑨で  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_c$  であり、 $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$  が常に成り立つ場合を考える。まず時間的に変化しない静電界を考え、後で電荷の時間的な変化を考える。

### ○ 静電界とは？

まず、最も簡単な場合として、誘電率  $\epsilon$  の空気中にある金属導体球の表面に分布した時間的に変化しない自由電荷が作る静電界(electrostatic field)を考えることにしよう。空気中の誘電率は真空中の誘電率  $\epsilon_0$  とほぼ等しいが、あえて区別することにより一般的な式を示すことができる。なお空気中の  $\epsilon$  は一定である。真空中なら  $\epsilon = \epsilon_0$  とおけばよい。

導体球に電荷を集める方法を図 4-1 に示す。スイッチ  $S$  を閉じると電源によって導体球の電子がアース（大地）に移動し、導体球は正に帯電される。その後スイッチ  $S$  を開いても、導体球の表面の電荷は正に分布したままである。導体球を負に帯電させたい場合には電源の極性を逆にし、同様に行えばよい。導体球と大地あるいは無限遠点が一種のコンデンサになっていると考えればよい。

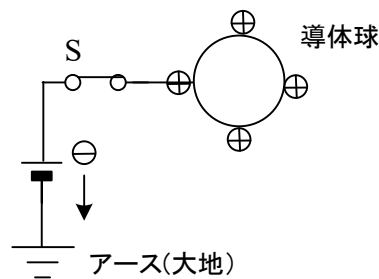


図 4-1 電荷の集め方

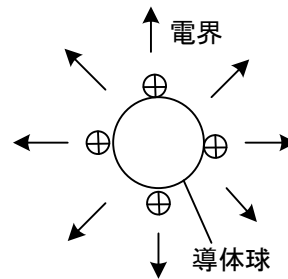


図 4-2  $\rho$  が作る電界

図 4-1 で得られた帯電した導体球が図 4-2 のように空気中にあるとしよう（大地は考えないので電荷は一様に分布する）。このとき①～⑧について、どのような式が成り立つか考える。

導体球表面の自由電荷密度  $\rho$  は時間的に変化しないので  $\partial\rho/\partial t = \mathbf{0}$  である。導体球の運動は考えないので、 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  である。また伝導電流は  $\mathbf{i} = \mathbf{0}$  である。全ての量の時間変化は考えられないので、 $\partial\mathbf{D}/\partial t = \mathbf{0}$  である。このとき②, ③, ⑦より、全空間で磁界を作る原因となるもの（電流や磁石）がないから、磁界  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  となる。以上のことから、空間の各点で成り立つ

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad (4-1)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4-2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \quad (4-3)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (4-4)$$

と境界条件を使って問題を解くことになる。これらの式は、静電界を記述する式である。

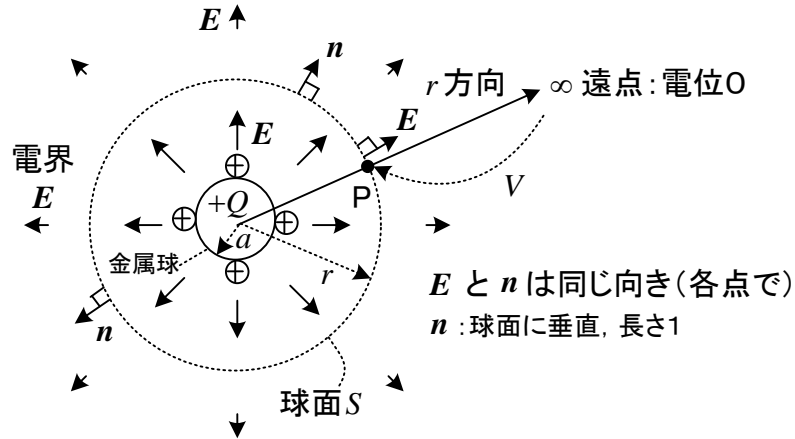


図 4-3 導体球表面の電荷が作る電界

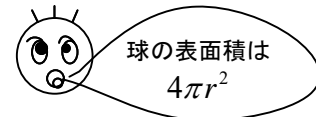
それでは、電界を求めよう。

簡単に電界を求めるには、**ガウスの法則**(Gauss' law) (4-1)の積分形①'を利用する。図 4-3 に示すように、中心が導体球と同じで、半径  $r$  の球面  $S$  (**ガウス面**(Gauss surface)とよぶ) を考えると、 $\epsilon$  は定数だから①'より面  $S$  上で次式が得られる。 $\mathbf{n}$  は外向きの単位法線ベクトルである。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho \, dV = Q \quad (4-5)$$

体積  $V$  は、球面  $S$  で囲まれた全体であるが、電荷は導体球表面にしかない。導体球の表面電荷を集めた全電荷を  $Q[\text{C}] > 0$  とする。電界や電束密度の大きさは、対称性より球面上ではどこでも同じで、方向は球面に垂直で  $\mathbf{n}$  方向と仮定する。この仮定は後でチェックする。なお、(4-5)は、導体球を含む任意の閉曲面  $S$  で成り立つが対称性が利用できるように選ぶ。 $\mathbf{E} = |\mathbf{E}|$  において

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S |\mathbf{E}| |\mathbf{n}| \cos 0 \, dS = \epsilon \int_S E \, dS = \epsilon 4\pi r^2 E = Q$$



よって、電界の大きさは

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (Q > 0 \text{ のとき}) \quad (4-6)$$

となる。電界は電荷から遠いほど弱くなり、無限遠点では 0 である。 $Q < 0$  の場合には、 $\mathbf{E}$  の向きが逆になるが、 $\mathbf{n}$  の向きは変わらないので、なす角は  $\pi$  で  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -E$  となり、同様にして

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{-Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (Q < 0 \text{ のとき}) \quad (4-7)$$

となる。 $E$  は大きさであり当然ながら正になっている。

$Q$  の正負によらず、もっとスマートに解く方法がある。それは、以下のような変形である。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S E_r \, dS = \epsilon 4\pi r^2 E_r = Q$$

$$\therefore E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (Q > 0 \text{ のとき } E_r > 0, \quad Q < 0 \text{ のとき } E_r < 0) \quad (4-8)$$

$$\text{ここで,} \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E_r \quad (4-9)$$

$E_r$  は  $\mathbf{E}$  の  $\mathbf{n}$  方向成分で、正にも負にもなる。球座標系で  $\mathbf{E} = (E_r, E_\theta, E_\phi) = (E_r, 0, 0)$  の意味でもある。絶対値は  $E = |E_r|$  である。(4-8)は(4-6) , (4-7)のように  $Q$  の正負で分けなくてよい。

電界をベクトルで表示するには、球の中心を原点とした位置ベクトル  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  を用いて以下の様に表すことができる。 $\hat{\mathbf{r}}$  は  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトルで  $\mathbf{r}/r = \hat{\mathbf{r}}$  ,  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$  である。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} = E_r \hat{\mathbf{r}} \quad (r \geq a, Q \text{ は正負 OK}) \quad (4-10)$$

$$\text{ここで, } r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, |\hat{\mathbf{r}}| = 1$$

(4-10)は、電界の向きと大きさを考えた一般的な表現である。 $\hat{\mathbf{r}}$  は球座標系で使う単位ベクトルで、場所によって向きが違うことに注意しよう。 $\mathbf{D}$  は  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  より求める。先に  $\mathbf{D}$  を求めても良い。(4-6)や(4-10)は(4-1)の積分形だけを使って求めたので、正しいかどうかはまだ判らない。

電界(4-10)のチェック：

(4-10)は球座標系での表示となっていて、 $\hat{\mathbf{r}}$  成分  $E_r$  のみで、 $E_\theta = E_\phi = 0$  である。 $r^2 E_r$  は定数だから(付 25)より、 $\text{div } \mathbf{E} = 0 \therefore \text{div } \mathbf{D} = 0$  が得られ、 $r > a$  で(4-1)を満たす。(付 26)より、見ただけで(4-2)の  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  が成り立つことが判る。 $r = a$  では、境界条件を満足する必要がある。 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{n}$  は同方向だから(2-66)を満たす。また  $r = a$  で(4-10)より  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = Q/(4\pi a^2) = \sigma$  となり、(2-67)を満たす。よって得られた解(4-10)は(4-1)( $\rho = 0$ )、(4-2)及び境界条件を満足し、最初に図 4-3 で放射状の電界を仮定したことが正しかったのである。なお、一般にマクスウェルの方程式と境界条件を満足する解は 1 つだけであることが分かっている(解の一意性)。したがって、どんな方法で求めてもこれらの条件を満足するなら解である。

積分形①を用いたから、(4-1)を除いて(4-2)及び境界条件を満足するかチェックすればよいであろう。最初に(4-2)及び境界条件を満足するような力線を考えられたらそれでもよい。

次に空気中の任意の点 P の電位  $V$  (無限遠点に対する P 点の電圧) を求めよう。図 4-4 に示すように、電位は 1C の電荷を無限遠点から運ぶときの仕事を表しており、運ぶ路  $C$  を無限遠点から導体球までの直線上とすると ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  のとき道によらないことを 3 章で示した)、⑩より

$$V = \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} dl = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl \quad [\text{V}] \quad (4-11)$$

で求められる。1C の電荷に電界が及ぼす力は(4-4) より  $q\mathbf{E} = \mathbf{E}$  であり、これに逆らう力で太郎が動かすので、 $\mathbf{F} = -\mathbf{E}$  である。(4-11)の  $\infty$  は無限遠点の意味である。 $\mathbf{t} = -\hat{\mathbf{r}}$  であり、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -E_r$$

である。(4-11)で常に  $dl > 0$  であるが、無限遠点から P 点まで積分するとき  $dr < 0$  なので、 $dl = -dr$  としなければならない(厳密には無限遠点の代わりに、遠い点  $r = R$  からの積分を考え、あとで  $R = \infty$  とする)。結局、(4-11)より次式が得られる。

$$V = - \int_{\infty}^r E_r dr = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (Q \text{ は正負 OK}) \quad (4-12)$$

(4-12)は電荷が負のときも成立し、このとき電位  $V$  は負になる。導体球と無限遠点を一種のコンデンサと考えた場合、(4-12)より静電容量は  $C = 4\pi\epsilon a$  [F] である。



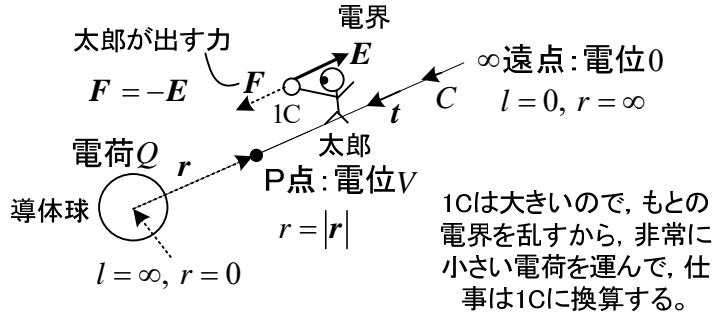


図 4-4 電界と電位のイメージ (無限遠点から 1C の電荷を運ぶ太郎)

$E, dr$  は、 $dr$  間の小さな電圧を意味し、これを集める(積分する)ことによって無限遠点と P 点間の電圧すなわち電位になる。平行平板コンデンサのように電界がどこでも一定なら単純に長さを掛ければよいが、電界が  $r$  によって違うため積分をしないといけなくなる。無限に遠い所から電荷を運ぶと太郎がする仕事(エネルギー)も無限になりそうであるが、遠いところは出す力は  $1/r^2$  オーダーで小さく、距離は  $r$  で増えるので無限にならない。

導体球内部の電界は 0 で、電位は導体球のどこでも等しく(4-12)で  $r = a$  とした値になる ((2-69)より境界面で電位は連続)。導体球の半径が十分小さい場合は点電荷(point charge)とよばれる。金属球の外部の電界や電位は同じ電荷  $Q$  であれば点電荷の場合も同じである。ここで、(4-1)をもう一度ながめてみよう。 $\rho$ (厳密には面電荷  $\sigma$ )は、導体球の表面だけに存在し、他は 0 である。よって多くの点で  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  である。たとえ  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  の点でも、空間のどこかに  $\rho$  (あるいは面電荷  $\sigma$ )があれば、 $\mathbf{D} = 0$  とはならないのである。また、導体球の誘電率は関係なかった。つまり導体球は球外と同じ  $\epsilon$  でなくてもよいのである。一般に、(4-1)や(4-3)は空間の各点で成立つが、点によっては  $\rho = 0$  であったり、 $\epsilon$  が異なったりすることがある。

(4-12)を使って、図 4-5 に示す  $V_{BA}$  (A 点から見た B 点の電圧) を求めよう。

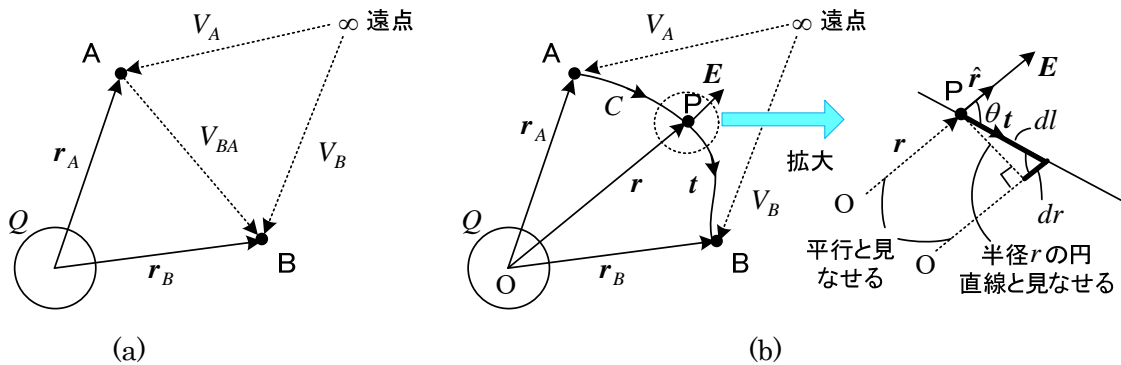


図 4-5 電圧  $V_{BA}$  の求め方

(4-12)を用いると、次式で求められる。

$$V_{BA} = V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_B} - \frac{Q}{4\pi\epsilon r_A} \quad (4-13)$$

これでよいのであるが、⑩より A 点から B 点まで C 上で線積分することで求めてみよう。道 C はどのように選んでもよかった。(4-10)より

$$V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} dl$$

ここで, (b)図より,

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} dl = dl \cos \theta = dr \quad (4-14)$$

が得られる ( $\theta = \pi$ なら  $dl = -dr$ , (4-12)で使用)。  $dr$  は原点からの距離  $r$  の変化分で正負がある。図で考えなくても,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  より,  $rdr = xdx + ydy + zdz = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$  と (1-42) を使って  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} dl = \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = dr$  としてもよい ( $\mathbf{r}/r = \hat{\mathbf{r}}$ )。よって, 結局次式により  $V_{BA}$  が求められる。

$$V_{BA} = -\int_A^B E_r dr = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (4-15)$$

$r_B = r, r_A = \infty$  とすると, (4-12) を導くこともできる。いろいろ導き方があり, どれも大切である。

ところで, クーロン電界 と電位は, (2-27) で次のように定義した。

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V \quad (4-16)$$

(4-16) を用いて, (4-12) から (4-10) を導いてみよう。まず

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{r^3} \quad (4-17)$$

である。(4-12) の  $V$  を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{x}{r^3} \hat{\mathbf{x}} - \frac{y}{r^3} \hat{\mathbf{y}} - \frac{z}{r^3} \hat{\mathbf{z}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (4-18)$$

が得られる。これは(4-10)と一致する。

(4-16) と (4-3) を (4-1) に代入すると  $\epsilon$  が一定なら, (付 12) の定義を用いて

$$\text{div}(\text{grad}V) \equiv \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4-19)$$

が得られる。これをポアソンの方程式(Poisson equation)と言う。(付 10) より  $\text{rot}(\text{grad}V) = \mathbf{0}$  は常に成立し, (4-16) を使うとき, (4-2) の条件は常に満たされているので, ポアソンの方程式には (4-1), (4-2) が加味されていることに注意しよう。(4-19) は, 直角座標系以外でも成立する。直角座標系の場合

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4-20)$$

となる。 $\nabla^2$  はラプラスの演算子 (Laplace operator, Laplacian) とよばれ, 直角座標系では

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4-21)$$

と書ける。電荷密度が 0 の点では

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{特に直角座標系では} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (4-22)$$

である。これをラプラスの方程式(Laplace equation)という。

静電界の問題を解く場合、境界条件を満たすようにポアソンの方程式またはラプラスの方程式を解いて電位を求め、次に(4-16)より電界を求めることも良く行われる<sup>(15),(25)</sup>。境界値問題という。

図 4-3 の場合に適用してみよう。球座標系を用いる。空気中では電荷密度は 0 だから、(4-22)を用いる。対称性より  $V$  は  $r$  のみの関数と考えられるから、(付 27)で  $\partial V / \partial \theta = \partial V / \partial \varphi = 0$  とおいて容易に

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad \therefore \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (V \text{ は } r \text{ のみの関数, } \partial \rightarrow d \text{ へ})$$

が得られる。 $k_1, k_2$  を定数として

$$r^2 \frac{dV}{dr} = k_1 \quad \therefore \frac{dV}{dr} = \frac{k_1}{r^2} \quad \therefore V = -\frac{k_1}{r} + k_2$$

一般に電位の基準を  $\infty$  遠点にとるので、 $r = \infty$  で  $V = 0$  とする。故に、 $k_2 = 0$  である。よって

$$V = -\frac{k_1}{r}$$

$V$  は  $r$  のみの関数だから(付 24)より

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{k_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = E_r \hat{\mathbf{r}} \quad \therefore E_r = -\frac{k_1}{r^2}$$

境界条件 (2-67)より、 $r = a$  で、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = D_r = \sigma$  (도체中電界 0),  $D_r = \epsilon E_r$ ,  $Q = 4\pi a^2 \sigma$  より

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon a^2} = -\frac{k_1}{a^2} \quad (r = a \text{ のとき}) \quad \therefore k_1 = -\frac{Q}{4\pi \epsilon}$$

これらの結果は(4-10),(4-12)に一致する。導体の表面に自由電荷が分布している場合には、ポアソンの方程式でなくラプラスの方程式を解いている点に注意しよう。

ポアソンの方程式の一般解は、常微分方程式と同様にポアソンの方程式の特解と、電荷密度を 0 と置いたラプラスの方程式の一般解 (無数にあり調和関数という) の和で与えられる<sup>(15),(25)</sup>。

## ○ クーロンの法則

図 4-3 で、 $a \rightarrow 0$  としたときの  $Q[\text{C}]$  の点電荷も(4-10)の電界を作る。図 4-6 の様に、 $r[\text{m}]$  離れた P 点に点電荷  $q[\text{C}]$  を置いたとき、 $q$  が電界から受ける力  $F[\text{N}]$  は(4-4)より次式となる。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{4\pi \epsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4-23)$$

これはクーロンの法則(Coulomb's law)と呼ばれる。 $q$  が作る電界が  $q$  に及ぼす自己力は 0 だから<sup>(2)</sup>、電界  $\mathbf{E}$  は  $Q$  が作る電界と考えてよい。点電荷とすれば、 $q, Q$  の値に関係なくクーロンの法則が成り立つ。 $q, Q$  はいずれも負になることもあるが、(4-23)は  $q$  に働く力のベクトルをどの場合も表している。しかし半径のある金属球では電荷分布が偏るので (4-23)は適用できない。

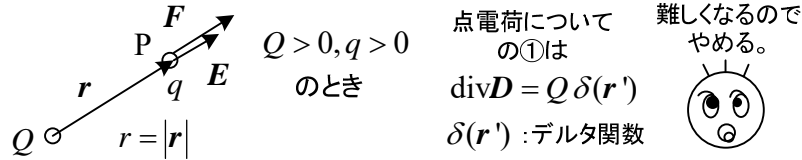


図 4-6 点電荷で成り立つクーロンの法則

力の大きさは真空中においては次式となる。

$$F = |\mathbf{F}| = \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \approx 9 \times 10^9 \frac{|q||Q|}{r^2} \text{ [N]} \quad (4-24)$$

$Q[\text{C}]$  の点電荷は  $q[\text{C}]$  の点電荷が作る電界によって(4-23)と同じ大きさの力を受ける。 $Q \neq q$  でも両者に働く力の大きさは同じである。2つの点電荷に働く力は、その方向が両電荷を結ぶ直線上にあり、同じ極性の電荷は反発し、異なる符号の電荷は引き合う。

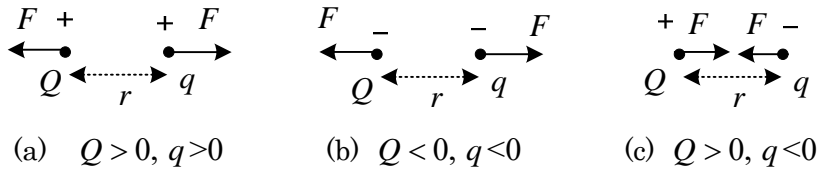


図 4-7 2つの点電荷に働く力の向きと大きさ

電荷と電荷の間には力が働くが、片方の電荷がもう片方の電荷に直接力を及ぼしているのではなく、電荷があると、そのまわりに電界ができ（第7章遅延ポテンシャル参照）、電界がもう片方の電荷に力を与えている。これを近接作用(action through medium)という<sup>(27)</sup>。

プラスの電荷とマイナスの電荷が空間にあり、その間にできる電界  $\mathbf{E}$  の様子を図 4-8 に示す。矢印の長さが  $\mathbf{E}$  の大きさを、矢印の向きが  $\mathbf{E}$  の向きである。各矢印は矢印の根の点の  $\mathbf{E}$  を示す。全て同じ  $\mathbf{E}$  と書いているが、 $\mathbf{E}$  は場所の関数で同じとは限らない。また、図示が難しいので平面上の点数で描いているが、実際の  $\mathbf{E}$  は全空間（3次元）に分布している。

$\mathbf{E}$  を電気力線(line of electric force)として図 4-9 の様に表す方法もある。静電界の場合について電気力線の性質を以下に示す。

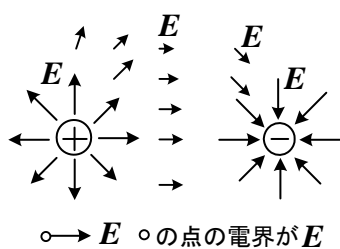


図 4-8 矢印による電界の表現

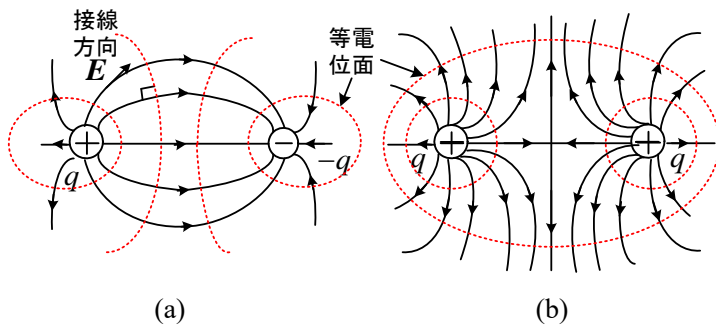


図 4-9 力線による電界の表現

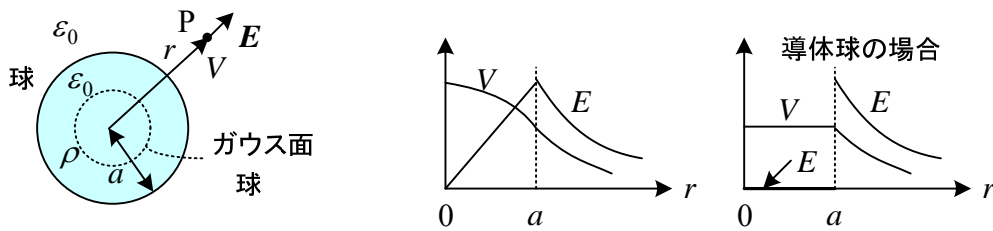
- (1) 電気力線の向きが各点の  $\mathbf{E}$  の向きで、密度で  $\mathbf{E}$  の大きさ  $E$  を表す。線が多く集まっていれば  $E$  は大きい。電気力線が十文字形になる交点の電界は  $0$  である<sup>(18),(29)</sup> (交点以外は  $0$  でないから十文字の線はあった方が分かり易い)。
- (2) 電気力線は正電荷より出て負電荷に終わる (ループしない)。無限遠点やアース(大地)に電荷があってそこで終わること(出ること)もある。電気力線は導体に垂直である。
- (3) 電気力線は電位の高い点から低い点に向う。
- (4) 電気力線は等電位面と垂直に交わる。
- (5) 電気力線はその向きに縮もうとする性質がある(図 4-9(a))。
- (6) 隣り合う電気力線は互いに押し合う性質がある(図 4-9(b))。

クーロンの法則を用いると、(4-23)より電界が得られるが、このテキストでは①～⑧で全ての電磁現象を説明したい。クーロンの法則は、①だけでなく  $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$  の条件も含む点に注意しよう。

## ○ 静電界の基本的な例題

これから、静電界の基本的な問題を解いて理解を深めよう。

**例題 1** 図の様に半径  $a$ [m] の球内に一様に電荷密度  $\rho$ [C/m<sup>3</sup>] の電荷が分布している。各部の電界と電位を求めよ。場は真空中とする。(球の体積は身の上に心配アールの 3 乗)



(解) 対称性より電界は放射状にできると考えられる。球全体の電荷  $Q$ [C] は、 $Q = (4/3)\pi a^3 \rho$   
 $r > a$  の場合

導体球表面に電荷が分布している場合と同じで、電界と電位は次式で求められる。

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ [V/m]}, \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ [V]}$$

$r < a$  の場合

半径  $r$  の球の表面をガウス面として、ガウスの法則を適用すると以下のように求められる。

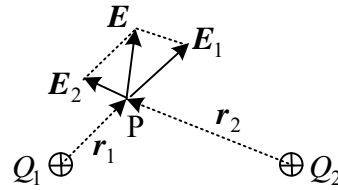
$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 \int_S E_r dS = \epsilon_0 4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \therefore E_r = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}$$

$$V = -\int_{\infty}^r E_r dr = -\left(\int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_a^r \frac{r\rho}{3\epsilon_0} dr\right) \quad \therefore V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} (a^2 - r^2)$$

(参考)ポアソンの方程式  $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  の一般解  $V = -\rho r^2 / (6\epsilon_0) - k_1 / r + k_2$  から

求められる ( $r < a$  の場合)。未定係数は  $r = a$  の境界条件、 $r \rightarrow 0$  で有界だから  $k_1 = 0$  で決定する。

例題2 誘電率  $\epsilon$  の空気中に図に示すように2個の正の点電荷  $Q_1, Q_2$  がある。P点に作る電界  $E$  を求めよ。またP点の電位  $V$  を求めよ。



(解) 点電荷  $Q_1, Q_2$  によって作られる電界をそれぞれ  $E_1, E_2$  とする。重ね合わせの理を用い  $E_1, E_2$  のベクトル和より、P点の電界  $E$  が以下の様に求まる。

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1^2} \frac{r_1}{r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2^2} \frac{r_2}{r_2} \quad \text{ただし, } r_1 = |r_1|, r_2 = |r_2|$$

P点の電位  $V$  は

$$V = -\int_{\infty}^P E \cdot t \, dl = -\int_{\infty}^P (E_1 + E_2) \cdot t \, dl = -\int_{\infty}^P E_1 \cdot t \, dl - \int_{\infty}^P E_2 \cdot t \, dl = V_1 + V_2$$

であるから、電位についても重ね合わせの理が成立つことがわかる。よって

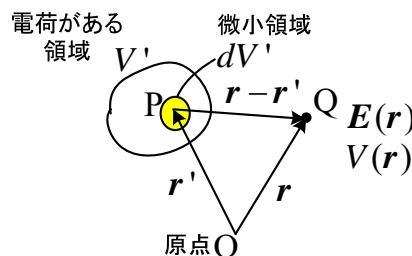
$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2}$$

点電荷が3個以上の場合にも同様に重ね合わせの理で計算できる。電荷が領域  $V'$  に連続的に分布している場合には、体積分してQ点の電界と電位が計算できる。すなわち、電荷が領域  $V'$  にあるとき  $r'$  を変化させて  $V'$  の中を動かし電界や電位を集めればよい。PQ点間の距離  $|r - r'|$  が関係する。これまでは  $|r - r'|$  を  $r_1, r_2$  としていたので式が簡単に見えていた。Q点の電界と電位は

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(r')(r - r')}{|r - r'|^3} dV' \quad (4-25)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV' \quad (4-26)$$

考えている空間が無限に広く同じ誘電率の空間のときのみポアソンの方程式(4-20)の解が(4-26)となる。また、(4-25), (4-26)は、電荷分布が既知でないと適用できない。



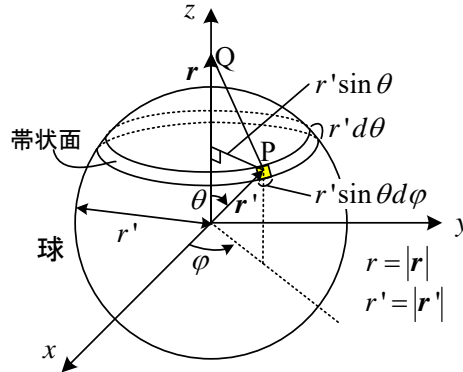
(4-26)を用い、 $E(r) = -\text{grad}V(r)$  より(4-25)が得られる。以下の式を利用する。

$$r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad r' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

$$|r - r'| = \{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{x-x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \quad -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad \text{など}$$

誘電率  $\epsilon$  の空气中で導体球の表面に一様に電荷  $Q$  (全電荷) が分布している図 4-3 を例に, (4-26) を用いて半径  $r$  の  $Q$  点の電位  $V$  を求めてみよう。



図に示すように  $Q$  点を  $z$  軸上にとっても一般性を失わない (そのような  $x, y, z$  軸を選べばよいので)。 (4-26) を用いる場合, 球の表面で  $P$  点を変化させて, それぞれの電荷の寄与を集めないといけない。電荷は球の表面  $S$  にしか分布していないので, 面電荷密度  $\sigma$  (定数) を考えると

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS$$

となり, 面積分で計算できる。ここで,  $PQ$  間の距離だから

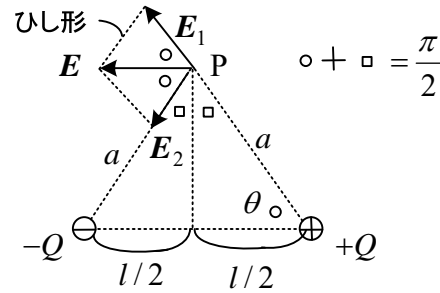
$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}$$

図に示すように  $P$  点まわりの微小長方形面積は,  $r'd\theta \times r'\sin\theta d\phi$  である。まず  $\phi$  を動かして図の帯状面で電荷寄与分を集め, 次に帯状面の  $\theta$  を動かして全体の電荷寄与分を集める。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma r'^2 \sin\theta d\phi d\theta}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}} && \sigma, r, r' \text{ は定数} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r'^2 \sin\theta}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}} d\phi \right) d\theta && \phi \text{ で積分するとき } \theta \text{ は定数とみる} \\ &= \frac{2\pi}{4\pi\epsilon} \int_0^\pi \frac{\sigma r'^2 \sin\theta}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}} d\theta && -\cos\theta = t \text{ とおくと, } \sin\theta d\theta = dt \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{-1}^1 \frac{\sigma r'^2}{(r^2 + r'^2 + 2rr't)^{1/2}} dt = \frac{\sigma r'}{2\epsilon r} \left[ (r^2 + r'^2 + 2rr't)^{1/2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\sigma r'}{2\epsilon r} (\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}) = \frac{\sigma r'^2}{\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} && r > r' \text{ より} \end{aligned}$$

これは(4-12)に一致している。

例題3 誘電率  $\epsilon$  の空気中に  $+Q[C], -Q[C]$  ( $Q > 0$ ) の点電荷が,  $l[m]$  離れてある。点電荷からそれぞれ  $a[m]$  離れた点 P の電界と電位を求めよ。



(解)  $+Q, -Q$  による電界をそれぞれ  $E_1, E_2$  とすると,  $E_1, E_2$  の大きさは等しく

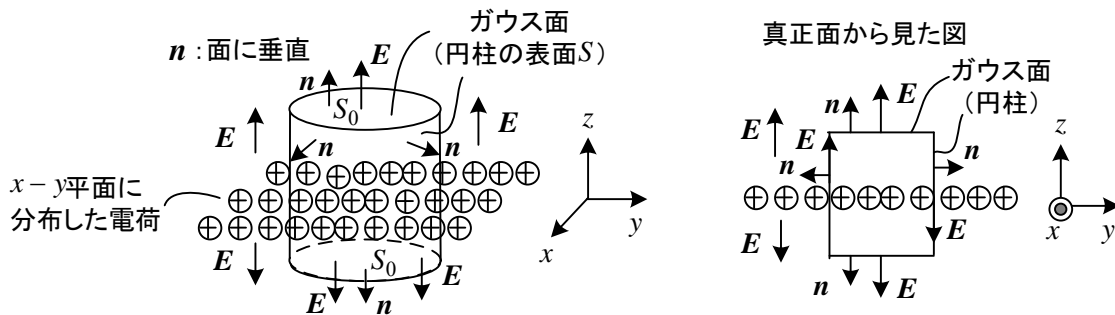
$$|E_1| = |E_2| = \frac{Q}{4\pi\epsilon a^2}$$

$E$  は重ね合わせの理より  $E_1 + E_2$  で求まる。図より方向は電荷を結ぶ線に平行で, 大きさは,

$$|E| = 2 \times \frac{Q}{4\pi\epsilon a^2} \cos\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon a^3}$$

電位は, 重ね合わせの理より  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon a} = 0$  である。

例題4 無限に広い  $x-y$  平面上に一様に電荷が分布している場合の電界を求めよ。電荷の面密度を  $\sigma[C/m^2]$  (正) とする。また, 空間は誘電率  $\epsilon$  の空気中とする。



(解) ガウスの法則の積分形①を用いる。面積分を行うガウス面としては, 中心軸が  $z$  軸に平行な円柱の表面とする。電界は  $z$  軸方向に一様に分布していると考えられる。円柱表面に垂直で外向きの単位法線ベクトル  $n$  と電界  $E$  の内積は, 側面では両者が直交するので 0 になるから, 面積  $S_0$  の上の面と下の面だけを考えればよい。よって,

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 2\epsilon \int_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 2\epsilon E S_0 = \int_V \rho \, dV = \sigma S_0$$

ただし,  $E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  である。よって,

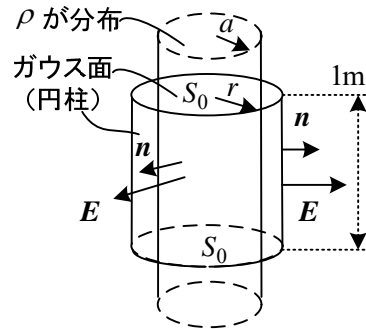
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon} \quad (D = \frac{\sigma}{2}) \tag{4-27}$$

$\sigma < 0$  の場合には, 大きさは同じで電界の向きが逆になる。(4-27)はそのまま成立する。



チェック： $\mathbf{E}$  は  $x, y, z$  の関数でないので、 $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$  を満足している。この場合無限に広がった電荷を考えているから、無限遠点でも電界は  $0$  でない。

**例題 5** 図の様に誘電率  $\epsilon$  の空气中で無限に長い軸を持つ半径  $a$  [m] の円筒内に一様に電荷密度  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>] の電荷が分布している。このとき各部の電界を求めよ。



(解) 電界は軸から外側に向って放射状にできると考えられる。軸が同じで、半径  $r$  [m]、高さ  $1\text{m}$  の円柱のガウス面を考える。上面と下面では  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{n}$  は直交するので  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$  である。

$r < a$  のとき、ガウスの法則より

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon \int_{\text{側面}} E_r \, dS = \epsilon 2\pi r \times 1 \times E_r = \int_V \rho \, dV = \pi r^2 \times 1 \times \rho$$

$$\therefore E_r = \frac{r}{2\epsilon} \rho$$

$a > r$  のとき、ガウスの法則より

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \epsilon 2\pi r \times 1 \times E_r = \int_V \rho \, dV = \pi a^2 \times 1 \times \rho$$

$$\therefore E_r = \frac{a^2}{2\epsilon r} \rho$$

(注)  $a \leq r$  のとき、 $r$  点の電位については、電界に沿って、電界を積分することで

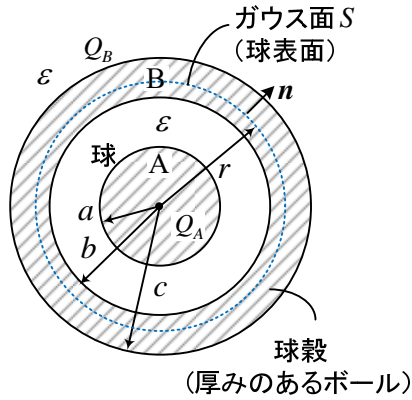
$$V = -\int_{\infty}^r \frac{a^2 \rho}{2\epsilon r} \, dr = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon} [\log r]_{\infty}^r = \infty$$

となる。これは無限に長いとしたことによる。半径  $r_1$  の点から見た半径  $r_2$  の点の電位差は

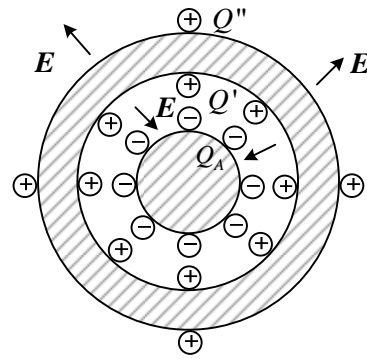
$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{a^2 \rho}{2\epsilon r} \, dr = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon} [\log r]_{r_1}^{r_2} = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon} \log \frac{r_1}{r_2}$$

チェック：円柱座標系の(付 21)より  $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$  が得られる。 $E_\phi = E_z = 0$  である。

**例題 6** 図(a)のように半径  $a$  の導体球 A の外側に、中心が同じで内半径  $b$ 、外半径  $c$  の導体の球殻 B で包み、それぞれに電荷  $Q_A, Q_B$  を与えた。各部分の電界と電位を求めよ。ただし、A, B 間と B の外は誘電率  $\epsilon$  の空气中とする。 $Q_A < 0, Q_B > 0, Q_A + Q_B > 0$  とする。



(a)



(b)

(解) 導体中の電界は 0 で、対称性より電荷は導体表面に一樣に分布すると考えられる。また、対称性と境界条件(2-66)より電界は放射状にできると考えられる。

B の外側 ( $r > c$ ) : 半径  $r$  の同心球表面をガウス面として、ガウスの法則より(図 4-3 と同様)

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \varepsilon \int_S E_r dS = \varepsilon 4\pi r^2 E_r = \int_V \rho dV = Q_A + Q_B \quad \therefore E_r = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon r^2}$$

電位は、 $V = -\int_{\infty}^r E_r dr = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon r}$

B の中 ( $c > r > b$ ) : 導体中なので  $E_r = 0$ 、電位は  $V = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon c}$  で一定である。

$E_r = 0$  だから、ガウスの法則より  $0 = Q_A + Q' \quad \therefore Q' = -Q_A$

A と B の間 ( $b > r > a$ ) : ガウス面の中の電荷の和は、 $Q_A$  のみだから

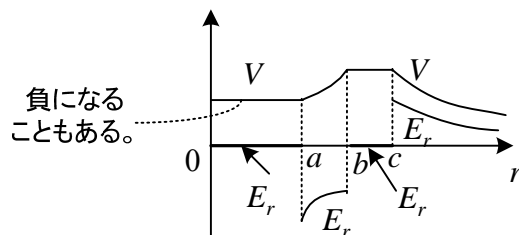
電界は、 $E_r = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon r^2}$

電位は B の電位に  $V_{rb} = -\int_b^r E_r dr = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon r} - \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon b}$  分が加わるので

$$V = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon r} - \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon b} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon c}$$

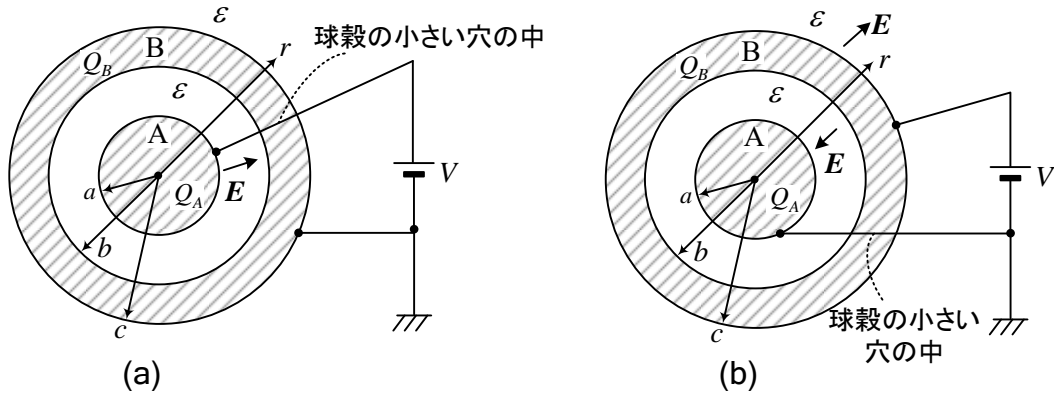
A の中 ( $a > r$ ) : 導体中なので電界は 0 である。

電位は  $V = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon a} - \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon b} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon c}$  で一定である。



**例題 7** 図(a)のように半径  $a$  の導体球 A の外側に、中心が同じで内半径  $b$ 、外半径  $c$  の導体の球殻 B で包み、それぞれに図のように電圧  $V$  の電源を接続した。(a),(b) それぞれの場合について、A,B

の総電荷量  $Q_A, Q_B$  を求めよ。A,B間とBの外は誘電率  $\epsilon$  の空気とする。



(解) (a) 無限遠点と接地しているBの電位は0である。よってBの外側の電界は0となる。Bの外側に同心球面を考えるとガウスの法則より内部の電荷の和が0となる必要があるから、

$$Q_A + Q_B = 0 \quad (Q_A > 0, Q_B < 0)$$

電界は放射状と考えられ、A,B間に半径  $r$  の同心球面をとってガウスの法則を適用すると

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_A}{\epsilon} \quad \text{よって、} \quad \text{電界 } E_r = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon r^2}$$

半径  $r$  の同心球面の電位  $V$  (電源電圧に等しい) は、導体が同電位だから、

$$V = -\int_b^a \frac{Q_A}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (1)$$

$$\therefore Q_A = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} V, \quad Q_B = -Q_A \quad (\text{静電容量 } C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} \text{ となる。})$$

(b) BがAより電位が高いので、A,B間ではBからAに向かって電界  $E$  が生じる。よって、 $Q_A < 0$  である。A,B間の電界は  $Q_A$  だけで決り、電界の向きが逆だから (1)より

$$V = \frac{-Q_A}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \therefore Q_A = 4\pi\epsilon \frac{ab}{a-b} V \quad (2)$$

Bの外側に半径  $r$  の同心球面をとってガウスの法則を適用すると、閉曲面内の電荷は  $Q_A + Q_B$  で、無限遠点 (電位=0) に比べて電位が高いので、 $Q_A + Q_B > 0$  である。ガウスの法則より、

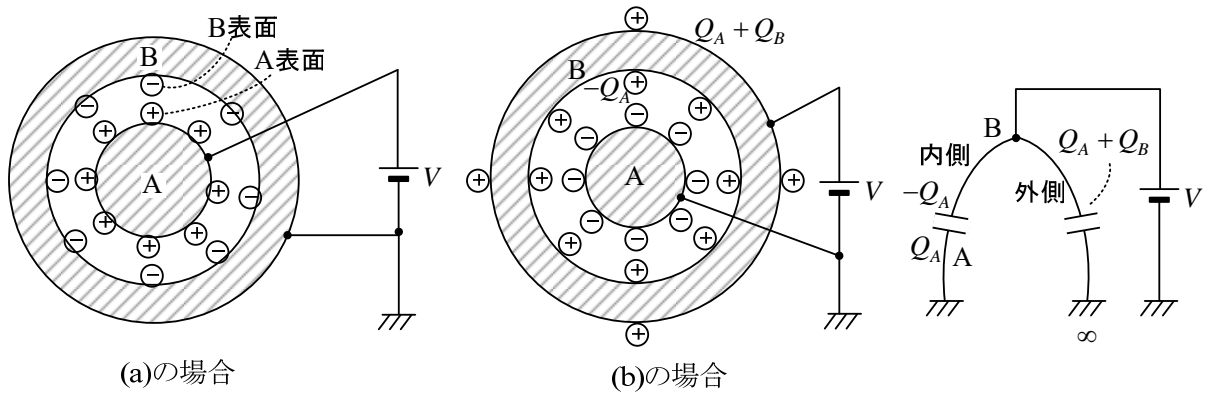
$$E_r = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

球殻の電位は、

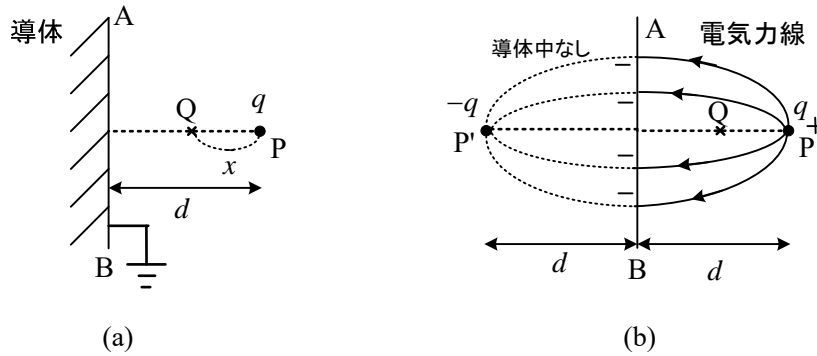
$$V = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon c} \quad \therefore Q_A + Q_B = 4\pi\epsilon c V \quad (3)$$

$$(2), (3) \text{より} \quad Q_B = 4\pi\epsilon \left( c + \frac{ab}{b-a} \right) V \quad (\text{静電容量 } C = 4\pi\epsilon c + 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} \text{ となる。})$$

無限遠点と接地しているAはともに電位0である。これらとBとの間の静電容量は、Bと無限遠点との静電容量  $4\pi\epsilon c$  にAB間の静電容量を加えたものとなる (並列だから)。無限遠点は實際上、地球表面に対応する。電荷は导体表面に図の様に分布する。



**例題 8** 図(a)の様に接地された無限に広い導体板から  $d$  離れた空气中 (誘電率  $\epsilon$ ) の P 点に、 $q(>0)$  の点電荷がある。P 点から  $x$  離れた Q 点の電界の大きさと電位を求めよ。



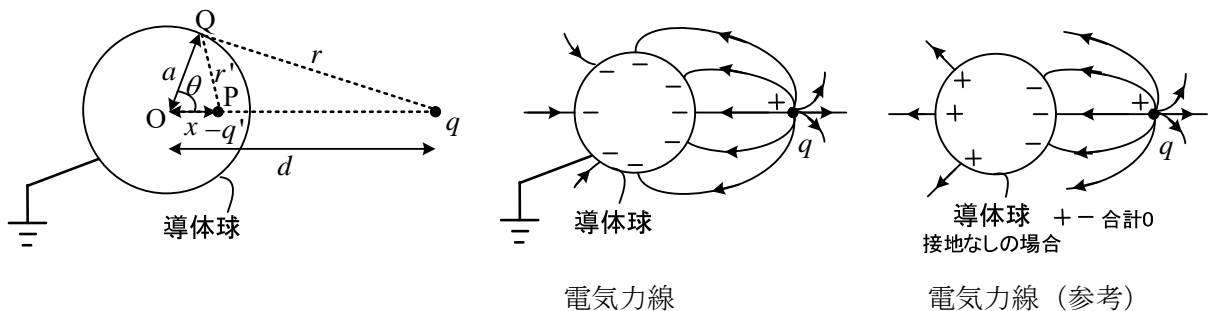
(解) 図(b)に示すように、導体をなくして、P と対称の位置にある P' 点に電荷  $-q$  を置いた場合を考える。導体に垂直に電気力線ができるので、(a),(b)については、面 AB の右側の電界は等しいと考えられる。従って、Q 点の電界 (左向きを正方向として) は重ね合わせの理より

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon x^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon(2d-x)^2}$$

電位も重ね合わせの理より 
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon x} - \frac{q}{4\pi\epsilon(2d-x)}$$

このような考え方を **影像法(image method)** という。影像法では、考えている空間の電荷分布は変えないで、境界条件を満たすようにすればよい。

**例題 9** 接地された半径  $a$  の導体球の中心 O から  $d$  離れた点に、 $q(>0)$  の点電荷がある。導体球の外 (誘電率  $\epsilon$  の空气中) の電位を求めよ。



(解) O から  $x$  の P 点に  $-q'$  の電荷をおいて, 導体表面の電位が 0 となるようにする。導体球上に点 Q をとり, 導体球を取り除いて考える。Q 点の電位  $V$  は次式で与えられる。

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{-q'}{r'} + \frac{q}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{-q'}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta}} + \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}} \right)$$

導体球外の電界が等しくなるには,  $V = 0$  であればよい。よって,

$$\frac{q'}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta}} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}}$$

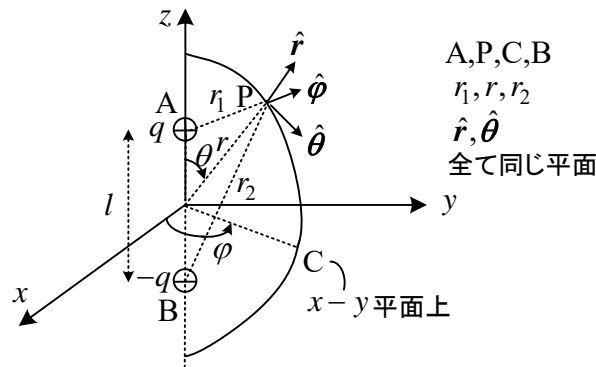
$q > 0$  なので,  $q' > 0$  でなければならない。両辺を 2 乗して

$$q'^2(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta) - q^2(a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta) = 0$$

任意の  $\theta$  について成り立つには,  $\cos \theta$  の係数が 0 でなくてはならないので,  $x, q'$  が以下のように求められる。

$$d x^2 - (a^2 + d^2)x + a^2 d = 0 \quad \therefore (xd - a^2)(x - d) = 0 \quad \text{などにより } x = \frac{a^2}{d}, q' = \frac{a}{d}q$$

**例題 10** 図のように誘電率  $\epsilon$  の空气中で, 原点から  $l/2$  離れた  $z$  軸上の 2 点 A, B にそれぞれ  $q, -q$  ( $q > 0$ ) の点電荷がある。原点から  $r$  の距離にあり, 角度  $\theta$  の点 P の電位を求めよ。さらに,  $l$  が  $r$  に比べて十分小さいとき (電気双極子(electric dipole)という) の電位と電界を求めよ。



(解) 対称性から, 図の角度  $\phi$  (ファイ) が変わっても P 点の電位は同じと考えられる。P 点の電位は, 重ね合わせの理により

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon r_2} \quad (1)$$

ここで,  $r_1 = \sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2 - rl \cos \theta}$ ,  $r_2 = \sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2 + rl \cos \theta}$  (余弦定理)

次に,  $(l/r) \ll 1$  の場合を考える。  $\delta \ll 1$  のとき近似式  $(1 + \delta)^\alpha \approx 1 + \alpha\delta$  を用いて

$$r_1 = \sqrt{r^2 \left( 1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 - \frac{l}{r} \cos \theta \right)} \approx r \left( 1 - \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}} \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta \quad (2 \text{ 乗の項は無視})$$

同様に  $r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta$

$$\frac{1}{r_1} \approx \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta\right)^{-1} = \left\{r \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta\right)\right\}^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos \theta\right), \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta\right)$$

よって、(1)に代入して、 $V = \frac{M}{4\pi\epsilon r^2} \cos \theta$  [V] (4-28)

ここで、

$$M = ql$$

は電気双極子モーメント(electric dipole moment)と呼ばれる。ベクトル表示して、両電荷の中央で $-q$ から $q$ へ向かうベクトル $\mathbf{M}$ を用いることもある。この場合 $\mathbf{M} = ql \hat{\mathbf{z}}$ である。 $\mathbf{M}$ を用いると、(4-28)は次式で表せる。

$$V = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3}$$

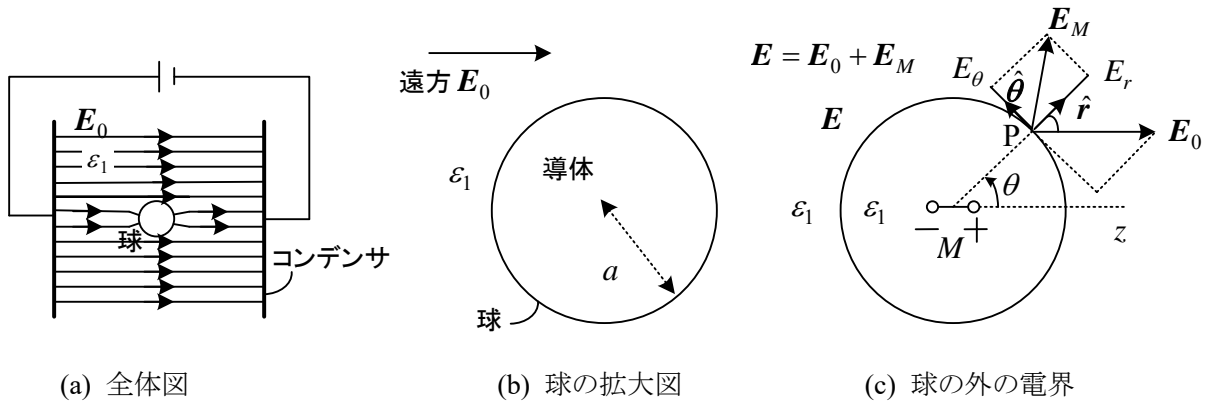
電界は、球座標系の(付 24)より $V$ は $r, \theta$ の関数だから

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{M}{2\pi\epsilon r^3} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{M}{4\pi\epsilon r^3} \sin \theta$$

$$\therefore E_r = \frac{M}{2\pi\epsilon r^3} \cos \theta, E_\theta = \frac{M}{4\pi\epsilon r^3} \sin \theta, E_\varphi = 0 \text{ [V/m]} \quad (4-29)$$

**例題 11** 図(a)に示すように誘電率 $\epsilon_1$ の平等電界 $\mathbf{E}_0$ の中に、半径 $a$ の電荷のない導体球を置いた。球の外の電界 $\mathbf{E}$ を求めよ。導体球によってコンデンサ極板付近の電界の乱れはないとする。

(解) 静電誘導により球内の導体中の電界は0である。



球の外の電界を考える場合には、平等電界 $\mathbf{E}_0$ と球の中心に双極子モーメント $\mathbf{M}$ の双極子を置き全体を誘電率 $\epsilon_1$ とした場合の電界との和と考える。球の境界の点 $\mathbf{P}$ における境界条件を満足するように、 $\mathbf{M}$ を決めることができればこの仮定は正しいと考えられる。

双極子が作る電界 $\mathbf{E}_M$ は(4-29)より次式で与えられる。

$$E_r = \frac{M}{2\pi\epsilon_1 r^3} \cos \theta, E_\theta = \frac{M}{4\pi\epsilon_1 r^3} \sin \theta \quad (1)$$

(2-66)より導体表面では電界 $\mathbf{E}$ の接線成分が0になることから次式が成立しなければならない。

$$-E_0 \sin \theta + \frac{M}{4\pi\epsilon_1 a^3} \sin \theta = 0 \quad \therefore M = 4\pi a^3 \epsilon_1 E_0 \quad (2)$$

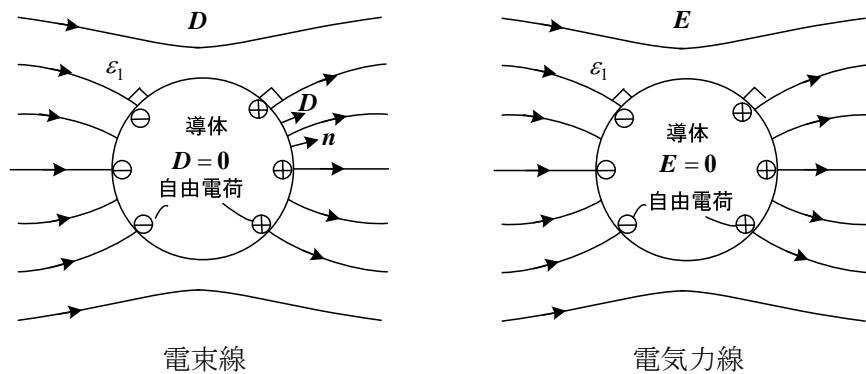
よって、全電界は(1), (2)及び、 $\mathbf{E}_0 = E_0(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$ より

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_M = \hat{r}\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)E_0 \cos \theta + \hat{\theta}\left(-1 + \frac{a^3}{r^3}\right)E_0 \sin \theta, \quad \mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E} \quad (3)$$

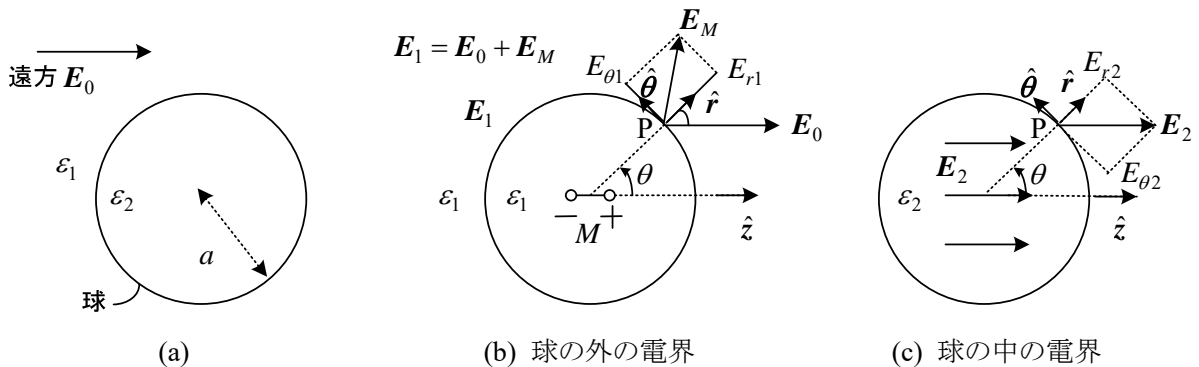
導体表面の自由電荷密度  $\sigma$  は(2-67)の  $\mathbf{D}$  の境界条件から(3)を用いて

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \hat{r} = \epsilon_1 \left(1 + \frac{2a^3}{a^3}\right) E_0 \cos \theta = 3\epsilon_1 E_0 \cos \theta$$

となる<sup>(15)</sup>。図は力線を示している。 $\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}$  より電束線と電気力線は大きさの違いだけである。



**例題 12** 図(a)に示すように誘電率  $\epsilon_1$  の平等電界  $\mathbf{E}_0$  の中に、誘電率  $\epsilon_2$ 、半径  $a$  の誘電体球を置いた。球の外の電界  $\mathbf{E}_1$  と球の中の電界  $\mathbf{E}_2$  を求めよ。



(解) 球の外の電界を考える場合には、平等電界  $\mathbf{E}_0$  と球の中心に双極子モーメント  $\mathbf{M}$  の双極子を置き全体を誘電率  $\epsilon_1$  とした場合の電界との和と考え、誘電率  $\epsilon_2$  の球の中は平等電界  $\mathbf{E}_2$  と仮定する<sup>(29)</sup>。球の境界の点 P における境界条件を満足するように、 $\mathbf{M}$  と  $\mathbf{E}_2$  を決めればこの仮定は正しいと考えられる。

双極子が作る電界  $\mathbf{E}_M$  は(4-29)より次式で与えられる。 $r$  が十分大きいと  $\mathbf{E}_M = \mathbf{0}$  となる。

$$E_{r1} = \frac{M}{2\pi\epsilon_1 r^3} \cos \theta, \quad E_{\theta1} = \frac{M}{4\pi\epsilon_1 r^3} \sin \theta$$

(2-63)より電界の接線成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

$$-E_0 \sin \theta + \frac{M}{4\pi\epsilon_1 a^3} \sin \theta = -E_2 \sin \theta \quad (1) \quad (E_2 = |E_2| \text{ とおく})$$

境界面に自由電荷はなく, (2-64)より電束密度の垂直成分が等しいから次式が成立しなければならない。

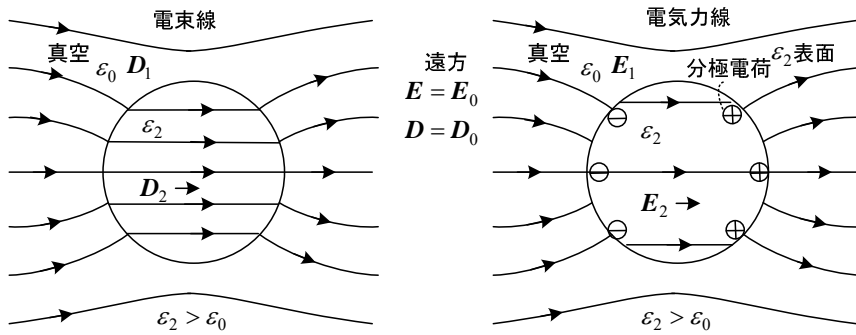
$$\epsilon_1 E_0 \cos \theta + \frac{\epsilon_1 M}{2\pi\epsilon_1 a^3} \cos \theta = \epsilon_2 E_2 \cos \theta \quad (2)$$

(1), (2)を解いて,  $M = \frac{4\pi a^3 \epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$ ,  $E_2 = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$  が得られる。よって,

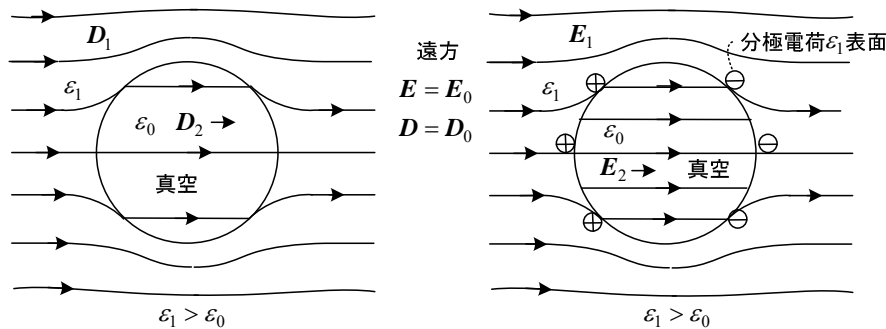
$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_M = (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) E_0 + (2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{a^3}{r^3} E_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{z} \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 = (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 \quad (4)$$

$\epsilon_2 \rightarrow \infty$  のとき, 導体球の結果と一致する。図は  $\epsilon_1 = \epsilon_0$  の場合と  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  の場合の力線を示している。電束線は連続であるが, 電気力線は境界面で不連続である。 $\epsilon_r$  は比誘電率で 1 より大きい。



(a)  $\epsilon_1 = \epsilon_0$  の場合



(b)  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  の場合

$$D_2 = \frac{3\epsilon_r}{2 + \epsilon_r} D_0$$

$$E_2 = \frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0$$

$$\epsilon_r = \epsilon_2 / \epsilon_0$$

$$\mathbf{P} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

$$D_2 = \frac{3}{2\epsilon_r + 1} D_0$$

$$E_2 = \frac{3\epsilon_r}{2\epsilon_r + 1} E_0$$

$$\epsilon_r = \epsilon_1 / \epsilon_0$$

(別解) 上記の解法では物理的な直観力が必要で, 誰もが思いつくようなものではないだろう。そこで, 偏微分方程式と境界条件から解を求めることにしよう。ただ, 最初から詳しく説明すると話が長くなって, 興味をなくすかもしれないので, 多少天下り的になる。それでも解析解が得られることはすばらしいことであり, 貴重な遺産とでもいうべき解法である。



考える領域で自由電荷密度  $\rho$  は 0 だから、ラプラスの方程式と境界条件を用いる。対称性を考えると、球座標系がよい。球座標系のラプラスの方程式は (付 27) より次式で与えられる。

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5)$$

こんな式を解こうと思う人はほとんどいないだろう。この式は解かれているが、この問題ではもう少し簡単になる。この問題に合わせて、付録の図を書くと、右のようになる。遠方の平等電界  $\mathbf{E}_0$  が  $z$  軸の向きだから、対称性より電位  $V$  は角度  $\varphi$  の関数でないと考えられる。よって、 $\partial V / \partial \varphi = 0$  とおける。このとき、(5) は次式となる。

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) = 0 \quad (6)$$

(6) の一般解は、変数分離により  $V = R(r)\Theta(\theta)$  とおいて、次式で与えられる<sup>(3),(15),(28)</sup>。

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \quad (7)$$

ここで、 $P_n$  はルジャンドルの多項式で、 $P_0 = 1$ 、 $P_1 = \cos \theta$ 、 $P_2 = (3 \cos^2 \theta - 1)/2$  などである。多くの場合、 $n = 0, 1$  まで選んで、次式で仮定すればよい。

$$V = a_0 + \frac{b_0}{r} + (a_1 r + \frac{b_1}{r^2}) \cos \theta \quad (0 < r < a), \quad V = a_0' + \frac{b_0'}{r} + (a_1' r + \frac{b_1'}{r^2}) \cos \theta \quad (a < r)$$

$r \rightarrow 0$  のとき  $V$  は有界だから、 $b_0 = b_1 = 0$  である。球外の電界  $\mathbf{E}_1$ 、球内の電界  $\mathbf{E}_2$  は(付 24)より

$$\mathbf{E}_1 = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}} \left\{ \frac{b_0'}{r^2} + (-a_1' + 2 \frac{b_1'}{r^3}) \cos \theta \right\} + \hat{\boldsymbol{\theta}} (a_1' + \frac{b_1'}{r^3}) \sin \theta \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{r}} a_1 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} a_1 \sin \theta \quad (9)$$

$r \rightarrow \infty$  のとき、 $\mathbf{E}_1 = -\hat{\mathbf{r}} a_1' \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} a_1' \sin \theta = (\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) E_0$  より  $a_1' = -E_0$  となる。

$r = a$  における境界条件(2-63),(2-64)より次式が得られる。

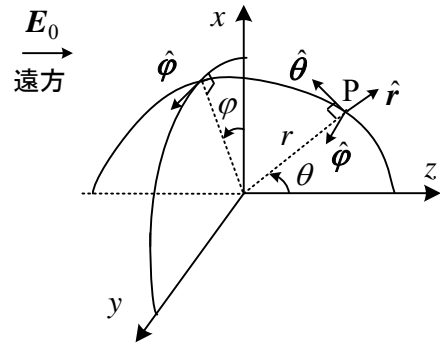
$$a_1 \sin \theta = (-E_0 + \frac{b_1'}{a^3}) \sin \theta \quad (10) \text{ 電界の接線方向成分}$$

$$-\varepsilon_2 a_1 \cos \theta = \varepsilon_1 \left\{ \frac{b_0'}{a^2} + (E_0 + 2 \frac{b_1'}{a^3}) \cos \theta \right\} \quad (11) \text{ 電束密度の垂直方向成分 } (\sigma = 0)$$

これが、すべての  $\theta$  について成り立つためには、 $b_0' = 0$  で、次式が得られる。

$$a_1 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0, \quad b_1' = \frac{a^3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0$$

(8),(9)に代入して、(3),(4)と同じ結果が得られる。なお、(10)の代わりに(2-69)を用いてもよい。



## ○ コンデンサ

コンデンサは電子回路の部品から電力設備に至るまで、電圧を安定に（一定に）保つ用途、ノイズを吸収する用途など非常に良く使われている。原理的には、コンデンサは図 4-10 に示すように、2 枚の金属板 A、B を極板として平行においたもので、電荷を貯めることができる。

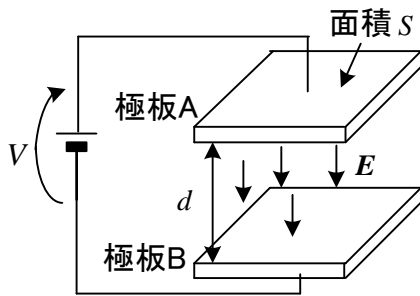


図 4-10 平行平板コンデンサ

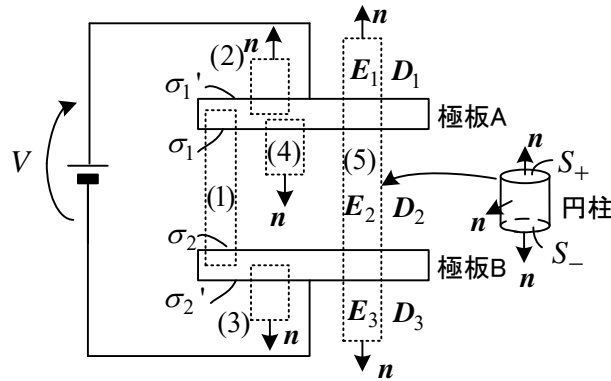


図 4-11 円柱のガウス面

両極板の間は絶縁物(insulator)(これは誘電体(dielectric)とも呼ばれる)で、そこを電子が移動することはない。電荷がたまるということは、金属板（導体）表面の自由電子が、多くなったり（マイナスに帯電）、少なくなったり（プラスに帯電）することである。これらの電荷によって、コンデンサの中には電界が生じる。図 4-10 の平行平板コンデンサ(parallel-plate capacitor)について、基本的な関係式を導こう。高校で習ったコンデンサの知識は忘れて読んで下さい。

コンデンサの極板は極板間距離に比べて十分広く電界  $\mathbf{E}$  および電束密度  $\mathbf{D}$  は極板に垂直方向のみと考える（これで 1 次元の問題になる）。極板間は誘電率  $\epsilon$  の絶縁物で満たされ、外は誘電率  $\epsilon_0$  の空気中とする。円柱のガウス面を図 4-11 の様に 5 通り考えよう<sup>(17)</sup>。電束密度の面積分は、円柱の側面では  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$  になるから、上の面  $S_+$  と下の面  $S_-$  だけを考えればよい（面積は  $S_0$  とする）。 $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2'$  [ $\text{C}/\text{m}^2$ ] は極板表面の面自由電荷密度(surface free charge density)で、面に一様に分布していると仮定する。以下の電束密度と電界の添え字  $n$  はガウス面の法線  $\mathbf{n}$  方向成分を表す（上面  $S_+$  か下面  $S_-$  で  $\mathbf{n}$  の向きは逆なので注意）。

(1)のガウス面より、導体中の電界および電束は 0 であるから、①'より

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = 0 = \int_V \rho dV = (\sigma_1 + \sigma_2) S_0 \quad \therefore \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

(2)より、導体中の電界および電束は 0 であるから、 $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = D_{1n}$  とおいて①'より

$$\int_{S_+} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} dS = D_{1n} S_0 = \int_V \rho dV = \sigma_1' S_0 \quad \therefore \quad D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} = \sigma_1'$$

(3)より、導体中の電界および電束は 0 であるから、 $\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{n} = D_{3n}$  とおいて①'より

$$\int_{S_-} \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{n} dS = D_{3n} S_0 = \int_V \rho dV = \sigma_2' S_0 \quad \therefore \quad D_{3n} = \epsilon_0 E_{3n} = \sigma_2'$$

(4)より、導体中の電界および電束は 0 であるから、同様に  $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} = \epsilon \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} = \sigma_1$

$$(5)より, 同様に  $D_{1n} + D_{3n} = \epsilon_0 E_{1n} + \epsilon_0 E_{3n} = \sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2'$$$

(2),(3),(4)より各領域の電界および電束がそれぞれの領域で至る所等しいとも言える。なぜなら等しい面自由電荷密度に対し円柱の高さを変えても同じ式が成立するからである。

(5)で上下のガウス面を十分遠方としたとき、両極板の間隔は無視できるので、 $E_{1n} = E_{3n} = E_\infty$ と考えられる<sup>(23)</sup>。電荷保存の法則より、コンデンサ全体の電荷の総量は0なので $\sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2' = 0$ である。よって(5)で $E_{1n} + E_{3n} = 0$ だから、 $E_{1n} = E_{3n} = 0$ となる。各領域の電界は等しいので、極板の外では、常に $E_{1n} = E_{3n} = 0$ が成り立つ。この結果(2),(3)の式より、 $\sigma_1' = \sigma_2' = 0$ となる。(1)より $\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \therefore \sigma_2 = -\sigma_1$ であり、(4)より $E_{2n} = \sigma_1 / \epsilon$ である。 $\sigma_1 > 0$ であれば、 $E_{2n} > 0$ となり、 $E_2 \cdot n = E_{2n}$  ((4)の $S_-$ で $n$ は下向き)だから $E_2$ は下向きであることを表す。

これまで得られた結果を図4-12にまとめておく。これが高校で習う内容だ。極板Aの電荷を $Q$ とすると、 $\sigma_1 = \sigma$ と書き換えて

$$Q = \sigma S \tag{4-30}$$

である。従ってコンデンサの電界および電束は $D_{2n} = D, E_{2n} = E$ と書き換えて次式となる。 $D, E$ の測定の向き(正方向)は図4-12に示すように下向きである。

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}, E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S} \tag{4-31}$$

極板間のBから見たAの電圧 $V_{AB}$  ( $V_{AB}$ の矢印の向きは $t$ と一致)は電源電圧 $V$ と等しく

$$V = V_{AB} = -\int_B^A E \cdot t \, dl = \int_0^d E \, dl = Ed \tag{4-32}$$

となる。図4-12の場合 $V > 0$ だから、 $Q > 0, \sigma > 0, D > 0, E > 0$ である。

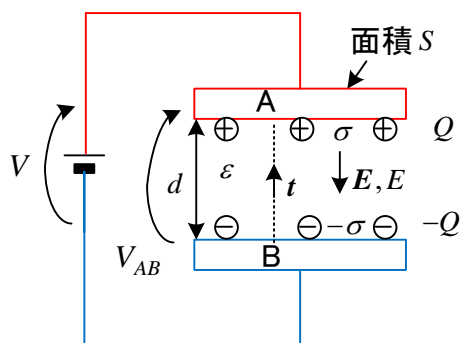


図4-12 コンデンサの電界と電圧

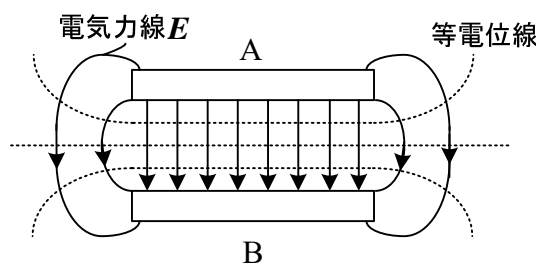


図4-13 電気力線と等電位線

コンデンサの静電容量 $C[F]$ は、次式で定義される。

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} \tag{4-33}$$

(4-31), (4-32)より、次式が得られる。

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \tag{4-34}$$

現実のコンデンサは図4-13に示すように端の部分で電界が乱れる。しかし、簡単のため、図4-12に示したように電荷は極板Aの下側表面と極板Bの上側表面に均等に分布し、電界は極板間に一

様にできていると考える。

コンデンサの極板間に絶縁体を入れると分極(polarization)をおこし、電界を妨げる。分極について考え、電界  $E$  と電束密度  $D$  の違いを詳しく説明しよう。図 4-14 にコンデンサの分極のモデルを示している。誘電体(絶縁体)には、自由に動ける電子がないので伝導電流は流れないが、電界をかけると、電子が+極側に偏る現象が起きる。これを誘電分極(dielectric polarization)と言う。この結果、誘電体の上端には負、下端には正の分極電荷(polarization charge)が生じると考えることができる。この分極によって、極板表面の自由電荷(free charge) (真電荷(true charge)ともいう) が作る電界が弱められることになる。

極板の面自由電荷密度(surface free charge density)  $\sigma = Q/S$  および誘電体の表面にある面分極電荷密度(surface polarization charge density)  $\sigma'$  を用いると電界  $E$  は次式で与えられる。

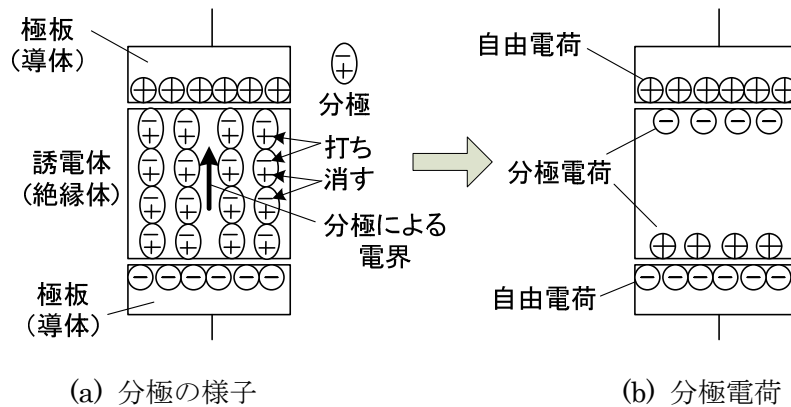


図 4-14 コンデンサの分極

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} \quad (4-35)$$

分極電荷を考える場合には誘電体を真空として取り扱い  $\epsilon = \epsilon_0$  としなくてはならない。物質とは真空中に分極電荷を含む電荷が集まった状態である。(4-35)で、 $\sigma \rightarrow D$ ,  $\sigma' \rightarrow P$  と置き換えて

$$E = \frac{D - P}{\epsilon_0} \quad \text{故に、} \quad D = \epsilon_0 E + P \quad (4-36)$$

の関係にある誘電分極  $P [C/m^2]$  が考えられている。図 4-15 はこのときの様子を示している。多くの場合、誘電分極  $P$  は  $E$  に比例することが実験によりわかっている。そこで、

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad (4-37)$$

ここで、 $\chi_e$  : 電気感受率(electric susceptibility),  $\epsilon_0$  : 真空中の誘電率,  $\epsilon_r$  : 比誘電率(relative permittivity) ( $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ ),  $\epsilon$  : 誘電率(permittivity) と書くことができる。誘電分極  $P$  は、分極のときに正電荷が移動した向きとなる(分極電荷の負電荷から正電荷に向けてとる)。図に書くときには  $P$  を逆向きに定義したくなるが、式の上では(4-36)のように定義した方が自然である。実用上は、誘電分極  $P$  を考えることは少なく、誘電率  $\epsilon$  を用いて計算すればよいだろう。

重要なポイントとして、電束密度  $D$  は(4-31)に示すように面自由電荷密度  $\sigma$  や極板の全自由電荷  $Q$  によって決まる量である。一方、電界  $E$  は(4-35)に示すように面分極電荷密度  $\sigma'$  が関係する

が、(4-32)に示したように電圧と直接関係する。そして電界は誘電率を使えば(4-37)より電束密度からすぐに求まる(分極電荷は忘れて良い)。①のガウスの法則の $\rho$ は分極電荷を含まないことに注意しよう。

分極電荷密度  $\rho'(\mathbf{r},t)$  [C/m<sup>3</sup>] は誘電分極  $\mathbf{P}$  と

$$\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = -\rho'(\mathbf{r},t) \tag{4-38}$$

の関係がある。自由電荷密度  $\rho(\mathbf{r},t)$  [C/m<sup>3</sup>] を用いると①と(4-36)の div より次式が成り立つ。

$$\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t) + \rho'(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0} \tag{4-39}$$

図で電荷や面電荷密度は  $\pm Q, \pm\sigma$  と書かれることが多いが、(4-39)には  $\rho, \rho'$  を使わないといけない。コンデンサの場合、厳密には  $\rho, \rho'$  を使えないが ( $\sigma, \sigma'$  を使うべき)、イメージは得やすい。(4-38)より、(2-64)と同様に考えて、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1 = -\sigma'$  ( $\mathbf{n}$  は 1 の電極 A から 2 の誘電体に向けた向き)。 $\mathbf{P}_{2n} = \mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \sigma(1 - \epsilon_0/\epsilon) = -\sigma'$  より、図中の  $\sigma' = -\sigma = \sigma(1 - \epsilon_0/\epsilon)$  となる。 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  の違いとそれらの利用については、後述の例題 15 がわかりやすい。

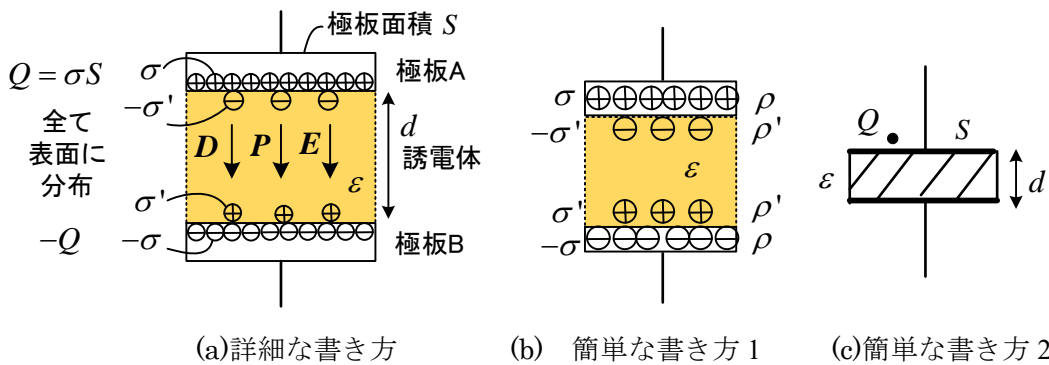
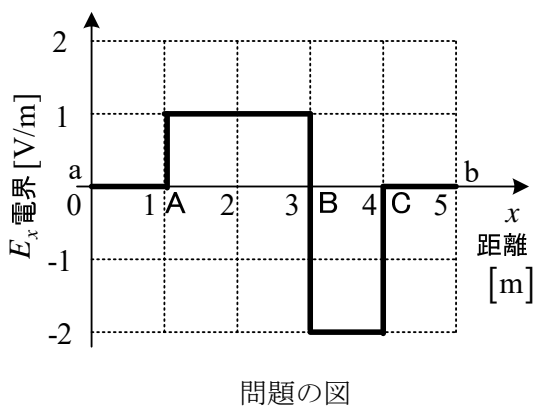
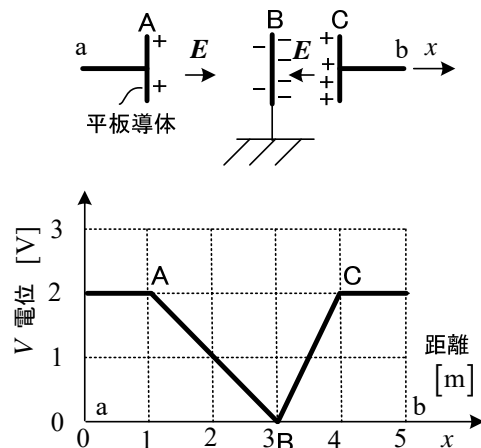


図 4-15 コンデンサのモデル

**例題 13**  $x$  軸方向に電界  $\mathbf{E}$  が存在し、2 点 ab 間の電界の  $x$  軸方向成分  $E_x$  が図のようになっているとき、ab 間の電位差はいくらか。



問題の図



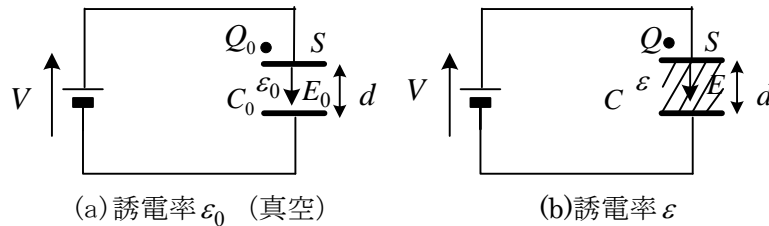
(解) 状況としては、正に帯電したコンデンサの極板のような導体 A, C があって、接地した平板導体 B には静電誘導により負の電荷が帯電している場合が考えられる。コンデンサのように AB,

BC 間には一様な電界  $E$  が図の向きに生じている。題意より電界の  $x$  軸方向は図の向きになり、BC 間の電界  $E_x$  は負になる。電位  $V$  は  $x$  だけの関数と考えられるから、(4-16)より

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dx} \quad \text{故に} \quad V = -\int E_x dx \quad \therefore \quad V = -E_x x + V_0$$

であり、電位  $V$  の傾きが  $-E_x$  になるように、 $V$  が求められる。接地点  $B$  を 0 電位とする。AB 間では、 $E_x = 1$  なので、A 点の電位が高い。BC 間では、 $E_x = -2$  なので、C 点の電位が高い。a,b 間の電位は右図のようになり、a,b は同電位であるから、電位差は 0 である。

**例題 14** 図の回路で、コンデンサの極板間に誘電率  $\epsilon$  の絶縁体を挿入したとき、真空中に比べて静電容量、電荷、極板間の電界は何倍になるか。図の●印でどちらの極板の電荷か明確にする。



(解) 極板の断面積を  $S$ 、極板間の距離を  $d$  とすると、各場合について

$$(a) \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (b) \quad C = \frac{\epsilon S}{d}$$

よって、 $C = \epsilon_r C_0$  すなわち、静電容量は、比誘電率  $\epsilon_r (= \epsilon / \epsilon_0)$  倍になる。コンデンサ電圧は同じだから、極板の電荷は、次式より比誘電率倍になる。

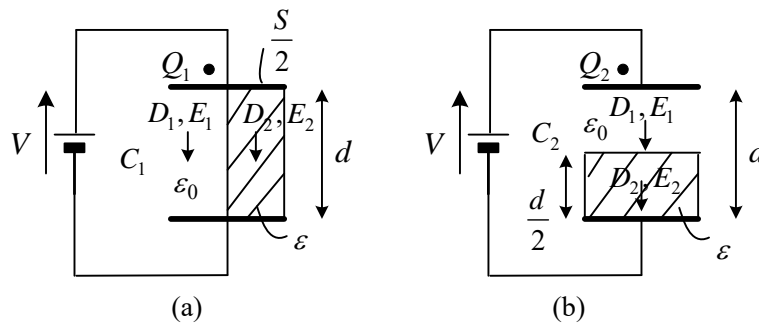
$$(a) \quad Q_0 = C_0 V \quad (b) \quad Q = C V$$

電界は、次式より、電圧が一定なので、変わらない。(4-31)でも確認しよう。

$$(a) \quad E_0 = V/d \quad (b) \quad E = V/d$$

図 4-14 より誘電体を入れると電界が弱まるが、電界が弱まるとコンデンサの電圧が低くなって、電源から電流が流れ、電荷が多く貯まるようになる。その結果電界が大きくなり、電源電圧とつりあうと電流が流れなくなる。もし、電源を外して、誘電体を入れた場合には、電荷は変わらず、電圧と電界は入れないときに比べて  $1/\epsilon_r$  倍に小さくなる。

**例題 15** 図の様にコンデンサの半分を誘電率  $\epsilon$  の誘電体で満たした時、静電容量を求めよ。



(解) (a)の場合 両誘電体にかかる電圧は等しいので、両誘電体の電界は等しくなる。

$$E_1 = E_2 = \frac{V}{d}, \quad D_1 = \epsilon_0 E_1, \quad D_2 = \epsilon E_2, \quad Q_1 = \frac{S}{2}(D_1 + D_2) = \frac{SV}{2d}(\epsilon_0 + \epsilon) \quad ((4-31) \text{より})$$

であるから,  $Q_1 = C_1 V$  より  $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} + \frac{\epsilon S}{2d}$  (並列接続)

(b)の場合 電束密度は分極電荷に関係なく極板の自由電荷だけで決るから両誘電体で等しい。

$$D_1 = D_2 = \frac{Q_2}{S}, \quad V = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2}, \quad D_1 = \epsilon_0 E_1, \quad D_2 = \epsilon E_2$$

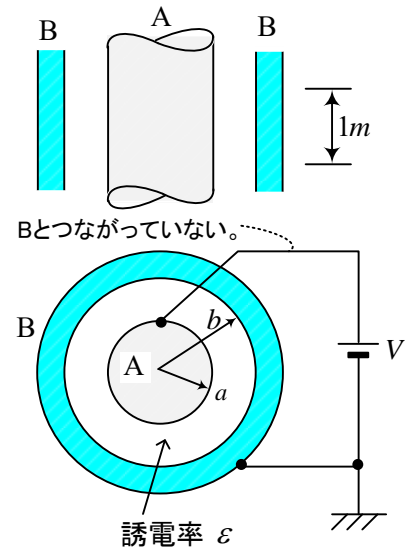
であるから,  $V = \frac{Q_2}{\epsilon_0 S} \frac{d}{2} + \frac{Q_2}{\epsilon S} \frac{d}{2} \quad \therefore \frac{1}{C_2} = \frac{d}{2\epsilon_0 S} + \frac{d}{2\epsilon S}$  (直列接続)

\*この問題で  $D$  (自由電荷に関係) と  $E$  (電圧に関係) の区別が良く理解できるであろう。

**例題 16** 半径  $a$  [m] の内部導体 A と内半径  $b$  [m] の外部導体 B からなる十分長い同軸ケーブルがある。導体 A, B 間には誘電率  $\epsilon$  の絶縁体がつめてある。

いま, A, B 間に直流電圧  $V$  [V] を与えるとき, 以下の間に答えよ。

- (1) ケーブル 1 m 当りに蓄えられる電荷  $Q$  を求めよ。
- (2) ケーブル 1 m 当りの静電容量  $C$  を求めよ。



(解) (1) A, B を極板としたコンデンサと考えることができる。電界  $E$  は図の矢印の様に軸に対して対称となる。いま, 半径  $r$  [m], 長さ 1 m の円柱の表面をガウス面としてガウスの法則を適用すると, 閉曲面内の電荷は  $Q$  で, 軸方向の電界は  $0$  であるから側面のみを考えて

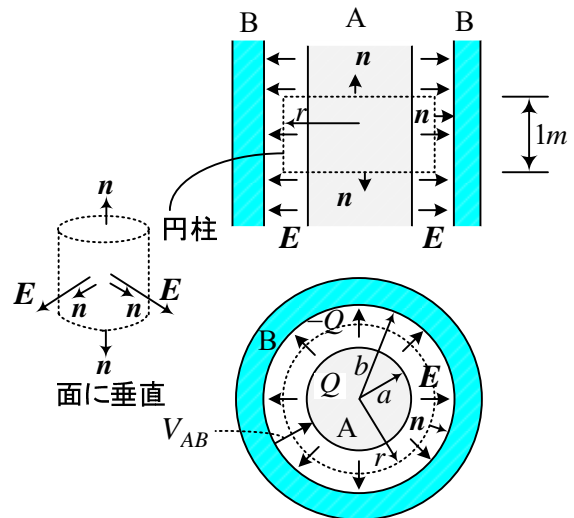
$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E_r \times \underbrace{2\pi r \times 1}_{\text{側面積}} = \frac{Q}{\epsilon}$$

(側面で  $E$  と  $n$  は同方向で,  $E \cdot n = E_r$ )

$$\therefore E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon r}$$

B から見た A の電圧  $V_{AB} = V$  は, (4-15) より

$$\begin{aligned} V_{AB} &= -\int_b^a E_r dr = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon r} dr \\ &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon} [\log r]_b^a \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon} \log \frac{b}{a} \quad \therefore Q = \frac{2\pi\epsilon V}{\log(b/a)} \quad [\text{C/m}] \end{aligned}$$

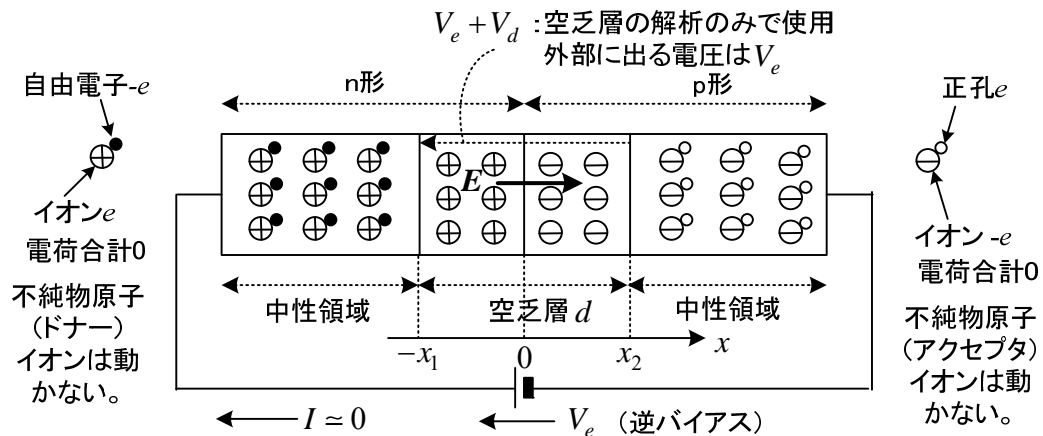


$$(2) C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)} \text{ [F/m]} \quad (4-40)$$

電源の極性が逆になっている場合にも、 $V < 0$  と考えるだけでそのまま成立する。 $\mathbf{E}$  の向きは逆で、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E_r < 0, Q < 0$  となる。

同軸ケーブルは、テレビとアンテナの接続、計測器などに広く使われている。

**例題 17** ダイオードは p 形半導体と n 形半導体を接合して作られる。図はダイオードに逆方向バイアス電圧( $V_e > 0$ )を加えた場合である。接合部付近には空乏層(depletion layer)が形成される。これは p 形半導体の正孔と n 形半導体の自由電子が拡散により結合して消滅し、そのため空乏層の p 形半導体が負電荷、n 形半導体が正電荷で満たされることになる。空乏層以外では電荷の合計は 0 で、電気的に中性である。電子 1 個の電荷を  $-e$  [C]、n 形領域でドナー濃度が  $N_d$  [ $\text{m}^{-3}$ ]、p 形領域でアクセプタ濃度が  $N_a$  [ $\text{m}^{-3}$ ] とするとき、空乏層の幅  $d$  [m] を求めよ。なお、空乏層を解析する場合、空乏層の両端の電圧を  $V_e + V_d$  [V] とする。ここで、 $V_d$  は拡散電位または内蔵電位(built-in potential) (シリコンで 0.7V 程度) とよばれ外部には表れない。また半導体の誘電率を  $\epsilon$  [F/m] とする。境界条件のもとでポアソンの方程式を解く問題である。



(解)  $x$  軸方向の変化のみを考え、空間自由電荷密度  $\rho(x)$  [ $\text{C}/\text{m}^3$ ] は図のように与えられるとする。

ポアソンの方程式(4-20)より、次式が得られる。

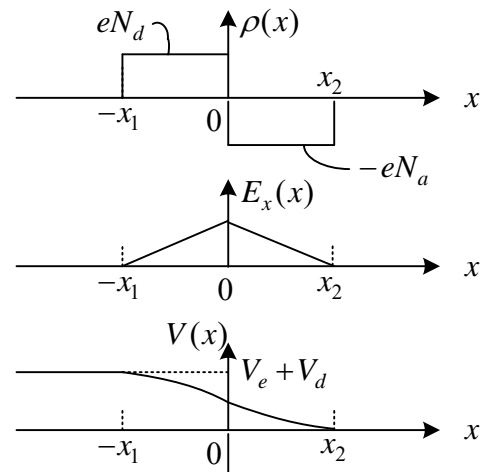
$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{eN_d}{\epsilon} \quad -x_1 < x < 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{eN_a}{\epsilon} \quad 0 < x < x_2 \quad (2)$$

境界条件は、以下のように与えられる。

$$V(-x_1) = V_d + V_e \quad (3) \quad \text{題意より}$$

$$V(x_2) = 0 \quad (4) \quad \text{電位の基準}$$





$$E_x(-x_1) = -\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=-x_1} = 0 \quad (5) \quad \mathbf{E} = -\text{grad}V(x), \text{ 空乏層の外の電界 } 0, (2-64)\text{より}$$

$$E_x(x_2) = -\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = 0 \quad (6) \quad \text{空乏層の外の電界 } 0, (2-64)\text{より}$$

$$V(+0) = V(-0) \quad (7) \quad (2-69)\text{より接合面で} V \text{ は連続}$$

$$\varepsilon E_x(+0) = \varepsilon E_x(-0) \quad (8) \quad \text{接合面に面電荷がないので, (2-64)より}$$

$$(1)\text{を積分して} \quad \frac{dV(x)}{dx} = -\frac{eN_d}{\varepsilon}x + k_1 \quad (9) \quad , \quad (5)\text{より} \quad k_1 = -\frac{eN_d}{\varepsilon}x_1$$

$$(2)\text{を積分して} \quad \frac{dV(x)}{dx} = \frac{eN_a}{\varepsilon}x + k_2 \quad (10) \quad , \quad (6)\text{より} \quad k_2 = -\frac{eN_a}{\varepsilon}x_2$$

$$(9),(10)\text{より電界が求まるので, (8)より} \quad k_1 = k_2 \quad \therefore N_d x_1 = N_a x_2 \quad (11)$$

$$(9)\text{を積分して} \quad V(x) = -\frac{eN_d}{2\varepsilon}x^2 + k_1x + k_3 \quad -x_1 \leq x \leq 0 \quad (12)$$

$$(10)\text{を積分して} \quad V(x) = \frac{eN_a}{2\varepsilon}x^2 + k_2x + k_4 \quad 0 \leq x \leq x_2 \quad (13)$$

$$(7)\text{より} \quad k_3 = k_4 \quad (14)$$

$$(3),(12)\text{より} \quad k_3 = V_d + V_e - \frac{eN_d}{2\varepsilon}x_1^2 \quad , \quad (4),(13)\text{より} \quad k_4 = \frac{eN_a}{2\varepsilon}x_2^2$$

$$(11),(14)\text{より} \quad x_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_d + V_e)N_a}{e(N_a N_d + N_d^2)}} \quad , \quad x_2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_d + V_e)N_d}{e(N_a N_d + N_a^2)}}$$

$$\text{従って, 空乏層の幅は} \quad d = x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_d + V_e)(N_a + N_d)}{eN_a N_d}} \quad (15)$$

$$\text{空乏層の電荷は} \quad Q = eN_d x_1 = eN_a x_2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon e(V_d + V_e)N_a N_d}{N_a + N_d}} \quad (16)$$

で与えられる。空乏層は一種のコンデンサとなっている。単位面積当たりの空乏層容量は、

$$C = \frac{dQ}{dV_e} = \frac{\varepsilon}{d} \quad (17)$$

となる。一般のコンデンサと違う点は、電界が一様でないこと、たとえ交流でも逆バイアスの場合には電流は流れないことなどである。

\* (12),(13)がポアソンの方程式(1),(2)の一般解である。右辺で、第1項が特解、第2項と第3項が(1),(2)の右辺を0とおいたラプラスの方程式の一般解と考えることができる。

## ○ 漏れ電流があるコンデンサ

媒質の誘電率  $\epsilon$ , 極板の面積  $S$  の平行平板コンデンサに図のように直流電源を接続したとき絶縁が完全ではなく漏れ電流  $I$  が流れることがある。媒質の導電率を  $\kappa$  として以下の問いを考える。

- (1) 電流  $I$  と電界  $E$  の関係式を書け。極板の電荷  $Q$  と電界  $E$  の関係式を書け。
- (2) (1)の結果より, コンデンサの静電容量  $C$  と抵抗  $R$  の関係式を求めよ。
- (3) このコンデンサの等価回路を書け。

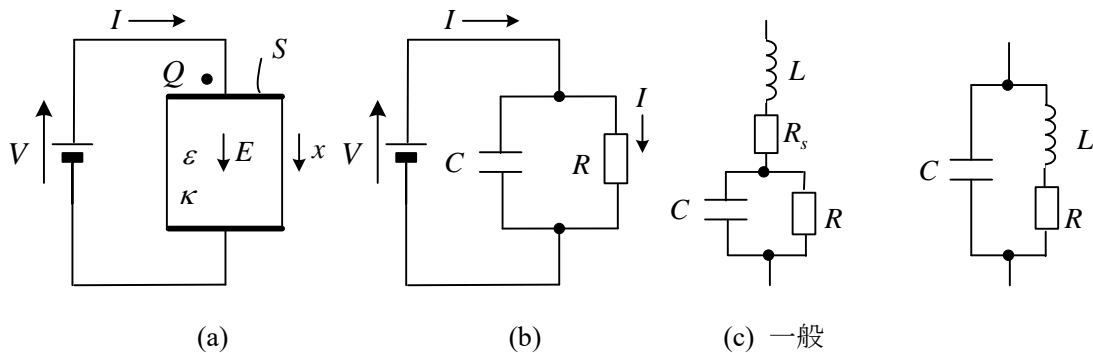


図 4-16 コンデンサの等価回路

図 4-17 抵抗の等価回路

- (1) 媒質中の電流密度は  $i = \kappa E$  なので,  $I = iS = \kappa ES$

極板の面電荷密度は電束密度に等しく  $D = \epsilon E$  なので,  $Q = \epsilon ES$   
 $i, E, D$  は  $x$  軸成分を表す。

- (2) (1)の結果より

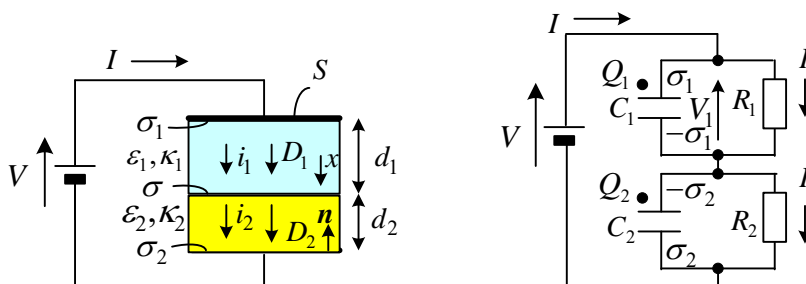
$$C = \frac{Q}{V}, R = \frac{V}{I} \quad \text{で定義すると} \quad CR = \frac{\epsilon}{\kappa} \quad (4-41)$$

- (3) (2)の関係式を満たす等価回路は, 図 4-16(b)に示す  $C, R$  の並列回路と考えられる。

よく知られた  $C = \epsilon S/d, R = d/(\kappa S)$  を用いても(4-41)が得られる。

交流でも使用可能なコンデンサの精密な等価回路としては, 種類や構造に依存するが, 直列に  $R_s, L$  を接続した図(c)の等価回路が利用されているようである。特に周波数が高くなると  $L$  の影響が大きくなる。なお, 抵抗の精密な等価回路としては図 4-17 が利用されているようである。

**例題 18** 図のように誘電率  $\epsilon_1$ , 導電率  $\kappa_1$  の誘電体 1 と誘電率  $\epsilon_2$ , 導電率  $\kappa_2$  の誘電体 2 を平行平板電極ではさみ, 直流電圧  $V$  の電源に接続している。時間が十分経過したとき電流密度, 電束密度, 面自由電荷密度を求めよ。



(解) 誘電体1の電流密度を  $i_1$ , 電束密度を  $D_1$ , 電界を  $E_1$   
 誘電体2の電流密度を  $i_2$ , 電束密度を  $D_2$ , 電界を  $E_2$   
 極板の面自由電荷密度を  $\sigma_1, \sigma_2$ , 誘電体1と2の境界の面自由電荷密度を  $\sigma$   
 とする。  $i_1, D_1, E_1$  等は  $x$  軸方向成分を表す。以下の式が成立つ。

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad (1)$$

$$D_1 = \epsilon_1 E_1, D_2 = \epsilon_2 E_2 \quad (2)$$

$$i_1 = \kappa_1 E_1, i_2 = \kappa_2 E_2, i_1 = i_2 = i \quad (3)$$

$$(1), (3) \text{より} \quad V = \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right) i \quad \therefore i = V / \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)$$

$$\text{よって, } E_1 = \frac{V}{\kappa_1 \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)}, E_2 = \frac{V}{\kappa_2 \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)}, (2) \text{より} \quad D_1 = \frac{\epsilon_1 V}{\kappa_1 \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)}, D_2 = \frac{\epsilon_2 V}{\kappa_2 \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)}$$

よって,  $D_1 \neq D_2$  である。  $\sigma$  は境界条件(2-64)より,  $\sigma_1, \sigma_2$  は境界条件(2-67)より以下のように求められる。  $\sigma_2$  については,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = -\hat{x} \cdot \mathbf{D}_2 = -D_2 = \sigma_2$  ( $\sigma_2 < 0$ ) である。

$$\sigma = D_2 - D_1 = \left( \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \right) \frac{V}{\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}} = \left( \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \right) i, \quad \sigma_1 = D_1, \quad \sigma_2 = -D_2 \quad (\sigma = -\sigma_1 - \sigma_2)$$

等価回路は右図のようになる。電流密度や面自由電荷密度が等しくなるかチェックしよう。極板の断面積を  $S$  とする。等価回路では, 抵抗だけを電流が流れる。

$$I = iS, R_1 = \frac{d_1}{\kappa_1 S}, R_2 = \frac{d_2}{\kappa_2 S} \quad \text{だから} \quad I = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad \therefore i = V / \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1}, C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2} \text{ を用い, } Q_1 = C_1 V_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1} \frac{R_1 V}{R_1 + R_2} = \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \frac{V}{\frac{d_1}{\kappa_1 S} + \frac{d_2}{\kappa_2 S}} = S \sigma_1$$

$$\text{故に} \quad \sigma_1 = \frac{\epsilon_1 V}{\kappa_1 \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)}, \quad \text{同様に} \quad -\sigma_2 = \frac{\epsilon_2 V}{\kappa_2 \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)} \quad \text{また, } \sigma = -\sigma_1 - \sigma_2$$

## ○ 交流電源につながれたコンデンサ

コンデンサに交流電源を接続した図 4-18 の場合について述べる。交流の場合でも, 極板に均等に電荷が分布し, コンデンサ内の電束線や電気力線は  $x$  軸成分のみと仮定する。このとき, たとえ時間的に変化してもガウスの法則①' は成立するので, 上記の仮定の下でコンデンサ内の電界  $\mathbf{E}(t)$  と電束密度  $\mathbf{D}(t)$  はどの点でも次式で求められる。

$$\mathbf{D}(t) = \sigma(t) = \frac{Q(t)}{S}, \quad \mathbf{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon} \quad (4-42)$$

ここで,  $\mathbf{D}(t), \mathbf{E}(t)$  はそれぞれ  $\mathbf{D}(t), \mathbf{E}(t)$  の  $x$  軸成分 (例えば,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(t) \cdot \hat{x}$ ),  $\sigma(t)$  は面自由電荷密度,  $Q(t)$  は極板の全電荷であり, すべて時間と共に変化する。このとき,

$$\text{rot}\mathbf{E}(t) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (4-43)$$

となり、 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_c(t)$  のクーロン電界である。ここで、 $\mathbf{E}(t)$  が  $y, z$  の関数であればクーロン電界ではないことに注意しよう。すなわち極板に電荷が均等に分布していないなら、たとえ電界が  $x$  軸成分だけであっても、クーロン電界とは言えない。電荷が均等に分布しないケースは第 7 章の平行平板導波路で述べる。

(4-42)より、クーロン電界だからコンデンサ電圧は

$$v_{AB}(t) = -\int_B^A \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} \, dl = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_B^A \mathbf{E} \cdot \hat{x} \, dl = \int_B^A E(t) \, dl = E(t) d \quad (4-44)$$

となる。 $v_{AB}(t)$  は B 点から見た A 点の電圧である。なお静電界は時間的に変化しないから、(4-44) は得られない。 $E(t)$  は正負に変化し電界の大きさではなく  $x$  成分である。

連続の式より自由電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  と電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$  には各点で次式が成り立つ。

$$\text{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \textcircled{\text{O}}$$

①を図(b)の閉曲面  $S_1$  で囲まれた領域  $V_1$  で体積分すると次式が得られる。

$$\int_{V_1} \text{div} \mathbf{i} \, dV + \int_{V_1} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = 0$$

ガウスの定理を用いて

$$\int_{S_1} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho \, dV = 0 \quad (4-45)$$

左辺第 1 項は、閉曲面  $S_1$  より流れ出す電流で、電気回路の  $-i(t)$  と一致する。左辺第 2 項は、上の極板の全電荷  $Q(t)$  の微分である。従って、良く知られた

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4-46)$$

が得られる。

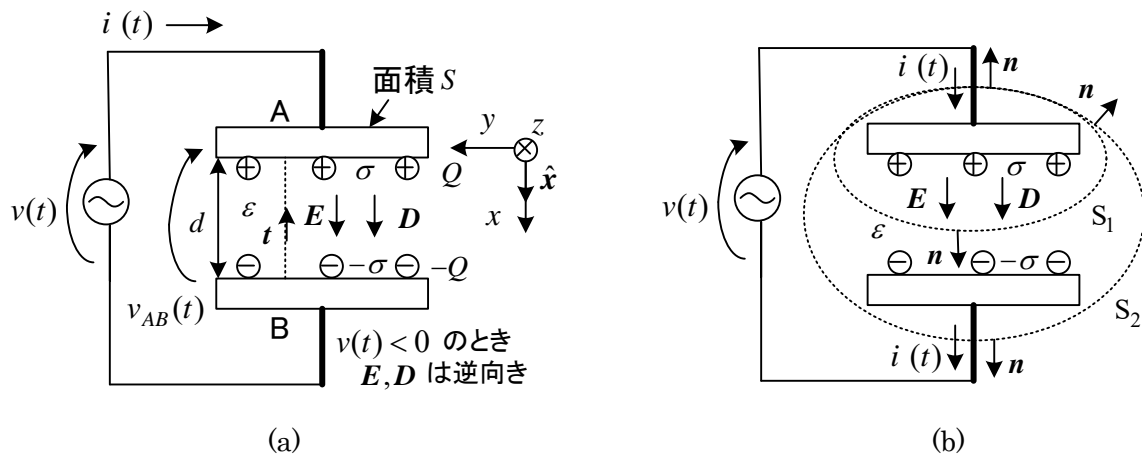


図 4-18 交流電源につないだコンデンサ ( $v(t) > 0$  のとき)

閉曲面  $S_2$  で囲まれた領域  $V_2$  で体積分すると、 $V_2$  内の全電荷は 0 だから、(4-45)と同様にして次式が得られる。

$$\int_{S_2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4-47)$$

これは、極板 A に入る電流と極板 B から出る電流が等しいことを表している。

電源電圧が  $v(t) = V_m \sin \omega t$  のとき、 $v(t) = v_{AB}(t)$  だから(4-44)より

$$E(t) = \frac{v_{AB}(t)}{d} = \frac{V_m \sin \omega t}{d}$$

である。よって、

$$D(t) = \varepsilon E(t) = \frac{\varepsilon}{d} V_m \sin \omega t, \quad Q(t) = S \sigma(t) = S D(t) = \frac{\varepsilon S}{d} V_m \sin \omega t$$

交流の場合にも  $Q(t) = C v_{AB}(t)$ 、 $C = \frac{\varepsilon S}{d}$  が成り立つ。回路に流れる電流は(4-46)より

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \omega C V_m \cos \omega t$$

ところで、磁界は③により発生する。コンデンサでは、磁界のエネルギーは小さいと見て、これを無視するが、電束密度  $\mathbf{D}(t)$  が時間変化するので、磁界は存在している。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \textcircled{3}$$

コンデンサ内では、伝導電流  $\mathbf{i}(t)$  は 0 であるが、変位電流  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  がある。これを求めると

$$\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{d} V_m \sin \omega t \right) = \frac{\varepsilon \omega}{d} V_m \cos \omega t$$

である。すなわち、

$$\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{i}(t)}{S} \quad (4-48)$$

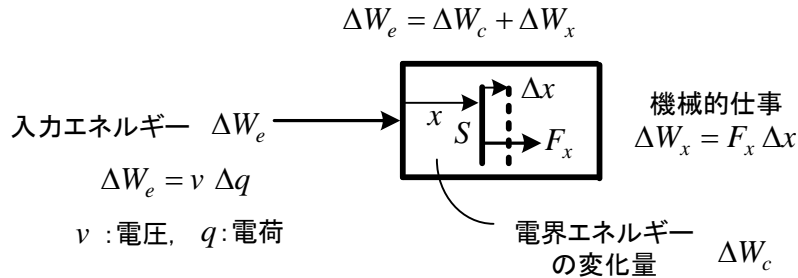
が成り立っている。つまり、単位面積当たりの伝導電流  $\mathbf{i}(t)$  と同じ変位電流がコンデンサ内に流れると解釈できる。回路を結ぶ導線のまわりに磁界が発生するが、③よりそれと同じ大きさの磁界がコンデンサの周りにもできている。回路素子をつなぐ導線の周りの磁界は普通無視して考えないのと同じように、コンデンサでは変位電流が作る磁界を無視する。**変位電流**は電子がコンデンサの中を動いてできるものではないが、磁界を作るので電流の用語が用いられた。マクスウェルによって発見されたものである。変位電流というと難しく聞こえるが、電流という言葉は使わなくても電束密度の時間変化と考えるだけでも特に問題はないであろう。

磁界の影響は、一般に高周波で無視できなくなる。回路的にはインダクタンスの成分が導線やコンデンサの電極などに生じることになる。従って高周波領域では、実際のコンデンサの等価回路は図 4-16 (c)に示したようにインダクタンスをつないだ回路が利用される。

## ○ コンデンサのエネルギーと力

物体に働く電氣的な力(電気力とよぶ)を求めるには3つの方法がある。(1)力の公式(2-55), (2)マクスウェルの応力(2-52) ~ (2-54), (3)エネルギーの原理による方法<sup>(7),(16)</sup>である。

第2章で説明していないエネルギーの原理による方法をコンデンサに関して説明しよう。



コンデンサの静電エネルギーを  $W_c(x, q)$  とするとき,  $x$  の位置にある面  $S$  に働く電気力  $F_x$  は  $x$  と電荷  $q$  を独立変数と考えた場合

$$F_x = -\frac{\partial W_c(x, q)}{\partial x} \quad (4-49)$$

$x$  と電圧  $v$  を独立変数と考えた場合, コンデンサが線形の素子であるならば, コンデンサの静電エネルギーを  $W_c(x, v)$  とすると

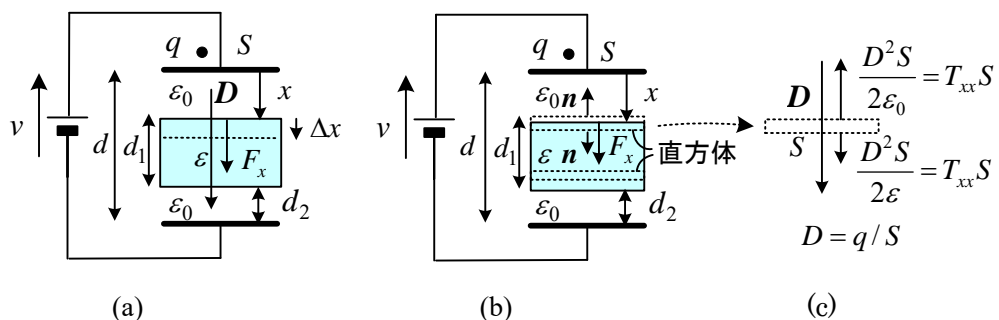
$$F_x = \frac{\partial W_c(x, v)}{\partial x} \quad (4-50)$$

である。この証明に関しては, 第5章の磁界中の力についての証明と同様に行える。なお, 図 4-19 で  $\Delta x$  の変化については, 仮想的に固体の誘電体が伸縮する場合も考えてよい。

仮想変位の方法と似ているが, 電源を接続しているかどうか気にしないで計算できる。

例題を通して説明しよう。

**例題 19** 図の様に面積  $S$ , 間隔  $d$  の平行平板コンデンサの間に厚さ  $d_1$  で等面積の誘電体を極板と平行に入れているとき, 極板に働く電気力と誘電体表面及び全体に働く電気力を求めよ。なお, 電源は接続していなくても, 同じ電荷に充電されていれば力は変わらない。



(解) 誘電体の上の面に働く力  $F_x$  を求める。 $d, d_2$  は固定し  $x$  が  $\Delta x$  増え  $d_1$  が  $\Delta x$  減ると考えて (これはあくまで  $C$  の式を表す変数の選び方を決めるためだけのもの), コンデンサの静電容量  $C$  は

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d-d_2-x}{\epsilon S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} \quad (1)$$

を満たす。蓄えられるエネルギーは  $W_c = \frac{1}{2C} q^2$  [J] (例題 21 参照) だから, (4-49)より

$$F_x = -\frac{\partial W_c(x, q)}{\partial x} = \frac{1}{2S} \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) q^2 \quad (2)$$

$\epsilon_0 < \epsilon$  より  $F_x < 0$  だから, 誘電体の上の面に働く力は  $x$  の増える向きと逆に上向きである。同様に誘電体の下の面に働く力は, 下向きに(2)と同じ大きさである。この場合は,  $C$  を次式で表し,  $x, d$  は固定し  $d_1$  の変化で  $d_2$  が減少すると考え,  $d_1$  で偏微分する。 $d_1$  の増える向きである。

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d_1}{\epsilon S} + \frac{d-x-d_1}{\epsilon_0 S} \quad (3)$$

誘電体全体に働く合力を求める場合  $d, d_1$  は変化せず,  $x$  が  $\Delta x$  増えると,  $d_2$  が減ると考え, (3)を  $x$  で偏微分する。よって誘電体全体に働く電気力の  $x$  成分は 0 である。

下の極板に働く電気力は,  $d$  が  $\Delta d$  変化すると考え,  $x, d_1$  は固定するので, (3)の  $C$  を用い  $d$  で偏微分することで以下の様に求められる。(1)では  $d, d_2$  が変化するからダメ)

$$F_d = -\frac{\partial W_c(d, q)}{\partial d} = -\frac{1}{2\epsilon_0 S} q^2 = -\frac{S}{2\epsilon_0} D^2 \quad (4)$$

負なので, 実際には上向きである。同様に上の極板に働く力は  $d$  が  $\Delta d$  変化すると考え,  $d_1, d_2$  は固定するので  $C$  を次式で表し,  $d$  で偏微分する。

$$\frac{1}{C} = \frac{d-d_1-d_2}{\epsilon_0 S} + \frac{d_1}{\epsilon S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} \quad (5)$$

この結果, (4)と同じ結果を得る。負なので, 実際には下向きである。

なお, エネルギーを電圧  $v$  で表し, (4-50)を使っても同じ力が得られる。この場合,  $W_c = Cv^2/2$  [J]を使うことになる。計算は上記の場合より複雑である。

誘電体に働く電気力を, (2-55)を用いて次式から求めることもできる。

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \epsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu) dV$$

誘電体には, 自由電荷はなく  $\rho = 0$  である。また磁界はないので右辺の第 2, 4 項は 0 である。結局, 右辺第 3 項のみである。誘電率が変化する誘電体の上面をまず考えると, 電界  $E$  と誘電率  $\epsilon$  は  $x$  のみの関数で, それを上の方近傍で体積分する。 $dV = S dx$  と考え,  $D$  は一定だから

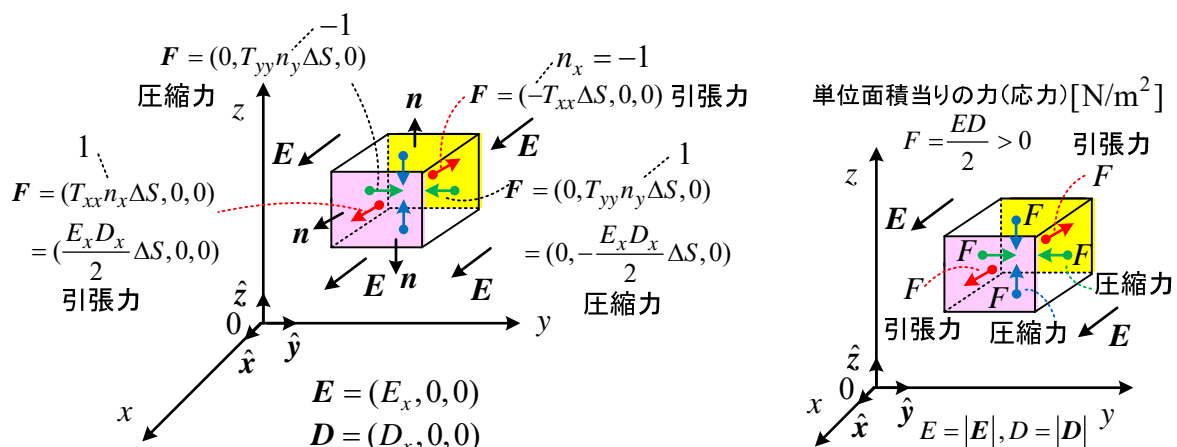
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\int_V \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \epsilon dV = -\frac{D^2}{2} \int_V \frac{1}{\epsilon^2} \text{grad} \epsilon dV = -\frac{SD^2}{2} \int \frac{1}{\epsilon^2} \frac{d\epsilon}{dx} dx \hat{x} \\ &= -\frac{SD^2}{2} \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} d\epsilon \hat{x} = \frac{SD^2}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \hat{x} = F_x \hat{x} \end{aligned}$$

$q = SD$  だから(2)の結果と一致する。同様に下の面では, 下向きに同じ大きさの力が働く。

マクスウェルの応力から求めることもできる。図 4-20 は  $x$  軸方向に電界がある場合に  $xyz$  軸に辺が平行な微小立方体(面積分容易)の表面に電界が及ぼす力を示している。(2-47)~(2-49)で、磁界は  $0$  で、電界は  $x$  成分のみである。マクスウェルの応力テンソルは次式のように簡単になる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} E_x D_x / 2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_x D_x / 2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_x D_x / 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

表面に働く力は(2-52)~(2-54)で計算できる。図 2-20 に面の外向きの単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を示した。図 4-20 に示すように、微小立方体側が外部から受ける単位面積当たりの力(応力)が面ごとに計算でき、電界の方向には  $T_{xx} > 0$  で外部から引張り力、電界と垂直方向には  $T_{yy} < 0, T_{zz} < 0$  で外部から圧縮力を受ける。大きさはいずれも  $E_x D_x / 2 = ED/2$  である。  $E = |\mathbf{E}|, D = |\mathbf{D}|$  である。



力を正とした簡単な書き方

図 4-20 微小立方体の表面に電界が及ぼす力(応力)

面積分を行うとき、問題の図(c)の様に誘電率が変化する誘電体の上面をはさんで、薄い直方体の表面(ガウス面)を考え、直方体の上側の面では  $-x$  方向、下側の面では  $x$  方向の力を受けるため

$$F_x = \frac{1}{2} \left( \frac{D^2}{\epsilon} - \frac{D^2}{\epsilon_0} \right) S \quad (7)$$

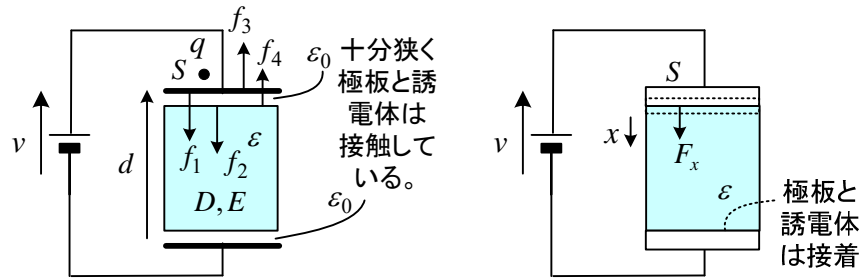
が得られ、(2)の結果と一致する。  $F_x < 0$  だから上向きの力である。

誘電体の中に図(b)のように別の薄い直方体を考えると上向きの力と下向きの力が打ち消すので誘電体を動かす力にはならない。これは機械的応力とは直接関係ない(例題 23 参照)。

**例題 20** 図の平行平板コンデンサで、極板と固体の誘電体が接触している。極板に働く力と誘電体に働く力を求めよ<sup>(19)</sup>。また完全に接着している場合はどうか。なお重力は考えない。

(解) 極板と誘電体(固体)はマイクロにみれば凹凸によるわずかな隙間があり、その誘電率は  $\epsilon_0$  と考えられよう。従って、上と下の極板に働く電気力は同じ大きさで、例題 19 より  $f_1 = SD^2 / (2\epsilon_0)$  である。両極板はお互い引き合うので、上の極板は接触している誘電体に  $f_2 = SD^2 / (2\epsilon_0)$  の力を





及ぼす。この反作用として極板は  $f_3 = SD^2 / (2\epsilon_0)$  の力を誘電体から受ける。この結果、極板に働く合力は 0 となる。

一方、誘電体の上の面では誘電率の差があるので例題 19(2)と同様に  $f_4 = \frac{SD^2}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$  の電気力が働く。よって誘電体の上の面には

$$f_2 - f_4 = \frac{SD^2}{2} \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{SD^2}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{SD^2}{2} \frac{1}{\epsilon}$$

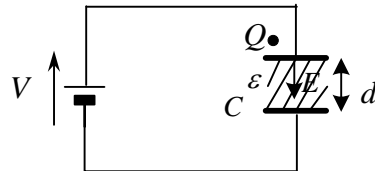
の力が下向きに働く<sup>(19)</sup>。誘電体の下の面では、上向きに同じ大きさの力が働く。誘電体に働く力の  $x$  方向成分の合計は 0 である。

極板と誘電体が完全に接着している場合には、マクスウェルの応力から求める。接着している上の極板と誘電体との境界面に薄い直方体の面での面積分を考えることにより、極板（導体）の中の電界は 0 だから次式が得られる。これは(2-55)では自由電荷に働く力である。

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{D_x^2}{\epsilon} S = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} S = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S$$

下の極板と誘電体の境界には同じ大きさで反対向きの力が働く。一般に導体表面には、面と垂直に単位面積当たり  $F_x = \sigma^2 / (2\epsilon)$  の力が働く。この結果は、誘電体が液体や気体で満たされる場合も同じである。また、(4-49)あるいは(4-50)を用いても得られる。

**例題 21** 図の様に面積  $S$ 、間隔  $d$  の平行平板コンデンサに蓄えられるエネルギーと極板に働く電気力を求めよ。極板と誘電率  $\epsilon$  の誘電体は接着しているとする。



(解) 電界のエネルギー密度は(2-45)より  $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} ED$  [J/m<sup>3</sup>]

コンデンサのエネルギー

$$W_c = w_e Sd = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} Sd = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd = \frac{1}{2d} \epsilon V^2 S = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2C} Q^2$$
 [J]

極板に働く電気力は例題 20 の結果より次式となる。

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon} = \frac{D^2 S}{2\epsilon} = \frac{ED}{2} S = \frac{QE}{2} \text{ [N]}$$

ローレンツ力より、単純に  $F = QE$  と早合点してはいけな。実際はこの半分である。電界  $E$  は、 $Q$  と  $-Q$  により半分ずつ作られ、 $-Q$  が作る電界が  $Q$  に力を及ぼすとも解釈できる。自分が作った電界で自分自身に力は働かない（自己力 0）。単位面積当たり極板に働く電気力  $ED/2$  は、電界のエネルギー密度に等しいことが分る。

絶縁できる空気の最大電界（絶縁耐力）はおおよそ  $3\text{kV/mm}$  である。このとき単位体積中に蓄えられる電界のエネルギー密度  $w_e$  を求めよう。

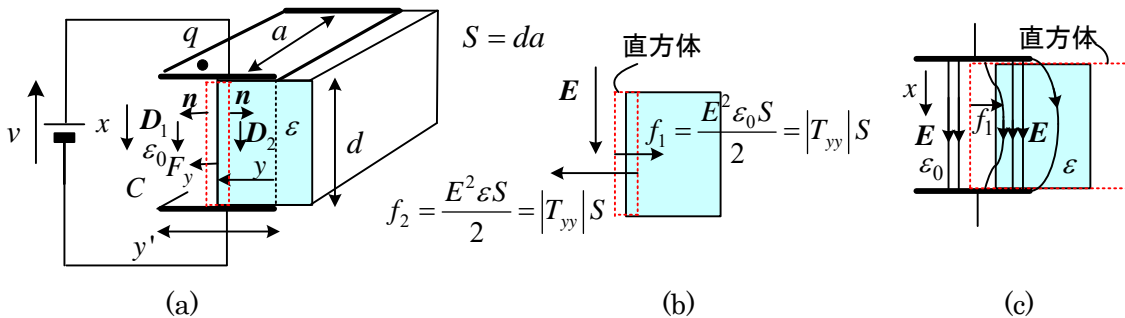
$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \times 8.854 \times 10^{-12} \times (3.0 \times 10^6)^2 = 39.8 \text{ J/m}^3$$

一方、空気中の磁束密度は経済的に  $B = 1.5 \text{ T}$  が限度である。このとき、このとき単位体積中に蓄えられる磁界のエネルギー密度  $w_m$  を求めよう。

$$w_m = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1.5^2}{2 \times 1.257 \times 10^{-6}} = 0.895 \times 10^6 \text{ J/m}^3$$

このように空気中に蓄えられる電界のエネルギーは磁界のエネルギーに比べて非常に小さい。このため電動機は磁界を利用している<sup>(7)</sup>。

**例題 22** 図の様に間隔  $d$  の平行平板コンデンサ中に誘電体（誘電率  $\epsilon$ ）の一部があるとき、誘電体に働く電気力を求めよ。極板の奥行きを  $a$  とする。



(解) コンデンサの静電容量は  $C = \frac{\epsilon_0(y'-y)a}{d} + \frac{\epsilon ya}{d}$  (1)

$W_c = \frac{1}{2} C v^2$  だから、(4-50)より

$F_y = \frac{\partial W_c(y, v)}{\partial y} = \frac{a}{2d} (\epsilon - \epsilon_0) v^2 = \frac{S}{2} (\epsilon - \epsilon_0) E^2$  ただし、 $S = da$  (2)

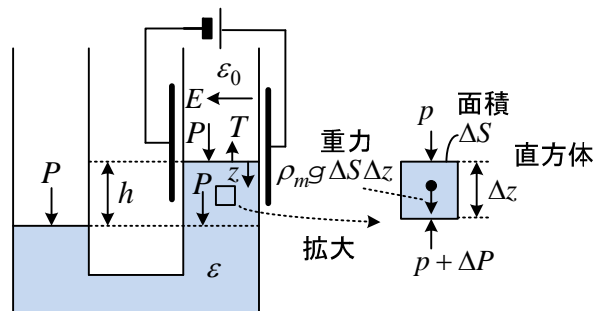
$x$  の増加する向きに、極板内に誘電体が引き込まれるように電気力が働く。

マクスウェルの応力から以下のように考えることがある。この場合、図 4-20 に示すように  $T_{yy} = -E_x D_x / 2 < 0$  を考える必要がある。この結果電界と垂直方向には  $ED/2$  の圧縮応力を受けるから、面積分を行うとき、誘電率が変化する誘電体の左面をはさんで、薄い直方体の表面を考えると、(b)の  $f_2 - f_1$  から(2)と同じ結果が得られる。しかし、この考え方には下記の疑問が生じる。

(要検討) 電界を  $x$  方向成分だけとすると、分極電荷にこの電界が作用して解答のような  $y$  方向成分のクーロン力が出るのはおかしいとの指摘がある<sup>(20)</sup>。この問題を厳密に考えるなら、電界

が  $x$  方向成分だけであるという仮定を取り除かなければならない。特に、コンデンサの極板右端付近や誘電体左端付近では電界が乱れるであろう(図(c))。境界条件で電界の接線方向成分は等しいが、電界が接線方向とは言い切れない。これらの乱れた電界が  $y$  方向成分の力を生むと指摘されている<sup>(20),(23)</sup>。ただ電界が乱れても誘電体全体に働く力は上記(2)の値になると考えられる。 $y$  の仮想変位によるエネルギーの増減を考えるとそうなるからである。図(c)に示すように、誘電体全体を取り囲む直方体を考えた時、もし電界が  $x$  軸方向成分のみと仮定すれば、図の直方体に働く(実質その中の誘電体に働く)  $y$  軸方向の力は  $f_1$  のみとなり正しい結果は得られない。同じように極板を囲む直方体を考えても  $y$  軸方向の力は得られない。実際には反作用が働くはずである。従って、この例題では、マクスウェルの応力から力を求めるためには厳密な電界の解析をしなくてはならないだろう。このとき図(c)の直方体上下の面で  $y$  軸方向の力が働くと思われる。

**例題 23** 図の様に U 字管に誘電率  $\epsilon$  [F/m]、密度  $\rho_m$  [kg/m<sup>3</sup>] の液体を入れ、片方に電極を取り付けて電界  $E$  [V/m] を加えた。空気の誘電率を  $\epsilon_0$  [F/m] とし、液面の差  $h$  [m] を求めよ。



(解) 例題 22 結果から電界を加えた方の液面に単位体積当たり次式の電磁力が働くとする。

$$T = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)E^2 \text{ [N/m}^2\text{]} \quad (1)$$

この力が、液面の差  $h$  [m] の部分の液体の単位面積当たりの重力と釣り合っているから

$$\rho_m g h = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_0)E^2 \quad \therefore h = \frac{1}{2\rho_m g}(\epsilon - \epsilon_0)E^2 \quad (2)$$

$g$  [N/kg] は重力加速度である。現実の  $h$  は小さいが、考え方は磁性流体の場合にも役立つ<sup>(19)</sup>。

(考察) この例題を取り上げた目的は以下の話をするためである。物質に働く力密度については(2-57)より次式の釣り合いの式が成り立つ。

$$(\text{div}\mathbf{T}_x^{(m)}, \text{div}\mathbf{T}_y^{(m)}, \text{div}\mathbf{T}_z^{(m)}) + \rho_m \mathbf{K} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ [N/m}^3\text{]} \quad (3)$$

液体については圧力  $p$  を考えればよいので、液体の応力テンソルは次式で与えられている。なお、マクスウェルの応力テンソルは  $\mathbf{f}$  の中に含まれているので混同しないようにしよう。

$$\mathbf{T}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_x^{(m)} \\ \mathbf{T}_y^{(m)} \\ \mathbf{T}_z^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \text{ [N/m}^2\text{]} \quad (4)$$

よって,

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}_x^{(m)}, \operatorname{div} \mathbf{T}_y^{(m)}, \operatorname{div} \mathbf{T}_z^{(m)}) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\operatorname{grad} p \quad (5)$$

誘電率の変化がない液体中では, 自由電荷もないので電磁力密度は  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  である。よって(3)より

$$-\operatorname{grad} p + \rho_m \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (6)$$

この場合外力は重力であり,  $z$  軸成分のみだから

$$\rho_m \mathbf{K} = (0, 0, \rho_m g) \quad (7)$$

である。よって, (6)より

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z}\right) + (0, 0, \rho_m g) = \mathbf{0} \quad (8)$$

$x, y$  軸方向は圧力差がないことを表す。 $z$  軸方向については次式が成立する。

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_m g = 0 \quad (9)$$

$p$  は  $x$  だけの関数,  $\rho_m$  一定と仮定する。このとき  $\partial \rightarrow d$  にかえて

$$-\frac{dp}{dz} + \rho_m g = 0 \quad (10)$$

$z = 0$  で圧力は  $P - T$  と考えて積分すると

$$\int_0^h \rho_m g dz = \int_{P-T}^P dp \quad \therefore \rho_m g h = T \quad (11)$$

が得られる。

なお, 図中に示した液体中の微小直方体における釣り合いの式からも

$$\rho_m g \Delta S \Delta z = \Delta p \Delta S \quad \therefore \rho_m g \Delta z = \Delta p \quad (12)$$

となり, 簡単に(10)が得られる。(3)式からスタートするのは, 遠回りである。しかし, 難しい話を簡単な例題で解いてみることは, 理解の一步となる。

物質に働く力密度としては, 以上のように電磁力だけでなく, 重力や圧力(機械的応力)も同時に考えないと十分とは言えない。液体の場合には, 応力テンソルが(4)のように単純であるが, 固体になると弾性体の応力テンソルは全ての成分を考えなくてはならない。

一般に, (3)より静電界中の液体の釣り合いの式として次式が得られる。

$$-\operatorname{grad} p + \rho_m \mathbf{K} + \rho \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad} \varepsilon = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\text{ただし, } p = p_0 - \frac{E^2}{2} \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \quad (14)$$

$p_0$  は電界が 0 の場合の圧力で, (14)の右辺第 2 項は電気ひずみの項である。電気ひずみの項を電気力に含めて考える教科書が多いが, 今井は圧力として考えるべきと述べており<sup>(19)</sup>, 本テキストでもこれに従っている。

# 第5章 コイル I

この章では、まず電流が作る磁界を計算する方法として周回積分の法則とビオーサバールの法則を述べる。次に、磁束が通り易い磁性体と磁気回路について述べる。さらに磁位とその応用、ベクトルポテンシャルとその応用を述べる。最後に磁界のエネルギーと力の計算法を説明する。本章の解析においては変位電流を無視し、緩慢に変化する現象（磁界系）を解析する。

## ○ 電流が作る磁界

導線に交流電流を流す場合を考えよう。電流  $I$  と磁界  $H$  の間には図 5-1 に示すように**右ねじの法則**が成り立つ。すなわち実際に電流の流れる向きにねじを進めると、ねじの回る向きに磁界ができる。交流の場合には電流は正負に変化するから磁界  $H$  もそれによって向きや大きさが変化する。図は  $I > 0$  の場合の磁界  $H$  を示している。

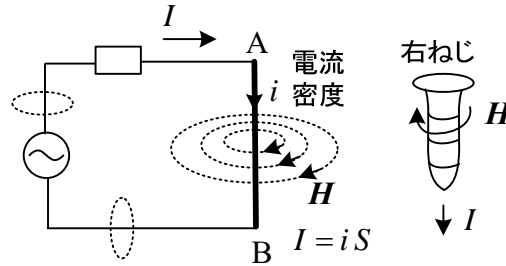


図 5-1 右ねじの法則

図 5-1 の回路が空気中にあるとしよう。導線 AB は十分長く、そのまわりの磁界を考える。電流と磁界に関しては、以下の式が考えられる。

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \textcircled{3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad \textcircled{7}$$

ここで、 $\mu$  は物質の透磁率である。なお、空気の透磁率は真空の透磁率  $\mu_0$  とほぼ同じであるが、一般的な式を導出する目的で  $\mu$  を用いて計算する。真空中では  $\mu$  を  $\mu_0$  に置き換えるだけでよい。

③において

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{i}| \quad (5-1)$$

と仮定すると、次式となる。もちろん時間変化がない**静磁界**なら厳密に成立する。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (5-2)$$

(5-1)の仮定に関しては、伝導電流  $\mathbf{i}$  に比べて**変位電流**  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  が作る磁界は小さいと考えることを意味する。例えば、導体中（導電率  $\kappa$ ，誘電率  $\varepsilon$ ）AB において、電流密度  $i[\text{A/m}^2]$  を

$$i = i_0 \sin \omega t$$

とおくと、導体中では  $\mathbf{D}, \mathbf{E}$  も AB 方向の成分しかないので、変位電流は⑥，⑧を用いて

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\omega \varepsilon}{\kappa} i_0 \cos \omega t$$

となる。よって、次式が成り立てば、導体中の変位電流は無視できることになる。

$$\frac{\omega \varepsilon}{\kappa} \ll 1 \quad (5-3)$$

第3章で述べたように銅では  $\varepsilon/\kappa = 1.54 \times 10^{-19}$  となるが、(3-24)に述べたように前提となるオームの法則  $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$  が成立するのに  $10^{-14}$ s よりも十分大きい時間が必要である。よって、周波数が  $f = 1\text{MHz} = 10^6\text{Hz}$  程度以下であれば、良い近似になると考えられる。導線の外の空気中では、伝導電流は0で変位電流のみ存在することになる。変位電流を作るもとになるものは、導体表面の電荷の時間変化や第6章で詳しく述べる誘導電界が考えられる。しかし、第7章に示すように、比較的低周波では、導体の周辺の電磁界においても、伝導電流が作る磁界がほぼ全てで、(5-2)が成り立つと考えられる<sup>(13)</sup>。電磁気学で、この場合を準定常電磁界ということがあるが、本テキストでは定常という言葉を用いて回路の定義で使うので緩慢に変化する現象<sup>(9)</sup> (slowly changing electromagnetic field)とよぶ。準静的電磁界(quasi-static electromagnetic field)ということもできる。以上のことから、交流電流を用いるコイル、変圧器、電動機、発電機等を扱う分野では金属中やその周辺の解析に(5-2)を用いることが普通に行われている。回路のコンデンサでは変位電流  $\partial D/\partial t$  を無視できないが、コンデンサでは磁界を考えることは普通ないので③を必要としない。この章では磁界系の緩慢に変化する現象を考える。

②を閉曲面について積分すると、次式が得られる。

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (2')$$

これは、磁束の保存則を示している。(5-2)を開曲面について面積分し、ストークスの定理を用いると次式が得られる(③' 参照)。

$$\int_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5-4)$$

(5-4)はアンペアの周回積分の法則(Ampere's circuital law)と呼ばれる。

アンペアの周回積分の法則を用いて、図5-2に示すように細くて丸い棒状の導線に電流  $I(t)$ [A] が流れるときの磁界  $\mathbf{H}$  を求めよう。電流が垂直に交わる平面  $S$  と半径  $r$  の円の積分路  $C$  をとるとき、対称性より磁界  $\mathbf{H}$  の大きさは  $C$  上で等しく、向きは接線方向と仮定する。(5-4)より

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_C H_\phi \, dl = 2\pi r H_\phi(t) = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = I(t)$$

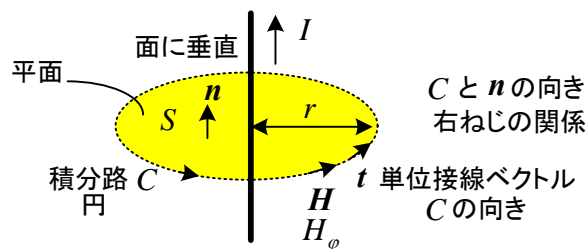


図5-2 棒状の導線に流れる電流による磁界

$$H_{\varphi}(t) = \frac{I(t)}{2\pi r}, \quad \mathbf{H}(r,t) = \frac{I(t)}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5-5)$$

となり磁界は電流からの距離に反比例して弱くなる。磁束密度  $B_{\varphi}$  は⑦より次式となる。

$$B_{\varphi}(t) = \frac{\mu I(t)}{2\pi r}, \quad \mathbf{B}(r,t) = \frac{\mu I(t)}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5-6)$$

(5-6)は、(付 20)より  $B_{\varphi}$  が  $\varphi$  の関数でないから②の  $\text{div}\mathbf{B} = 0$  を満足する ( $B_r = B_z = 0$ )。②' より図 5-3 に示すように、どんな閉曲面  $S$  をとっても、磁束密度  $\mathbf{B}$  の力線は常に  $S$  に入った分が  $S$  から出る。この場合には  $\mathbf{H}$  についても、 $\text{div}\mathbf{H} = 0$ ,  $\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = 0$  が成り立つが、後で述べるように一般には成立しない。

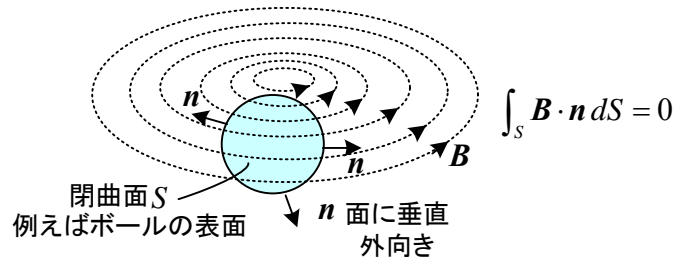
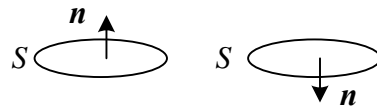


図 5-3 磁束線

(2-11)で磁束(magnetic flux)  $\phi$  を次式で定義した。

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5-7)$$



ここで、 $S$  は閉曲面、 $\mathbf{n}$  は面に垂直な単位法線ベクトル (2通りの選び方が可能) である。 $\mathbf{n}$  の矢印を磁束  $\phi$  の測定の向き (正の向き) という。 $\phi$  は  $\mathbf{n}$  方向に通過する磁束密度を集めたものである。なお、 $\phi$  を磁束数、 $\mathbf{B}$  の力線である磁束線を磁束とよぶ教科書もある<sup>(29)</sup>。

$S$  の周辺が同じであれば、どのような面でも  $\phi$  は等しい。これを証明しよう。図 5-4 に示すように任意の閉曲面を周辺が等しい2つの開曲面  $S_1$  と  $S_2$  に分割する。②' より、次式が成り立つ。

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1' dS + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0 \quad (\mathbf{n} \text{ は外向きに選ぶ})$$

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_1'$  とすると、

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (5-8)$$

が得られる。 $S_1$  と  $S_2$  は任意だから、(5-7)の磁束  $\phi$  は  $S$  の周辺 (面の端) が同じなら面によらない。

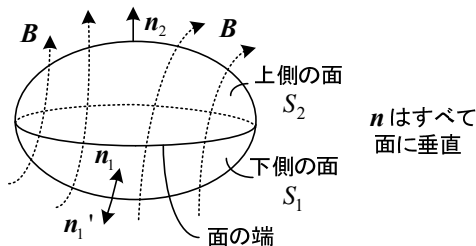


図 5-4 磁束の面

電流密度については、(5-2)の両辺の div を計算し、(付 11)を用いて、次式が得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5-9)$$

電流は  $\mathbf{I}(t) = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$  で定義されるが、この関係は、 $\mathbf{B}$  と  $\phi$  の関係と同じであり、 $\mathbf{I}(t)$  は  $S$  の周辺が同じであれば、どのような面でも等しいと言える。(5-9) は電気回路のキルヒホッフの電流則に相当するが、高周波になると(5-9)は成立しない(第7章で詳しく話す)。

ここで、鎖交という言葉を述べておく。2つの向きをもつ閉曲線が右ねじの関係で鎖のように交わるとき鎖交数1という。図5-5で電流が  $S$  の外側でループになっているとき、図の鎖交数となる。図5-5の場合は  $C$  上で磁界は異なるので(5-5)の様に簡単には求められない。

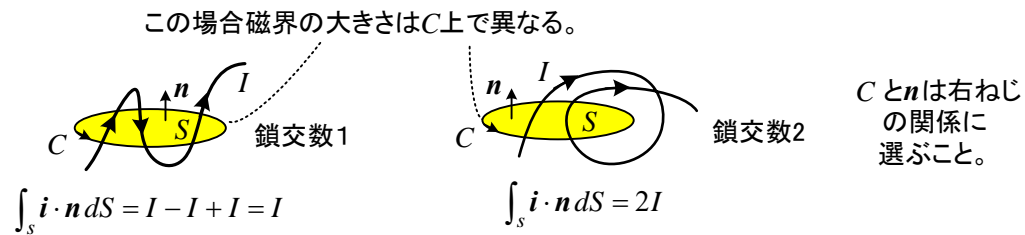
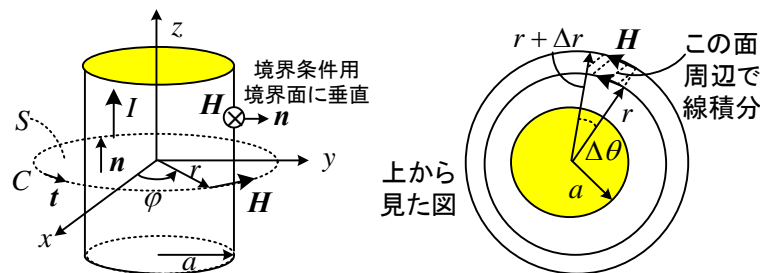


図 5-5 電流の鎖交

**例題 1** 半径  $a$  の円柱状の十分長い導体に一様に電流  $I$  [A] が流れているとき、導体内と導体外の磁界  $\mathbf{H}$ ，磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めよ。なお、透磁率は導体内  $\mu_1$ ，導体外  $\mu_2$  とする。



(解) 電流が垂直に交わる平面  $S$  と半径  $r$  の円の積分路  $C$  をとる。対称性より磁界  $\mathbf{H}$  の大きさは  $C$  上で等しく、向きは接線方向と仮定する。アンペアの周回積分の法則より

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \int_C H_\varphi dl = 2\pi r H_\varphi = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \begin{cases} I r^2 / a^2 & : r < a \\ I & : r > a \end{cases}$$

よって、

$$H_\varphi = \frac{rI}{2\pi a^2} \quad r < a, \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad r > a \quad \mathbf{H} = H_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_\varphi = \frac{\mu_1 r I}{2\pi a^2} \quad r < a, \quad \mathbf{B}_\varphi = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \quad r > a \quad \mathbf{B} = B_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2)$$

解のチェック：

円柱座標系の(付 20)より、独立変数が  $r, \varphi, z$  で、 $B_r = B_z = 0$ ， $B_\varphi$  が  $r$  だけの関数だから  $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{0}$  が成立する(磁束線を描くと連続だから計算しなくても明らかではあるが)。



(付 21)より,  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 I}{2\pi a^2} \right) \hat{z} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \quad (0 < r < a), \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (a < r)$

これは, (5-2)を満たす。  $r = a$  において面電流はないので, 境界条件(2-58),(2-59)は満たされている。よって②と(5-2)および境界条件を満足するので (1),(2)は解である。周回積分の法則は(5-2)の条件のみだが, ②と境界条件を意識して磁界が接線方向と仮定したのである。

導線の外ではうずが巻いたような磁力線ができるが, 電流が 0 だから  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$  であることに注意しよう。右図の斜線部分  $S$  の周辺  $C$  で磁界  $\mathbf{H}$  を周回積分すると  $H_r = 0$  だから

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \frac{I}{2\pi(r+\Delta r)} (r+\Delta r)\Delta\theta - \frac{I}{2\pi r} r\Delta\theta = 0$$

となり, 確かに図の斜線部分にうずはないのである。第 1 章例題 2 を参照のこと。

次に, アンペアの周回積分の法則をソレノイドに適用して磁界を求めてみよう。ソレノイドとは巻線を密に一樣に巻いたコイルである。図 5-6 に示すように半径に比べて長さが十分長いソレノイドが空気中にある。筒は巻線の様子がわかるように書いている。

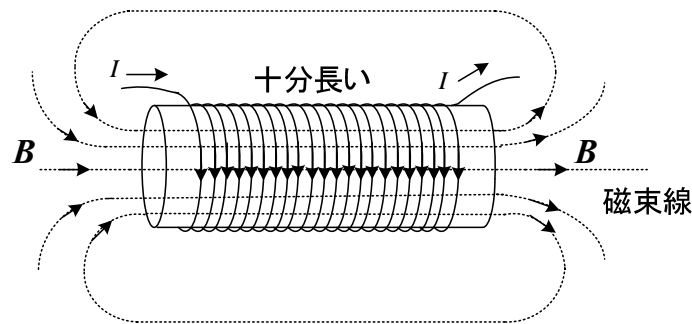


図 5-6 ソレノイドの磁束線

磁束線は図の様になり, コイル内では軸方向のみで, コイルの外の磁束密度  $B$  はほぼ 0 と仮定する。磁束線は連続だから, コイルから出た本数が反対側から戻らないといけませんが, 帰りは空間全体に広がるためである。⑦が全空間で成立するので, 磁界  $\mathbf{H}$  の磁力線も同様となる。流す電流を  $I[\text{A}]$  とし, コイルの 1m 当りの巻数を  $n$  回とする。図 5-7 のように長方形の積分路を考え, アンペアの周回積分の法則を適用して磁界を求める。積分路  $C_1$  については, 面を通る (鎖交する) 電流はないので

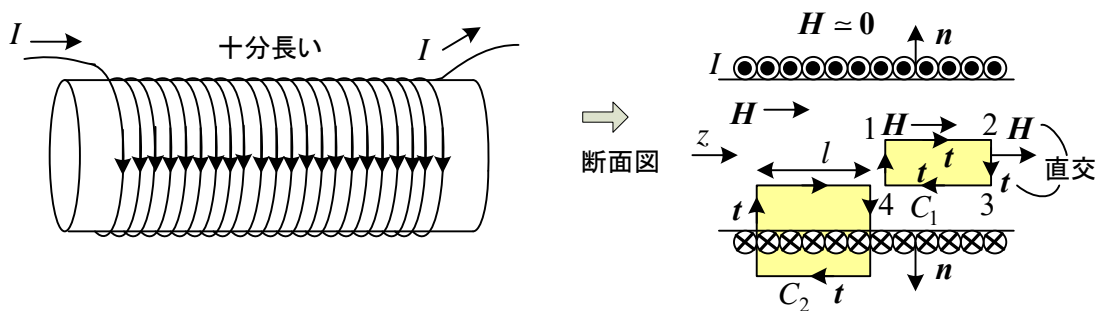


図 5-7 ソレノイドの積分路

$$\int_{C_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{12} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{23} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{34} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{41} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

23, 41 では、 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{t} = 0$  であり、 $H_{12}, H_{34}$  を  $\mathbf{H}$  の z 成分とすると、34 では  $\mathbf{H}, \mathbf{t}$  は逆向きなので

$$H_{12}l - H_{34}l = 0 \quad \therefore H_{12} = H_{34}$$

この結果ソレノイドの中では磁界  $\mathbf{H}$  はどこでも等しいことが言える。積分路  $C_2$  については、コイルの外では  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  として、鎖交する電流は  $nI$  だから

$$\int_{C_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = H_z l = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = nI \quad \therefore H_z = nI \quad \mathbf{H} = nI \hat{\mathbf{z}} \quad (5-10)$$

ソレノイドの中の磁束密度  $\mathbf{B}$  は、⑦より次式となる。

$$\mathbf{B}_z = \mu n I \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{B} = \mu n I \hat{\mathbf{z}}$$

解のチェック： $\mathbf{B}_z = \mu n I$  は場所の関数でないから  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  は満足している。電流が流れている部分が境界で、コイル部分が十分薄いとして大きさは  $nI$  [A/m] の面電流  $\mathbf{i}_s$  が流れていると考える。(2-58)の境界条件  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_s$  で、 $\mathbf{n}$  を図の向きにとると  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$  より、向きを考えると  $-\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_s$  を満足している。 $\mathbf{B}$  の  $\mathbf{n}$  方向成分はないから(2-59)も満足する。また、 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$  であり、ソレノイドの中の電流が 0 であることを意味する。後述の偏微分方程式を直接解く場合にも、電流は境界条件に考慮する。

## ○ ビオ - サバルの法則

周回積分の法則より一般的で、②, (5-2)から得られるビオ-サバルの法則(Biot-Savart law 別人)がある。この法則によると、緩慢に変化する電流  $I(t)$  の流れる微小長さ  $dl$  の部分が  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$  離れた P 点に作る磁界  $d\mathbf{H}$  は、次式で与えられる。証明はベクトルポテンシャルの節で述べる。

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \quad (5-11)$$

$\mathbf{t}$  は電流  $I$  の向きを向いた単位接線ベクトルである。 $d\mathbf{H}$  の向きは  $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{r}$  の作る平面に垂直になり、その  $\mathbf{t} \times \mathbf{r}$  方向の成分  $dH$  は  $|\mathbf{t} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{t}| |\mathbf{r}| \sin \theta = r \sin \theta$  だから次式で計算できる。

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \quad (5-12)$$

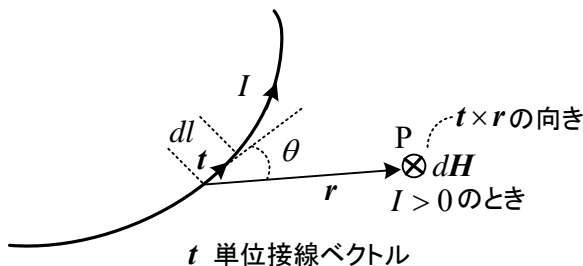


図 5-8 ビオ - サバルの法則

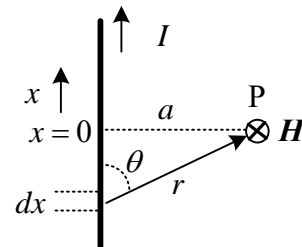


図 5-9 無限に長い直線電流が作る磁界

図 5-9 の様に、無限に長い直線導体に電流が流れているとき、導体から  $a$  だけ離れた P 点の磁

界をビオ - サバルの法則で求めてみよう。  $I$  (常に正) はある点からの距離を表すので、無限の場合には扱いにくい。ここでは、正負に変化する  $x$  を用いる。

P 点の磁界の向きが、各  $dx$  について同方向なので、(5-12)を用い

$$H = \int dH = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dx \quad (dx > 0)$$

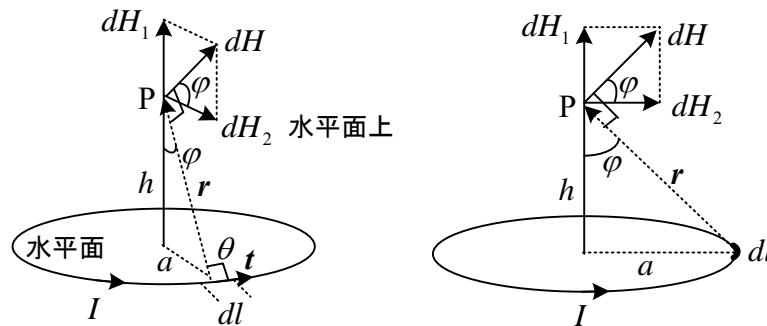
図より、  $x = -r \cos \theta$ ,  $r \sin \theta = a \quad \therefore r = \frac{a}{\sin \theta}$ ,  $x = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} a$

$$\therefore \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{a^2}, \quad dx = -\frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} a d\theta = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$\text{よって } H = \frac{I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{I}{4\pi a} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{I}{2\pi a}$$

(5-5)と一致している。

**例題 2** 図の様に半径  $a$  の円形コイルに電流  $I$  が流れている。円の中心軸上の磁界を求めよ。



(解) 導体上の  $dl$  の部分が P 点に作る磁界  $dH$  はビオ - サバルの法則より、  $\theta = \pi/2$  だから

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = \frac{I}{4\pi r^2} dl$$

$dH$  の向きは  $\mathbf{t} \times \mathbf{r}$  だから、  $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{r}$  の作る平面に垂直であるから、水平面と  $\varphi$  の角度をなす。よって、  $dH$  を軸方向と水平方向に分解すると次式が得られる。

$$dH_1 = dH \sin \varphi = \frac{I}{4\pi} \frac{a}{r^3} dl \quad (\sin \varphi = \frac{a}{r})$$

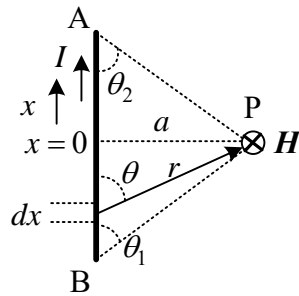
$$dH_2 = dH \cos \varphi = \frac{I}{4\pi} \frac{h}{r^3} dl \quad (\cos \varphi = \frac{h}{r})$$

$dH_1$  の向きは  $dl$  の位置にかかわらず常に一定であるが、  $dH_2$  は向きが変化し、コイルの全円周の分を加えると 0 となる。したがって、コイルの中心軸上では、磁界は鉛直方向を向き、次式で与えられる。  $r, a$  は  $dl$  とは無関係な定数で、円周上で集める線積分は単に円周をかければよい。

$$H = \int_0^{2\pi a} \frac{I}{4\pi} \frac{a}{r^3} dl = 2\pi a \frac{I}{4\pi} \frac{a}{r^3} = \frac{I a^2}{2 r^3}$$

円の中心では、  $r = a$  だから  $H = \frac{I}{2a}$  (5-13)

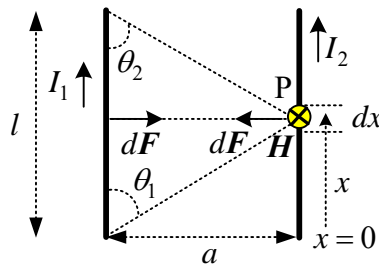
例題 3 図の様に有限の長さの導体 A,B に電流  $I$  が流れているとしたとき磁界を  $\theta_1, \theta_2, a$  で表せ。



(解) 図 5-9 の場合と同様に考えて

$$H = \frac{I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{I}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

例題 4 図の様に  $a$  離れた長さ  $l$  の 2 本の細い平行導線に電流  $I_1, I_2$  が流れているとしたとき、導線に働く力の大きさを求めよ。空気の透磁率は  $\mu$  とする。



(解) 例題 3 より,  $I_1$  が P 点に作る磁界は

$$H = \frac{I_1}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

である。この磁界により図の  $dx$  部分に働く力は、(2-21)より

$$dF = B I_2 dx = \mu H I_2 dx = \mu \frac{I_1 I_2}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dx$$

従って、導線全体ではこれを集めて

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_0^l \mu \frac{I_1 I_2}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dx \\ &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi a} \int_0^l \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + a^2}} \right) dx \end{aligned}$$

ここで、 $\sqrt{x^2 + a^2} = z$  とおくと、 $x^2 + a^2 = z^2$  より、 $x dx = z dz$  だから

$$\int_0^l \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int_a^{\sqrt{l^2 + a^2}} \frac{z}{z} dz = \sqrt{l^2 + a^2} - a$$

となる。2 項目の積分も  $l-x = x'$  とおくと、1 項目と等しいことが判る。よって、

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi a} (\sqrt{l^2 + a^2} - a)$$

フレミングの左手の法則より図の向きの力となる。両電流が同方向なら引力、逆方向なら斥力となる。

## ○ 磁性体

コイル、変圧器、電磁石、電動機などは大きい透磁率 $\mu$ の強磁性体（主に鉄）を利用している。強磁性体を使うと流す電流が同じでも磁化(magnetization)により高い磁束密度 $B$ が得られる。鉄でできている釘にエナメル線を巻いて、電磁石を作った経験があるだろう。銅棒や木材では、電磁石はできない。そして釘の場合、一度電流を流すと、電流を切っても磁石になっていることも体験しただろう。一体鉄の中で何が起きているのだろうか？簡単に説明しよう。釘の中の電子は何もしない状態でも回転(スピン)して、小さな電流ループを作り、その結果磁束密度 $B$ ができているが、向きがバラバラで全体として磁石にはならない。しかし、釘に巻いたエナメル線に電流を流すと、釘の中の小さい電流ループが作る磁束密度 $B$ の向きがそろってくるので（これが磁化である）、大きい磁束密度 $B$ が生じる。小さな電流ループは小さな磁石と考えてもよい。

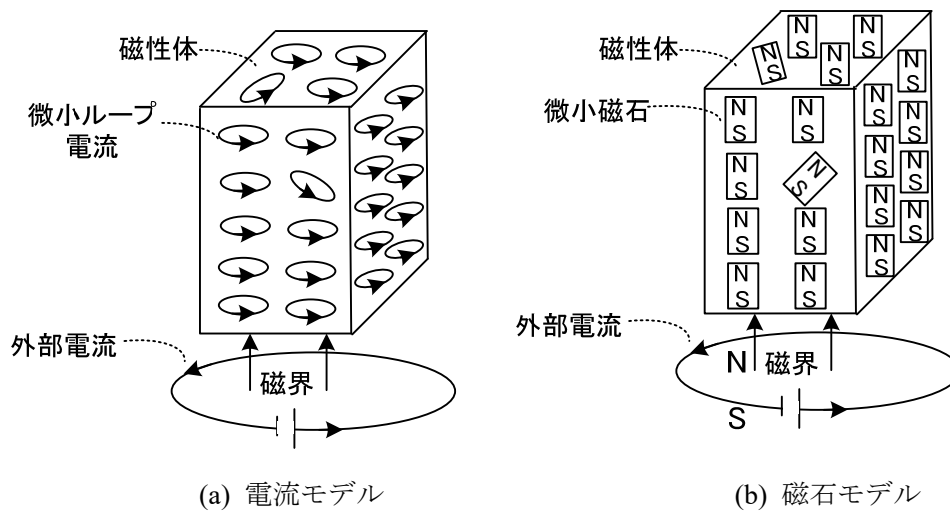


図 5-10 磁化のイメージ

図 5-11 のように鉄心にコイルを巻いて電流を流す。鉄心中の磁界 $H$ と磁束密度 $B$ （鉄心材料に依存）の関係は図 5-12(a)のようになる。 $H$ は一様とすると電流 $I$ に比例する。磁化されていない強磁性体で、電流 $I$ を増やす（ $H$ を増やす）と $O \rightarrow P_1$ のように変化し、 $B$ が増えない飽和領域に達する。これは鉄心内の電流ループが向きを変えてしまった状態と考えられ、飽和特性(saturation characteristics)と呼ばれる。 $H$ を十分大きくしてから減少させ、さらに反対方向に電流を流すと $P_1 P_2 P_3 P_4$ と変化していく。そして、 $H$ を十分減少させ、そのあと電流を増やすと $P_4 P_5 P_6 P_1$ と変化していく。これをヒステリシス特性(hysteresis characteristics)という。なお、飽和しない範囲で $H$ を増減させても図 5-12(a)の小さいステリシス特性を生じる。ヒステリシスが無視できる材料の場合には、図(b)の特性となり、飽和領域を除いて $B$ と $H$ は比例関係と考えることが多い。

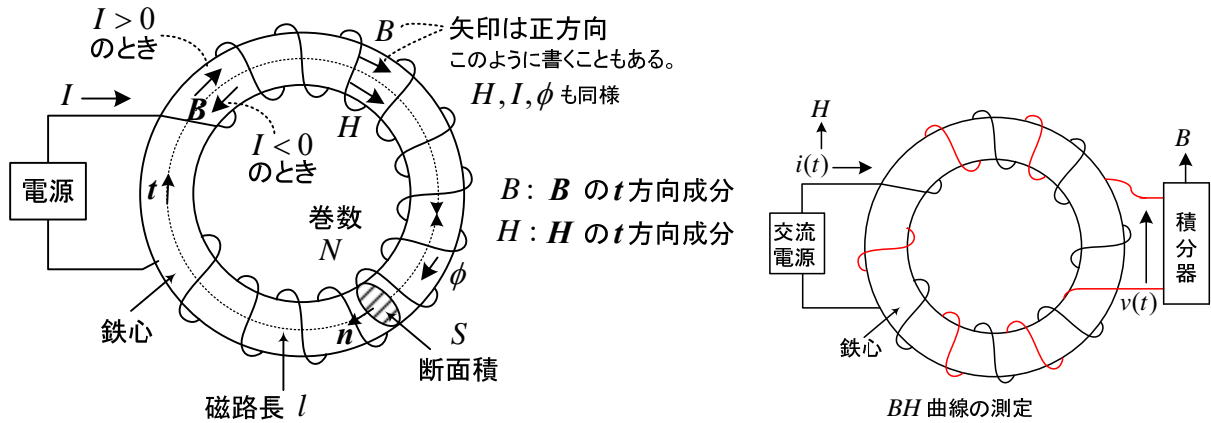


図 5-11 鉄心に巻いたコイル

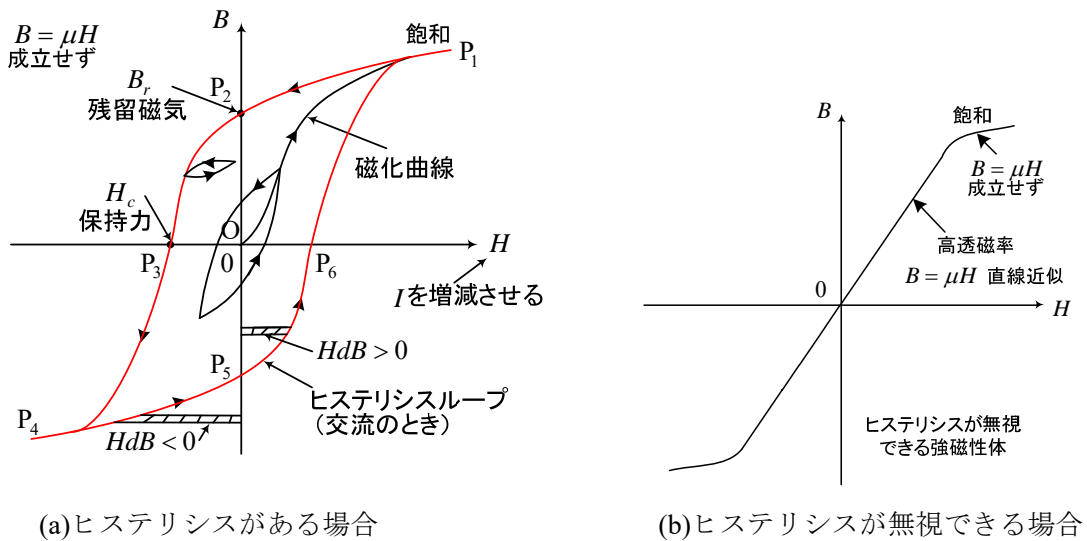


図 5-12 強磁性体の BH 特性

(a)のヒステリシス特性を利用したものが永久磁石，(b)を利用したものがコイル，電磁石，変圧器，発電機，電動機の鉄心である。図 5-12 の特性で， $B$  は鉄心に別の測定用の巻線を巻いて，その電圧を積分して測定する（電磁誘導の法則の利用）。このとき電源は交流とする。(5-4)より  $H$  が一樣なら伝導電流  $I$  に比例し，④' の変圧器起電力より  $B$  が求まるからである。永久磁石の材料としては，(a)の残留磁気(residual magnetism)と保持力(coercive force)が大きいことが望ましい。

交流電源をつないでヒステリシスループを 1 週するとき，このループの面積  $S_h$  だけのエネルギーが失われ熱エネルギーとなる。これをヒステリシス損(hysteresis loss)という。単位体積当たりのヒステリシス損  $w_h$  は(2-43)より次式で計算できる。 $T$  は交流電源の周期である。

$$w_h = \int_0^T \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt = \int_0^T H \frac{\partial B}{\partial t} dt = \int_{P_4 P_6 P_1} H dB + \int_{P_1 P_3 P_4} H dB = S_h \quad [\text{J/m}^3] \quad (5-14)$$

図 5-11 に示したように  $\mathbf{H} = H \mathbf{t}$ ， $\mathbf{B} = B \mathbf{t}$  と考えている ( $H$ ， $B$  に正負あり)。ヒステリシス損が問題になるのは，交流で鉄心を利用するコイル，変圧器，電動機などである。

磁化に関して明確にしておこう。まず，磁気モーメント(magnetic moment)  $\mathbf{m}$  を次式で定義する。

$$\mathbf{m} = IS \mathbf{n} \quad [\text{Am}^2] \quad (5-15)$$

$\mathbf{n}$ は面 $S$ の単位法線ベクトルで、微小閉路を流れるループ電流 $I$ に対し右ねじの進む向きを選ぶ。

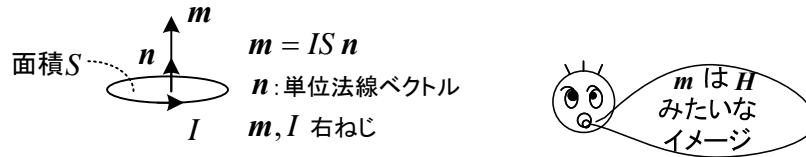


図 5-13 磁気モーメント

図 5-10(a)の電流モデルにおいて、磁性体の各点ごとに微小体積 $\Delta V$ （原子レベルより大きい）を考え、その中に含まれる原子レベルの微小な磁気モーメント $\mathbf{m}_i$ （ $n$ 個とする）の平均を磁化(magnetization) $\mathbf{M}$ とよび、次式で定義する。

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \quad [\text{A/m}] \quad (5-16)$$

真空中の磁化は $\mathbf{m}_i = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{0}$ である。磁束密度 $\mathbf{B}$ 、磁化 $\mathbf{M}$ 、磁界 $\mathbf{H}$ には次式の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad [\text{T}] \text{ または } [\text{Wb/m}^2] \quad (5-17)$$

ここで、 $\mu_0 \mathbf{M}$ を磁気分極(magnetic polarization) $\mathbf{P}_m$ とよぶ。 $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ を用いると、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \quad [\text{T}] \quad (5-18)$$

と書ける。この式は、誘電体の分極(4-37)とよく対応している。教科書によっては $\mu_0 \mathbf{M}$ を $\mathbf{M}$ と書いて、磁気分極のことを磁化ということもあるので注意しよう。

永久磁石を除く物質について、磁化は磁界 $\mathbf{H}$  [A/m] に比例し

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (5-19)$$

と書ける。 $\chi$ は磁化率(magnetic susceptibility)と呼ばれる。 $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ であれば $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ となる。(5-19)を(5-17)に代入して、 $\mu = \mu_0(1 + \chi)$ とおくと

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \textcircled{7}$$

と書ける。 $\mu$  [H/m]は透磁率(permeability)である。真空中の透磁率 $\mu_0$  [H/m]との比

$$\mu_s \equiv \mu / \mu_0 \quad (5-20)$$

は比透磁率(relative permeability)とよばれている。鉄では $\mu_s$ は5000ぐらいである。⑦の関係さえ使えば、磁化のことは知らなくても、多くの問題を解くことができるであろう。

永久磁石の場合には、図 5-12(a)に示すようにヒステリシス現象を利用しているから、 $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ としても $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ である。このとき、(5-19)のかわりに

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} + \mathbf{M}_0 \quad (5-21)$$

とおけ、 $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ としても磁化が残る。 $\chi \mathbf{H}$ は誘導磁化(induced magnetization)、 $\mathbf{M}_0$ は $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ でも残るので永久磁化(permanent magnetization)と呼ばれる。(5-17)に代入して、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0 = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0 \quad (5-22)$$

が得られる<sup>(13),(15)</sup>。⑦は永久磁石では成立しない。(5-22)が⑦のより一般的な表現である。

本テキストでは詳しく述べないが、③がどのようにして導かれるかを簡単に示しておく。(5-15) ,

(5-16)より、磁性体中の**磁化電流密度**(magnetization current density)  $\mathbf{i}_m$  は次式となる<sup>(29)</sup>。

$$\mathbf{i}_m = \text{rot}\mathbf{M} \quad [\text{A/m}^2] \quad (5-23)$$

$\mathbf{M}$  を  $\mathbf{i}_m$  が作る  $\mathbf{H}$  のイメージでとらえるとわかりやすい。**物体とは微視的には真空中に分布する点電荷の集まり**であり、電磁界はどんな場合でも真空中を考えればよい<sup>(20)</sup>。このとき  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  を使ったマクスウェルの方程式が根本の式である\*。③のもとになる式は次式で与えられる。

$$\text{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right) = \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}\mathbf{M} \quad (5-24)$$

ここで、右辺はそれぞれ伝導電流、変位電流、分極電流、磁化電流を表す。これに、(4-37), (5-17) を用いて③が得られる。このため  $\mathbf{B}$  が本質的な量で磁界とよぶべきものである。実際  $\mathbf{B}$  を磁界とよぶ教科書もある<sup>(20),(27)</sup>。電流モデルは  $\mathbf{EB}$  対応につながる。

\*他の式は、②、④は同じで、①のもとになる式が  $\text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho - \text{div}\mathbf{P}$  である。

最後に、**磁荷モデル**(magnetic charge model)を述べよう。磁石は我々の身近にあり、直感的な理解を可能にする。図 5-10(b)ではばらばらの向きだった小さい電磁石が外部磁界によって向きがそろい、結果として強い電磁石ができると考えられよう。

誘電体の分極と同様に、**磁荷密度**(magnetic charge density) (または**磁極密度**(magnetic pole density))  $\rho_m [\text{Wb/m}^3]$  を次式で数学的に定義する<sup>(20)</sup>。

$$\rho_m = -\text{div}\mathbf{P}_m = -\text{div}(\mu_0 \mathbf{M}) \quad (5-25)$$

磁荷は実在しないが、磁気現象を説明するモデルとして有用である。②より(5-22)の  $\text{div}$  をとると  $\text{div}\mathbf{B} = 0$  だから

$$\text{div}\mathbf{H} = -\text{div}\mathbf{M} = \frac{\rho_m}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} (\rho_{mi} + \rho_{m0}) \quad (5-26)$$

ここで、(5-21)より

$$\rho_{mi} = -\mu_0 \text{div}(\chi \mathbf{H}), \quad \rho_{m0} = -\mu_0 \text{div}\mathbf{M}_0 \quad (5-27)$$

とおく<sup>(3)</sup>。  $\rho_{mi}$  は誘導磁化をおこす磁荷密度 (誘導磁荷とよぶ) で、(4-38)の分極電荷密度  $\rho'$  に対応する。  $\rho_{mi}$  が表面に分布しているときの面磁荷密度を  $\sigma_{mi} [\text{Wb/m}^2]$  で表す。  $\rho_{m0}$  は永久磁化をおこす磁荷密度 (永久磁荷とよぶ) で、永久磁石以外では 0 とおける。  $\rho_{m0}$  が表面に分布しているときの面磁荷密度を  $\sigma_{m0} [\text{Wb/m}^2]$  で表す。  $\sigma_m = \sigma_{mi} + \sigma_{m0}$  とする。磁石の両端は N, S 極 (磁極) であるが、これは磁荷モデルによる。  $q_{m0} = \sigma_{m0} S [\text{Wb}]$  は、永久磁石の両端に現れる磁荷で、磁極ともよばれる。磁石を小さく切ってもやはり磁石で N 極や S 極だけを取り出すことはできない。N 極が+の磁荷、S 極が-の磁荷に対応する。磁束密度  $\mathbf{B}$  は磁石の外では、N 極から S 極に向かう向きにできる。磁荷モデルは古くからあった考え方で、 $\mathbf{EH}$  対応につながる。

伝導電流が流れていないとき  $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}$  である。(5-26)と連立させて考えると、(4-1), (4-2), (4-3)の静電界の式と良く似ていることがわかる。よってこの場合には静電界の知識が役立つ。



ちょっと一言

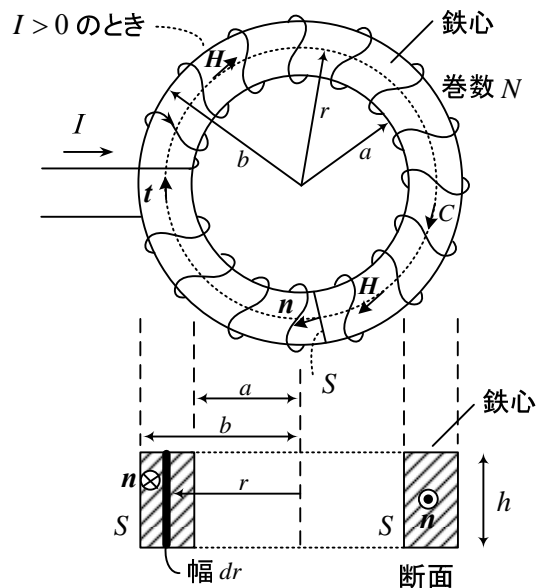
物質とは微視的には真空中に分布する点電荷 (運動も考えて) の集まりであり、電磁界はどんな場合でも真空中を考えればよい<sup>(20)</sup>。このとき、電界  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  が本質的な量で、分極  $\mathbf{P}$  と磁化  $\mathbf{M}$



を使って表した  $E, B, P, M$  表示のマクスウェルの方程式が根本的な式である。これは **EB 対応**(EB analogy)とよばれ、磁化が微視的に電流ループに基づくことに対応している。このうち電束密度  $D$  と磁界  $H$  を定義して  $E, D, H, B$  で記述されたマクスウェルの方程式が導かれる。これに対し古くからあったのが **EH 対応**(EH analogy)である。**EH 対応**では磁石に働く力から磁界  $H$  を定義していた。つまり電界  $E$  と磁界  $H$  を本質的な量と考えたわけである。 $B, H$  の名前は伝統的に **EH 対応**のときの名前であり、高校の教科書を始め現在も広く使われている。これに関連して本テキストの立場を述べておこう。 $E, D, H, B$  で記述されたマクスウェルの方程式は誘電体や磁性体を含む系の電磁界を計算するための理論として、現在唯一のものであり<sup>(20)</sup>、実際によく利用されている。よって本テキストでは、 $E, D, H, B$  のマクスウェルの方程式よりスタートし、分極と磁化は誘電率や透磁率を使って簡単に述べる。分極  $P$  と磁化  $M$  を新たに主要登場人物に加えると話が複雑化し、電磁気学の応用を考える場合にはかえって分かりにくくなると考えたからである。測定が容易な自由電荷(分極電荷は入らない)に直接結びつくのは  $D$ 、測定が容易な伝導電流(磁化電流は入らない)に直接結びつくのが  $H$  で、これらは便利のために作られた量だから、**EB 対応**が本質的ではある。一方電界と磁界の類似性に関し **EH 対応**は分かりやすく、本テキストでもこの考え方を利用する。巨視的な電磁現象の実験結果を正しく説明することができるのであれば問題ないので、**EB 対応**と **EH 対応**の両方を尊重したい<sup>(24)</sup>。

**例題 5** 図のような断面長方形のドーナツ型の鉄心(透磁率  $\mu$ )に導線を  $N$  回巻いたコイルがある。

- (1) コイルに電流  $I(t)$  を流したとき、半径  $r$  の点での磁束密度  $B$  を求めよ。
- (2) 鉄心を通る磁束  $\phi$  を求めよ。



(解) (1) 鉄心内に半径  $r$  の円  $C$  を考える。対称性より、磁界  $H$  は  $C$  の接線方向で、 $C$  上のどの点でも大きさが等しいと考えられる。周回積分の法則より

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \int_0^{2\pi r} H dl \quad (H : \mathbf{H} \text{ の } \mathbf{t} \text{ 方向成分})$$

$$= 2\pi r H = NI \quad (C \text{ に鎖交する電流の和 : } I \text{ の正方向と } \mathbf{t} \text{ が右ねじの関係なら+)}$$

$$\therefore H = \frac{NI}{2\pi r} \quad [\text{A/m}], \quad B = \mu H = \frac{\mu NI}{2\pi r} \quad [\text{T}] \quad (B : \mathbf{B} \text{ の } \mathbf{t} \text{ 方向成分})$$

(2) 図の微小幅部分  $dr$  (面積  $h dr$ ) を通過する磁束を  $d\phi$  とすると

$$d\phi = B dS = B h dr \quad \text{だから}$$

$$\therefore \phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dS = \int_S B dS = \int_a^b \frac{\mu N I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu N I h}{2\pi} [\log r]_a^b = \frac{\mu N I h}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad [\text{Wb}]$$

起磁力(magnetomotive force)と磁気抵抗(magneto-resistance)

磁束を  $\phi = F / R_m$  より求めることがある。 $F = N I$  は起磁力と呼ばれ、磁束を作るものになる。(2)の結果より、磁気抵抗  $R_m$  は、次式のように求まる。

$$R_m = 2\pi / (\mu h \log \frac{b}{a}) \quad (5-28)$$

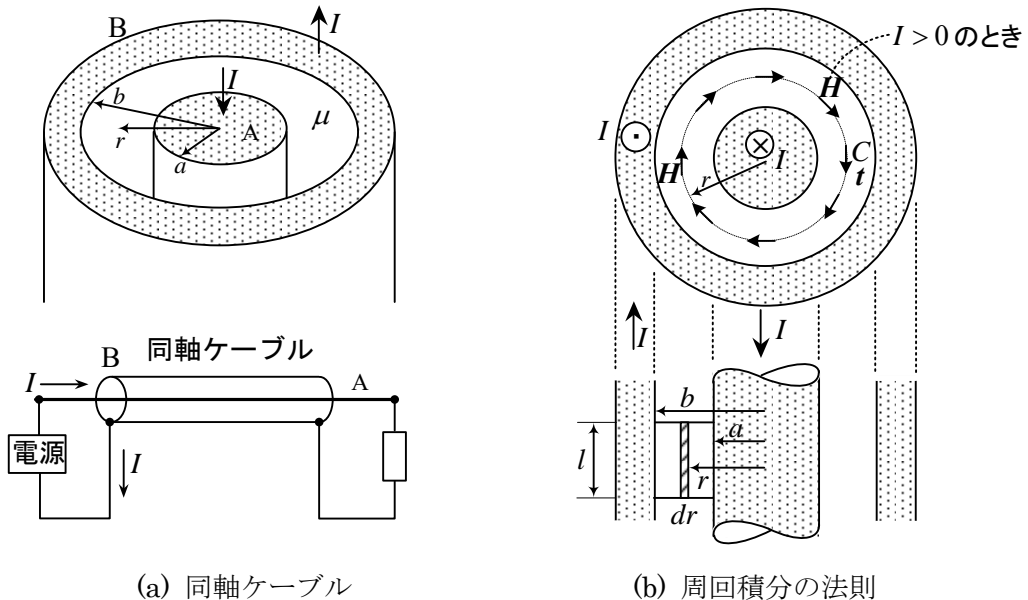
磁気抵抗を次式で近似することが良く行われる。 $b - a \ll a$  のときほぼ等しい。

$l$  : 磁路長(磁束が通る平均の長さ)  $l = \pi(a+b)$  ,  $S$  : 鉄心の断面積  $S = (b-a)h$

$$R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{\pi(a+b)}{\mu h(b-a)} \quad (5-29)$$

**例題 6** 図に示すように半径  $a$  の円柱状導体 A と内半径  $b$  の円筒状導体 B からなる十分長い同軸ケーブルがある。A, B 間には絶縁体があり、透磁率を  $\mu$  とする。

いま、A に電流  $I$  を流し、B によって戻る往復回路ができているとする。 $a < r < b$  のとき、半径  $r$  の点の磁束密度  $B$  を求めよ。また、ケーブルの長さ  $l$ 、半径  $r = a$  から  $r = b$  で囲まれた長方形の断面を通る磁束  $\phi$  を求めよ。



(解) 対称性より半径  $r$  の同心円  $C$  の接線方向に同じ大きさの磁界  $H$  ができると考えられる。 $C$  で囲まれた全電流は  $I$  だから ( $I$  の正方向と  $C$  は右ねじ)、アンペアの周回積分の法則より

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = 2\pi r H = I \quad (H : \mathbf{H} \text{ の } \mathbf{t} \text{ 方向成分}) \quad \text{よって、磁界 } H \text{ は、} H = \frac{I}{2\pi r}$$

磁束密度  $B$  は

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (B : \mathbf{B} \text{ の } t \text{ 方向成分})$$

図(b)の長方形（ケーブル長  $l$ ，絶縁物の半径差  $(b-a)$ ）について  $B$  を集めると磁束  $\phi$  が求まる。  
 $dr$  部分の磁束は  $Bldr$  であり，これを  $a$  から  $b$  まで積分して，

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot t dS = \int_a^b Bldr = \int_a^b \frac{\mu I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu I l}{2\pi} [\log r]_a^b = \frac{\mu I l}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (5-30)$$

導体  $B$  の外側には磁界はできない。 $B$  の外側に同心円の積分路  $C$  を考えると，仮に磁界が存在するとしても軸対称と考えられ，その中の電流の和が  $0$  だからである。

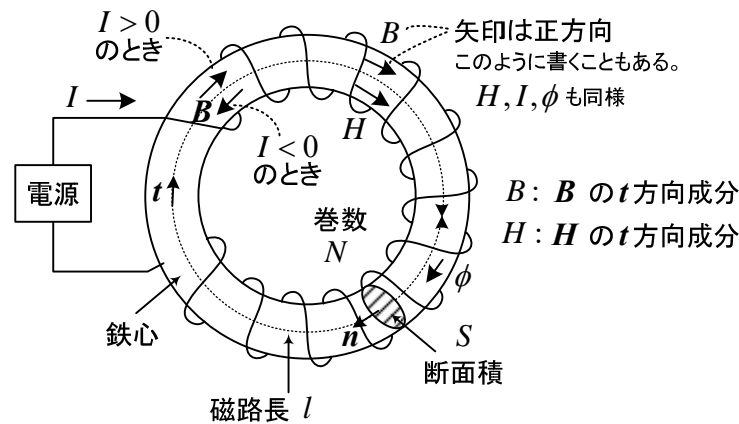
一般に，同軸ケーブルの自己インダクタンス  $L$ （1m 当り）は， $\phi$  を  $Il$  で割って，

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (5-31)$$

が用いられている。 $A$  や  $B$  自体にもインダクタンスがあるが一般に小さい。

## ○ 磁気回路

磁界  $H$  や磁束密度  $B$  はベクトルであり，場所によって向きや大きさが違うが，鉄心中の磁界や磁束密度が一樣で鉄心以外に漏れる磁束線（漏れ磁束とよばれる）はないと仮定すると例題 5 より以下の関係が成り立つ。なお，鉄心のヒステリシスは無視でき， $B = \mu H$  が成り立つとする。



$$\text{起磁力} \quad F = NI \quad [\text{A}] \quad (5-32)$$

$$\text{磁気抵抗} \quad R_m = \frac{l}{\mu S} \quad [\text{A/Wb}] \quad (5-33)$$

$$\text{磁束} \quad \phi = \frac{F}{R_m} = \frac{\mu SNI}{l} \quad [\text{Wb}] \quad (5-34)$$

$$\text{磁束密度} \quad B = \frac{\phi}{S} = \frac{\mu NI}{l} \quad [\text{T}] \quad (5-35)$$

$$\text{磁界} \quad H = \frac{NI}{l} \quad [\text{A/m}] \quad (H = \frac{B}{\mu}) \quad (5-36)$$

$$\text{磁気分極 } P_m = B - \mu_0 H = (\mu - \mu_0)H \text{ [T]} \quad (5-37)$$

$$\text{磁化 } M = \frac{P_m}{\mu_0} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)H \text{ [A/m]} \quad (5-38)$$

ここで、 $B, H, P_m, M$  はそれぞれ  $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{P}_m, \mathbf{M}$  の  $t$  方向成分である。磁束  $\phi$  の正方向は  $\mathbf{n}$  の向きである。これらの式は交流回路でも  $I(t)$  としてそのまま成立する。 $I < 0$  の場合、 $B < 0$  となるが、 $\mathbf{B}$  の  $t$  方向成分  $B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{t}$  が負になることを意味する。この例題では、 $\mathbf{H}, \mathbf{P}_m, \mathbf{M}$  は  $\mathbf{B}$  と同様に鉄心中で閉じた力線だから、(5-26)より  $\mu_0 \text{div} \mathbf{H} = \rho_m = 0$  となり、磁荷密度は 0 である。このため磁界  $\mathbf{H}$  は電流  $I$  だけで決まると考えられよう。

電気回路に対応させて磁束を計算する磁気回路(magnetic circuit)が考えられている。最も簡単な磁気回路を図 5-14 に示す。直流電気回路の各量は磁気回路の各量と表のように対応する。

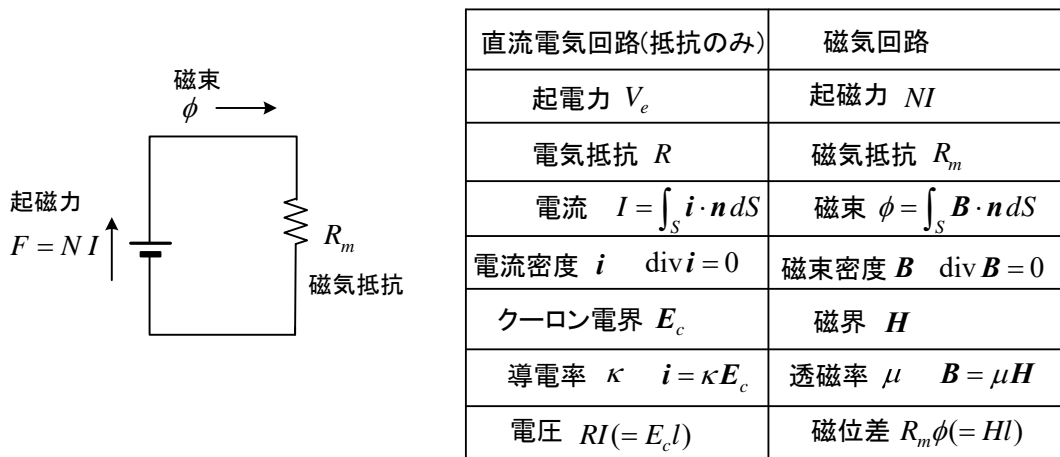


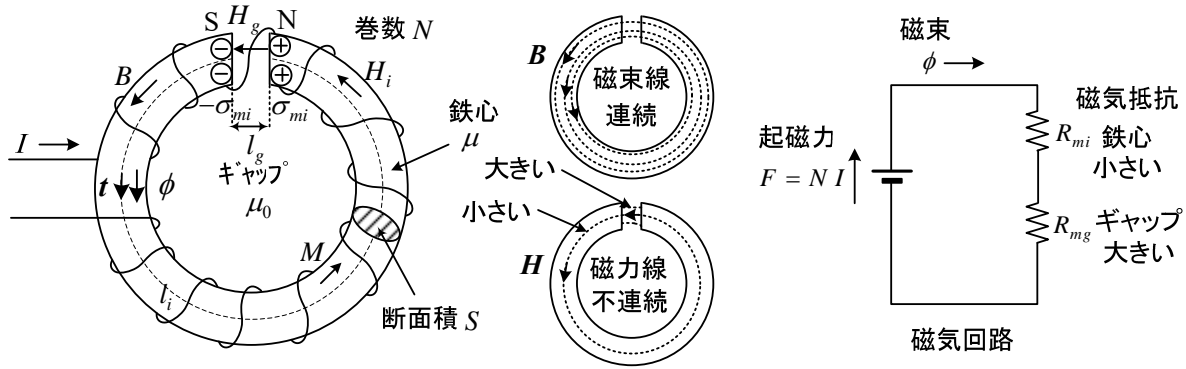
図 5-14 磁気回路

抵抗の電圧に相当する  $R_m \phi$  は(5-33), (5-34)より  $Hl$  になり、磁位差である。回路理論を適用するには、キルヒホッフの法則が成り立つ必要がある。電流則については、電流と磁束の対応から成り立つことがわかる。電圧則については、アンペアの周回積分の法則が次式のように対応する。

$$\sum V_{ei} = \int_C \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \quad \Leftrightarrow \quad \sum N_i I_i = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl \quad (5-39)$$

ただし、 $V_{ei}$  は起電力、 $\mathbf{E}_c$  の積分路  $C$  は抵抗だけで電源は含まない(電源を含むと 0 になる)。表中の起磁力  $NI$  は簡単な場合で、巻線が分かれている場合には閉路  $C$  と鎖交する全ての電流について計算しないといけない(起電力と同じように)。

**例題 7** 図に示すように電流  $I$  が流れるソレノイドの作る磁束密度  $\mathbf{B}$ 、磁束  $\phi$ 、磁界  $\mathbf{H}$ 、磁化  $\mathbf{M}$  を求めよ。ただし、鉄心やギャップ中で、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、磁界  $\mathbf{H}$  は一様と仮定する。また鉄心やギャップ部分での漏れ磁束は無視できるものとする。さらに、鉄心のヒステリシスは無視でき、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  が成り立つとする。これは一種の電磁石である。



(解) 図中の矢印は  $I, B, H_i, H_g, M$  および磁束  $\phi$  の正方向を示す。(5-4)のアンペアの周回積分の法則より次式を得る。 $l_i$ は磁路長,  $l_g$ はギャップ長である。

$$l_i H_i + l_g H_g = NI \quad (1)$$

磁束密度  $B$  は連続で, 鉄心中, ギャップ中で等しく, それぞれの透磁率を  $\mu, \mu_0$  とすると

$$l_i \frac{B}{\mu} + l_g \frac{B}{\mu_0} = NI \quad \therefore B = \frac{\mu_0 \mu NI}{\mu_0 l_i + \mu l_g} \quad (2)$$

$l_g$  が長いと  $B$  は小さくなる。磁束  $\phi$  は  $B$  が一樣と仮定しているのて, 次式より計算できる。

$$\phi = SB = \frac{NI}{R_{mi} + R_{mg}} \quad \text{ただし,} \quad R_{mi} = \frac{l_i}{\mu S}, \quad R_{mg} = \frac{l_g}{\mu_0 S} \quad (3)$$

$R_{mi}$  は鉄心の部分の磁気抵抗,  $R_{mg}$  はギャップの磁気抵抗を表す。この結果, 図に示す磁気回路で磁束を求めて良いことがわかる。 $R_{mi}\phi, R_{mg}\phi$  が電圧に相当する磁位差で, 磁界は次のようになる。

$$\text{鉄心中:} \quad H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{\mu_0 NI}{\mu_0 l_i + \mu l_g} \quad \text{ギャップ中:} \quad H_g = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu NI}{\mu_0 l_i + \mu l_g} \quad (4)$$

磁化は(5-17)より次のようになる。

$$\text{鉄心中:} \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H_i = \frac{(\mu - \mu_0) NI}{\mu_0 l_i + \mu l_g} \quad \text{ギャップ中:} \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H_g = 0 \quad (5)$$

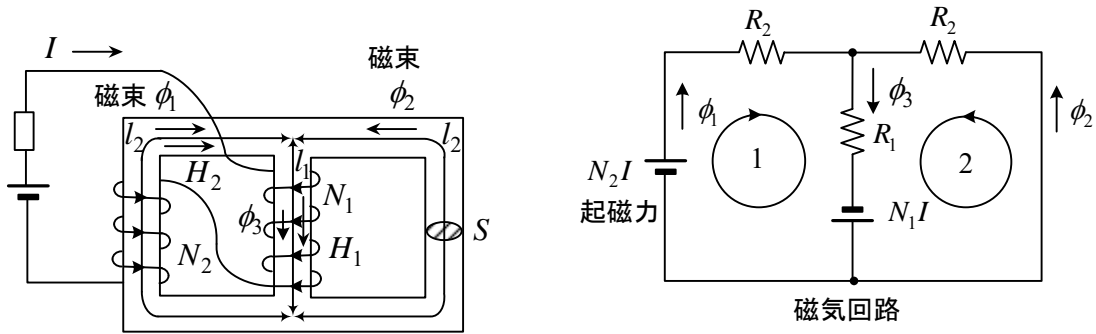
鉄心中では  $\mu / \mu_0 = 5000$  ぐらいなので, 鉄心中の磁界  $H_i$  は  $H_g$  に比べて非常に小さくなる。 $B$  はどこでも同じで,  $H + M$  に比例するから, 鉄心の磁化  $M$  がある分  $H$  は小さくなる。あるいは, 鉄心の両端に(5-26)の誘導磁荷  $\rho_{mi}$  (厳密には面磁荷密度  $\sigma_{mi}$ ) が生じて, ギャップ中では電流  $I$  が作る磁界を強め, 鉄心中では電流  $I$  が作る磁界を打ち消すためと解釈できよう。永久磁石ではないから  $\rho_{m0} = 0$  である。静電誘導の場合には, 導体の両端に電荷が生じて電界を完全に打ち消すが, 磁性体の場合にはそこまでいかない ( $\mu$  が非常に大きいなら  $H_i = 0$  である)。

面磁荷密度  $\sigma_{mi}$  を求めよう。(5-26)より  $\rho_{m0} = 0$  のとき  $\text{div} \mathbf{H} = \rho_{mi} / \mu_0$  であるから, 境界条件は, 電束密度の(2-64)と同様に考えて ( $\mathbf{n}$  は鉄心からギャップに向けた向き)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_g - \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_i = \sigma_{mi} / \mu_0 \quad \text{故に} \quad \sigma_{mi} = \mu_0 (H_g - H_i) = \mu_0 M \quad (6)$$

なお, 鉄心中は一樣な磁界であり磁荷密度は 0 となる。 $q_m = \sigma_{mi} S = \mu_0 M S = P_m S$  [Wb] は, この電磁石の両端に現れる磁荷で, 磁極ともよばれる。

例題 8 図のように断面積  $S$ ，透磁率  $\mu$  の一様な三脚鉄心がある。巻数  $N_1, N_2$  のコイルに電流  $I$  が流れているとき，磁気回路を用いて鉄心を通る磁束を求めよ。



(解) 鉄心の外に漏れる磁束がないとして，磁束についてはキルヒホッフの第 1 法則が成立つ。また周回積分の法則より任意の閉路で，キルヒホッフの第 2 法則が成立つ。これにより右図の磁気回路が得られる。矢印は各量の正方向を表す。

$$N_1 I + N_2 I = R_2 \phi_1 + R_1 (\phi_1 + \phi_2) \quad (1)$$

$$N_1 I = R_2 \phi_2 + R_1 (\phi_1 + \phi_2) \quad (2)$$

ここで，磁気抵抗は次式で与えられる。  $R_1 = \frac{l_1}{\mu S}$  ，  $R_2 = \frac{l_2}{\mu S}$

(1), (2)より，

$$\therefore \phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} N_1 + N_2 & R_1 \\ N_1 & R_1 + R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 & R_1 + R_2 \end{vmatrix}} I = \frac{(R_1 + R_2)N_2 + R_2 N_1}{2R_1 R_2 + R_2^2} I$$

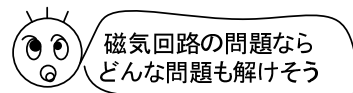
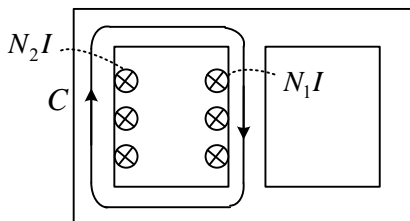
同様に

$$\phi_2 = \frac{R_2 N_1 - R_1 N_2}{2R_1 R_2 + R_2^2} I$$

従って，  $l_1$  を通る磁束  $\phi_3$  は  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 = \frac{2N_1 + N_2}{2R_1 + R_2} I$

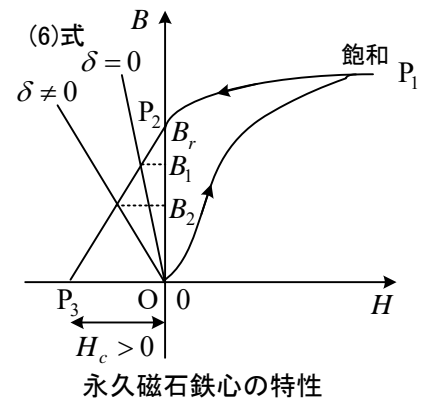
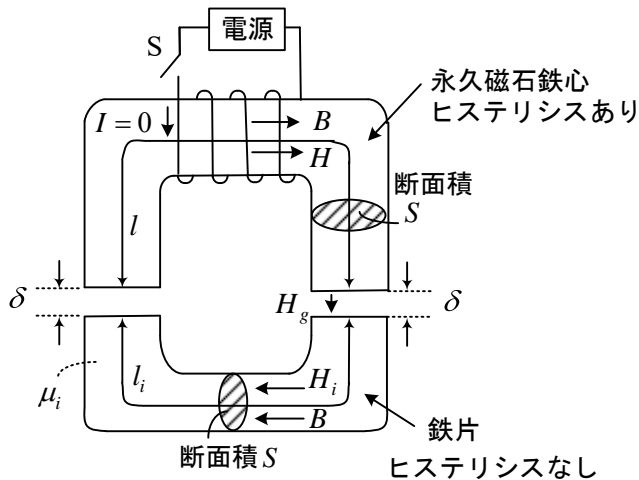
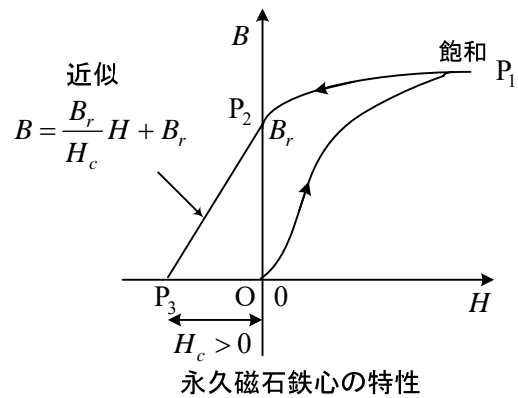
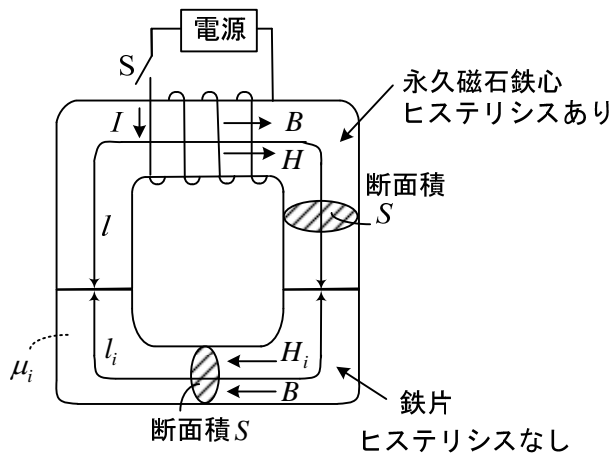
(注) (1)は  $N_1 I + N_2 I = H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{B_1 l_1}{\mu} + \frac{B_2 l_2}{\mu} = \frac{(\phi_1 + \phi_2) l_1}{\mu S} + \frac{\phi_1 l_2}{\mu S}$  に対応している。

閉路  $C$  に鎖交する電流は右ねじの関係のとき+である。



**例題 9** ヒステリシス特性を持った鉄心（永久磁石になれる）とヒステリシス特性を持たない鉄片（永久磁石にならない）を図のように接着させ、電流  $I$  を増やして磁界  $H$  を増加させ鉄心を飽和させる（鉄片を取り去った状態では電流  $I$  を大きくしても鉄心の  $H$  を大きくできないので飽和させることは困難であろう）。次に電流  $I$  を減少させて  $0$  にし、更に負にすると右図の  $BH$  特性が得られたとする。なお、簡単のため永久磁石鉄心の 2 象限の特性を図中の式で近似する。

- (1) 改めて電流  $I$  を増やして一度飽和させてから、 $I$  を減少させて  $0$  にし、電源のスイッチをオフする。この結果、永久磁石ができた。鉄片が接着した状態で永久磁石の磁束密度  $B_1$  を求めよ。ただし、鉄片の透磁率  $\mu_i$  は一定とする。
- (2) その後、図のように鉄片を  $\delta$  だけ離れたとき永久磁石の磁束密度  $B_2$  を求めよ。



(解) 問題(2)を解くと、問題(1)は  $\delta = 0$  として求まる。よって問題(2)を先に解く。アンペアの周回積分の法則で、伝導電流  $I = 0$  だから

$$\int_c \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad \therefore 0 = Hl + 2H_g\delta + H_i l_i \quad (1)$$

ここで、 $H, H_i, H_g$  は図の向きを正方向とする。

漏れ磁束を無視すると磁束  $\phi$  はどこも同じだから、断面積で割った磁束密度  $B$  も鉄心と鉄片で等しくなる。このとき

$$B = \mu_0 H_g \quad : \text{ギャップ} \quad (2)$$

$$B = \mu_i H_i \quad : \text{鉄片} \quad (3)$$

永久磁石については、ヒステリシス特性があり、(1)を満足するには、その第2象限( $H < 0$ )が使われることになる。図は簡単のため直線としており、次式で表される。

$$B = \frac{B_r}{H_c} H + B_r \quad (4)$$

(1), (2), (3), (4)より

$$B = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r}{H_c l} \left( \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_i}{\mu_i} \right)} = B_2 \quad , \quad B = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r}{H_c l} \frac{l_i}{\mu_i}} = B_1 \quad (\delta = 0) \quad (5)$$

が得られる。電流  $I$  が 0 でも  $H = 0$  とはならないことに注意しよう。

永久磁石の  $BH$  特性が曲線で与えられていたら、図的に求める。このとき、(1), (2), (3)より

$$\frac{H}{B} = - \left( \frac{2\delta}{\mu_0 l} + \frac{l_i}{\mu_i l} \right) \quad (6)$$

となる。この直線とヒステリシスループ（磁石の特性）の交点（動作点）を求める。すなわち、磁石が持つ特性と磁石が使われている磁気回路の両方を満たす点で  $B$  や  $H$  の値が決る。  $H < 0$  となることは図からも明らかである。このとき磁界  $H$  は図の矢印と逆の向きになる。

永久磁石に関していくつか注意点を述べておく。例えば、永久磁石をモータに利用する場合、モータの巻線に流れる電流が磁界を作るので、永久磁石の動作点が変わる。例えば図 5-15 の A 点で最初動作していたものが、 $H$  が増えた場合に元の  $BH$  曲線の上を通り Q 点に戻ることはなく、 $BH$  曲線の内側のマイナーループ上を動く。永久磁石の場合、ループは十分に細いため直線で近似し、リコイル線と呼ばれる。リコイル線は(5-22)のように書くことができる。またこのリコイル線に対応した比透磁率はリコイル比透磁率  $\mu_r$  と呼ばれる。 $\mu_r$  は、 $BH$  曲線上の動作点 A から  $H = 0$  の点 B までのマイナーループを直線で近似して  $\mu_r = \Delta B / (\mu_0 \Delta H)$  とする。理想的な場合、 $\mu_r = 1$  である。最も強い磁石であるネオジウム磁石の場合  $\mu_r = 1.05$  程度で、空気中と同じように考えて良いことを意味する。つまり、電流が作った起磁力に対して永久磁石は空気みたいに作用して、永久磁石は磁束密度  $B$  をほぼ一定に保つということである。例題 9 の場合も、(2)の後で再度鉄片を接着させても磁束密度は  $B_1$  にならない。

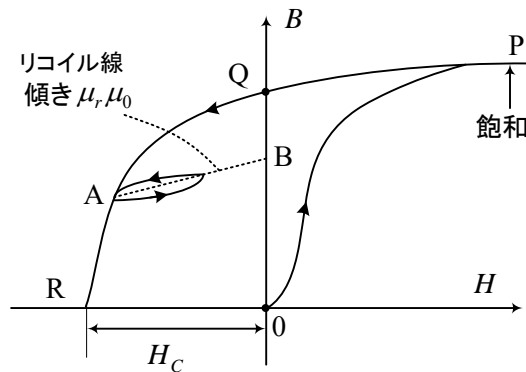


図 5-15 リコイル線



次に、図 5-16 に棒状の永久磁石が空気中にある場合、 $\mathbf{H}$  の磁力線と  $\mathbf{B}$  の磁束線を示す。図より、 $\mathbf{B}$  は連続であるが、 $\mathbf{H}$  は連続ではない。磁石の外は  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  なので両者の力線は同じようになる。永久磁石の中では  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  は成立せず、例題 9 にあるように、ヒステリシスの第 2 象限を考えないといけない。2 象限では、 $\mathbf{B} > 0, \mathbf{H} < 0$  であり、磁石の中で  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{H}$  が逆向きとなる。磁荷モデルで考えて、磁極 NS に正負の磁荷が生じていて、それが作る磁界が  $\mathbf{H}$  となると考えると直感的に分りやすい。(5-26)より磁荷を電荷と考えるとよい。磁荷は例題 11 で詳しく述べる。

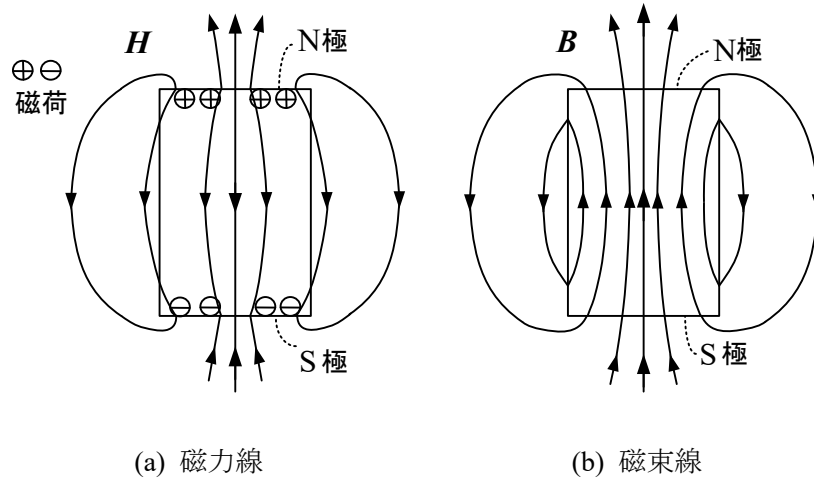


図 5-16 永久磁石

## ○ 磁位の応用

磁界  $\mathbf{H}$  の閉ループでの線積分が常に 0 であれば、電位のように磁位(magnetic potential)を考えることができる。電流が流れていない場所では、次式が成立する。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \phi_m \quad (5-40)$$

ここで、 $\phi_m$  は磁位とよばれる。磁位差は以下のように表される。このためには、アンペアの周回積分の法則より図 5-17 に示すように積分路が電流と鎖交しないように選ばないといけない。

$$\phi_{mBA} = \phi_{mB} - \phi_{mA} = -\int_A^B \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (5-41)$$

(5-22)より  $\text{div } \mathbf{B} = \text{div}(\mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0) = 0$  であるから、 $\mu$  が一定の領域では(5-27)より

$$\text{div}(\mu \mathbf{H}) = \rho_{m0} \quad \therefore \quad \text{div}(\text{grad } \phi_m) = \nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_{m0}}{\mu} \quad (5-42)$$

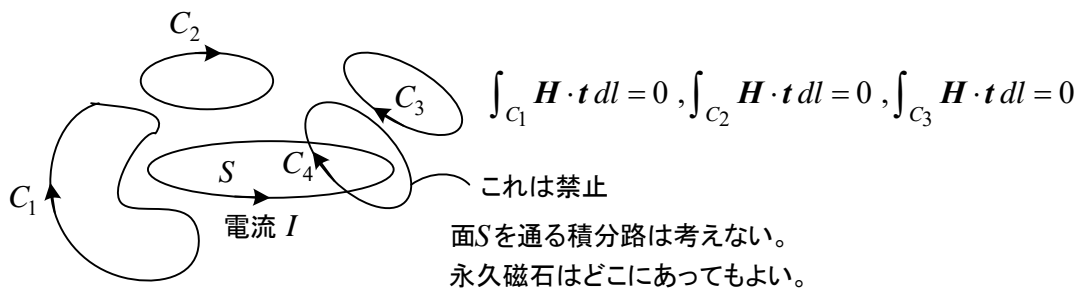


図 5-17 磁位を考えるとときの積分路

となりポアソンの方程式となる。永久磁荷密度  $\rho_{m0} = 0$  の領域はラプラスの方程式を満たす。

電気双極子の場合、空間が誘電率  $\epsilon$  の空間で満たされているときの電位は(4-28)より

$$V = \frac{M}{4\pi\epsilon r^2} \cos\theta$$

であった。また電界は(4-29)より次式で表された。

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{M}{2\pi\epsilon r^3} \cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{M}{4\pi\epsilon r^3} \sin\theta$$

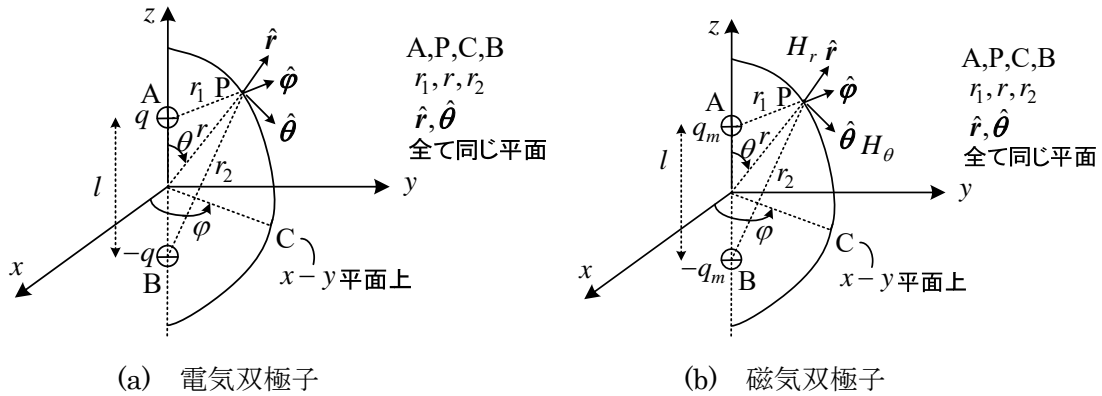


図 5-18 双極子

これに対して、細長い棒磁石には N 極と S 極があり、磁荷モデルでは両先端にそれぞれ正と負の永久磁荷があると考える。ただし、磁荷は必ず対で現れ、電荷のように単独で考えることはできない。点磁荷  $q_m, -q_m$  [Wb] からなる磁気双極子(magnetic dipole)を考えよう。磁荷を取り巻く空間の透磁率を  $\mu$  (一定) とする。

図 5-18(b)のように、 $l$  離れた  $z$  軸上の 2 点 A, B にそれぞれ  $q_m, -q_m$  ( $q_m > 0$ ) の点磁荷がある。 $l$  が  $r$  に比べて十分小さいとき、原点から  $r$  の距離にあり、角度  $\theta$  の点 P の磁位は、(4-19), (5-42) のポアソンの方程式を満足する電気双極子と磁気双極子の対応関係から、次式で与えられる。

$$\phi_m = \frac{M_m}{4\pi\mu r^2} \cos\theta \quad [\text{A}] \quad (5-43)$$

ここで、磁気双極子モーメント(magnetic dipole moment)は次式で与えられる。

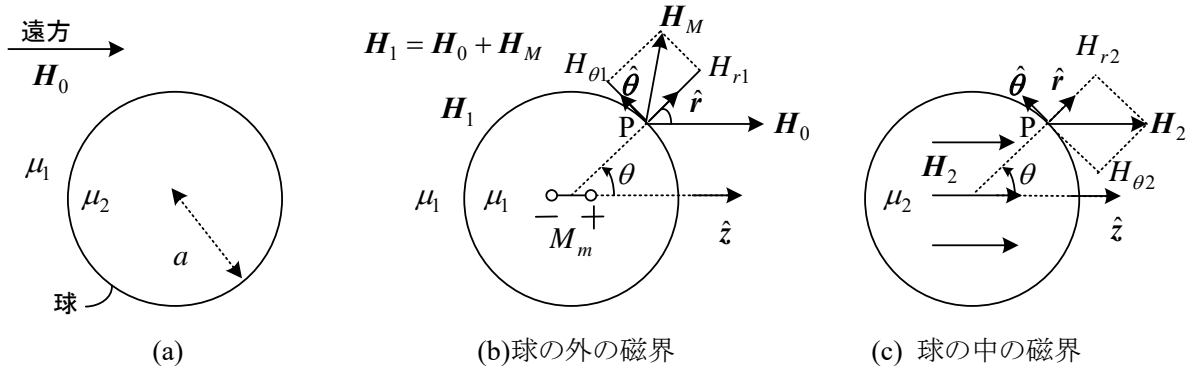
$$M_m = q_m l \quad [\text{Wbm}] \quad (5-44)$$

磁界は(5-40)より、(付 24)を用いて次式となる。

$$H_r = -\frac{\partial \phi_m}{\partial r} = \frac{M_m}{2\pi\mu r^3} \cos\theta \quad (5-45)$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = \frac{M_m}{4\pi\mu r^3} \sin\theta \quad (5-46)$$

**例題 10** 図(a)に示すように透磁率  $\mu_1$  の平等磁界  $\mathbf{H}_0$  の中に、透磁率  $\mu_2$ 、半径  $a$  の磁性体球(永久磁石ではない)を置いた。球の外の磁界  $\mathbf{H}_1$  と球の中の磁界  $\mathbf{H}_2$  を求めよ。



(解) 4章の例題12と全く同じ様に解析できる。球の外の磁界を考える場合には、平等磁界  $\mathbf{H}_0$  と球の中心に磁気双極子モーメント  $M_m$  の双極子を置いて全体を透磁率  $\mu_1$  とした場合の磁界との和と考え、球の中は透磁率  $\mu_2$  の平等磁界  $\mathbf{H}_2$  と仮定する。球の境界の点 P における境界条件を満足するように、 $M_m$  と  $\mathbf{H}_2$  を決めることができれば最初の仮定は正しいと考えられる。

(5-45), (5-46)の双極子が作る磁界より

$$H_{r1} = \frac{M_m}{2\pi\mu_1 r^3} \cos\theta, \quad H_{\theta1} = \frac{M_m}{4\pi\mu_1 r^3} \sin\theta$$

(2-58)で磁界の接線成分が等しいことから次式が成立しなければならない(面電流なし)。

$$-H_0 \sin\theta + \frac{M_m}{4\pi\mu_1 a^3} \sin\theta = -H_2 \sin\theta \quad (1)$$

(2-59)で磁束密度の垂直成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

$$\mu_1 H_0 \cos\theta + \frac{\mu_1 M_m}{2\pi\mu_1 a^3} \cos\theta = \mu_2 H_2 \cos\theta \quad (2)$$

ただし、 $H_0 = |\mathbf{H}_0|, H_2 = |\mathbf{H}_2|$  とおく。(1),(2)を解いて

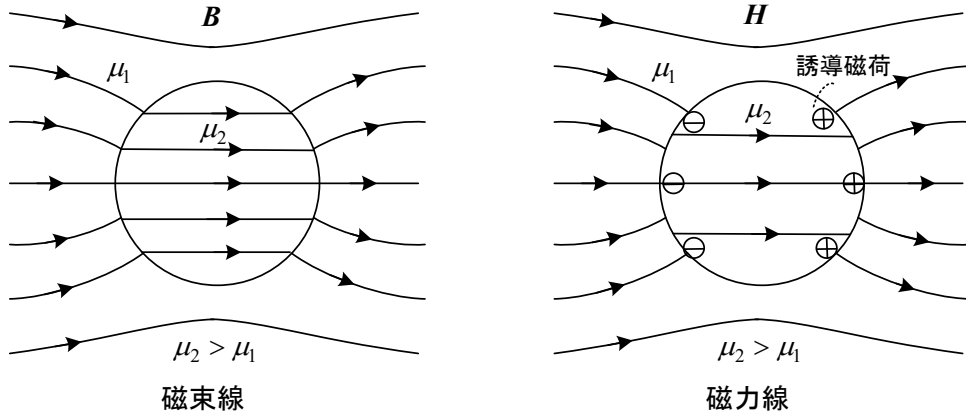
$$M_m = \frac{4\pi a^3 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2} H_0, \quad H_2 = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} H_0$$

よって、 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_M = (\hat{r} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta)H_0 + (2\hat{r} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta) \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} \frac{a^3}{r^3} H_0$

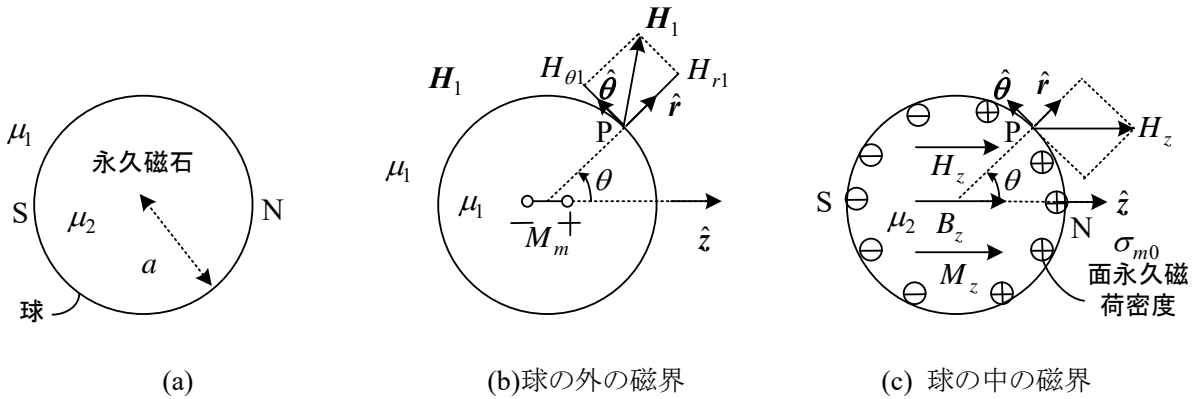
$$\mathbf{H}_2 = \hat{z} \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} H_0 = (\hat{r} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta) \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} H_0$$

$$\mathbf{B}_2 = \hat{z} \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_1 + \mu_2} H_0$$

$\mu_2 > \mu_1$  のとき、 $H_2 < H_0, B_2 > B_0$  となる。このときの磁束線と磁力線は次のようになる。球の断面図であることに注意しよう。透磁率  $\mu_1 = \mu_0$  の場合、図に示すように磁性体球表面の誘導磁荷  $\sigma_{mi}$  によって球内の磁界  $\mathbf{H}_2$  が弱くなると解釈できる。



例題 11 図(a)に示すように透磁率  $\mu_1$  の磁性体中に、半径  $a$  の永久磁石の球がある。球内の永久磁化は  $z$  方向で、 $M_z (> 0)$  である。磁束密度は  $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 + \mu_0 M_z \hat{\mathbf{z}}$  で表されるとする((5-22)参照)。球の内外の磁界と磁束密度を求めよ。また、磁荷密度を求めよ。



(解) 球の外の磁界を考える場合には、球の中心に磁気双極子モーメント  $M_m$  の双極子を置いて全体を透磁率  $\mu_1$  とした場合の磁界と考える。球の中の磁界  $\mathbf{H}_2$  は  $z$  成分  $H_z$  のみと仮定する。よって  $\mathbf{H}_2 = H_z \hat{\mathbf{z}}$  である。球の境界の点  $P$  における境界条件を満足するように、 $M_m$  と  $H_z$  を決めることができれば仮定は正しいと考えられる。永久磁荷密度は  $\rho_{m0} = -\mu_0 \text{div} \mathbf{M}_0 = -\mu_0 \text{div}(M_z \hat{\mathbf{z}}) = 0$  で、永久磁石の面永久磁荷密度  $\sigma_{m0}$  がある。この他に後述の境界面の面誘導磁荷密度  $\sigma_{mi}$  もある。

(5-45), (5-46)の双極子が作る磁界より

$$H_{r1} = \frac{M_m}{2\pi\mu_1 r^3} \cos \theta, \quad H_{\theta 1} = \frac{M_m}{4\pi\mu_1 r^3} \sin \theta$$

(2-58)で磁界  $\mathbf{H}$  の接線成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

$$\frac{M_m}{4\pi\mu_1 a^3} \sin \theta = -H_z \sin \theta \quad (1)$$

(2-59)で磁束密度の垂直成分が等しいことから次式が成立しなければならない。

$$\frac{\mu_1 M_m}{2\pi\mu_1 a^3} \cos \theta = (\mu_2 H_z + \mu_0 M_z) \cos \theta \quad (2)$$

(1),(2)を解いて

$$M_m = \frac{4\pi a^3 \mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} \mu_0 M_z, \quad H_z = -\frac{M_m}{4\pi \mu_1 a^3} = -\frac{\mu_0 M_z}{2\mu_1 + \mu_2}$$

$$B_z = \mu_2 H_z + \mu_0 M_z = \frac{2\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} \mu_0 M_z$$

磁界の  $z$  方向成分は  $H_z < 0$  であり,  $-\hat{z}$  の向きである。磁界と磁束密度は次式となる。

$$\mathbf{H}_1 = (2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \frac{1}{2\mu_1 + \mu_2} \frac{a^3}{r^3} \mu_0 M_z, \quad \mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 \quad (\text{球外}) \quad (3)$$

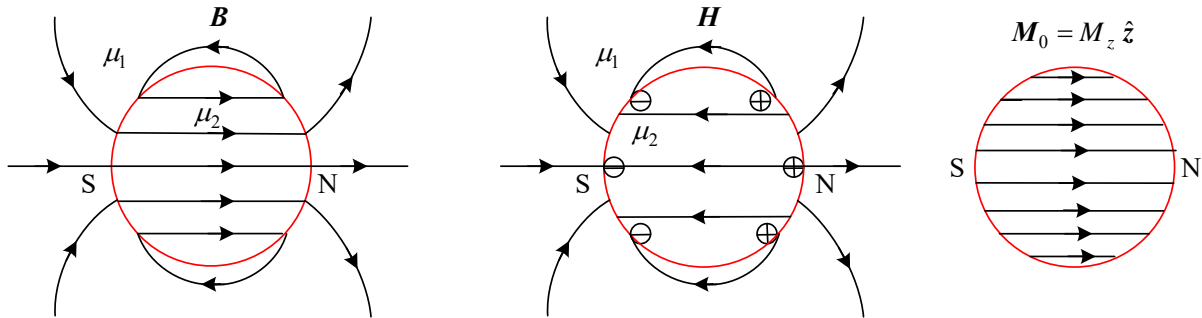
$$\mathbf{H}_2 = -\hat{z} \frac{1}{2\mu_1 + \mu_2} \mu_0 M_z = -(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \frac{\mu_0}{2\mu_1 + \mu_2} M_z \quad (\text{球内}) \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_2 = \hat{z} \frac{2\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} \mu_0 M_z = (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \frac{2\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} \mu_0 M_z \quad (\text{球内})$$

表面磁荷密度を  $\sigma_m = \sigma_{mi} + \sigma_{m0}$  とすると, 境界面で例題 7 と同様に考えて, (5-26) に適用し  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2 = \sigma_m / \mu_0$  ( $\mathbf{n}$  は磁石から外に向けた向き  $\hat{r}$ ) を得る。(3), (4) より

$$\sigma_m = \mu_0 (H_{r1} - H_{r2}) = \frac{3\mu_0^2 M_z}{2\mu_1 + \mu_2} \cos \theta$$

(5-27) より同様に考えて  $\sigma_{m0} = \mu_0 M_z \cos \theta$ ,  $\sigma_{mi} = \sigma_m - \sigma_{m0} < 0$  が得られる。(5-27) より  $\sigma_{mi}$  を求める場合には  $\chi$  が球の内外で異なることに注意。このときの磁束線と磁力線は次のようになる。



$$\text{球外 } \mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 \quad \text{球内 } \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 + \mu_0 \mathbf{M}_0$$

磁束線

磁力線

永久磁化の力線

(別解) この場合(5-42)のラプラスの方程式( $\rho_{m0} = 0$ )が成立する。永久磁石外部と内部の磁位をそれぞれ  $\phi_{m1}, \phi_{m2}$  とする。球面座標での解の中で, 磁位を以下のように仮定する<sup>(15)</sup>。

$$\phi_{m1} = \left(k_1 r + \frac{k_2}{r^2}\right) \cos \theta \quad (r > a)$$

$$\phi_{m2} = \left(k_3 r + \frac{k_4}{r^2}\right) \cos \theta \quad (0 < r < a)$$

$r \rightarrow \infty$  で,  $\mathbf{H} = -\text{grad} \phi_{m1}$  が 0 であるという条件より,  $k_1 = 0$  である。また  $r \rightarrow 0$  で,  $\phi_{m2}$  が有

界であるという条件より,  $k_4 = 0$  である。

$r = a$  の境界面において, 以下の境界条件を満足する必要がある。

$$(1) \phi_{m1} = \phi_{m2}$$

$$(2) B_{r1} = B_{r2}$$

(1)より,  $k_2/a^2 = k_3a \quad \therefore \phi_{m1} = \frac{k_3 a^3}{r^2} \cos \theta, \phi_{m2} = k_3 r \cos \theta$  となる。 $\mathbf{H} = -\text{grad} \phi_m$  より,

(付 24)を用いて

$$H_{r1} = -\frac{\partial \phi_{m1}}{\partial r} = 2 \frac{k_3 a^3}{r^3} \cos \theta, \quad H_{\theta 1} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial \theta} = \frac{k_3 a^3}{r^3} \sin \theta, \quad \mathbf{H}_1 = H_{r1} \hat{\mathbf{r}} + H_{\theta 1} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$H_{r2} = -\frac{\partial \phi_{m2}}{\partial r} = -k_3 \cos \theta, \quad H_{\theta 2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial \theta} = k_3 \sin \theta, \quad \mathbf{H}_2 = H_{r2} \hat{\mathbf{r}} + H_{\theta 2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(2)より,  $\mu_1 H_{r1} = \mu_2 H_{r2} + \mu_0 M_z \cos \theta$  だから,  $k_3 = \frac{\mu_0 M_z}{2\mu_1 + \mu_2}$  が得られる。これにより磁界が得られる。磁束密度は, 次式で計算でき, 同じ結果が得られる。

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 + \mu_0 M_z \hat{\mathbf{z}} = -\mu_2 k_3 \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mu_0 M_z \hat{\mathbf{z}}$$

## ○ ベクトルポテンシャルの応用

変位電流を無視し, 電流  $\mathbf{i}$  が強制電流  $\mathbf{i}_0$  のみとすると, (2-30)で,  $\kappa \mathbf{E} = \mathbf{0}, \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{0}$  だから, (2-32)は  $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu \mathbf{i}_0(\mathbf{r}, t) + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A})$  となる。この場合, 右辺で  $\text{grad}()$  の  $()$  の中を  $\mathbf{0}$  とおいた(2-34)のローレンツゲージは次式となる。

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{5-47}$$

この結果次式が得られる。表記の簡単のため  $\mathbf{i}_0$  を  $\mathbf{i}$  とおいている。

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \tag{5-48}$$

先に述べたように緩慢な変化であれば(5-2)は成立つので, 電流の時間変化があっても(5-48)も成立する。直角座標系の場合には, (5-48)を単純に成分に分けることができ

$$\nabla^2 A_x = -\mu i_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu i_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu i_z$$

となり, ポアソンの方程式となる。従って, (4-26)の電界の場合と同様に考えて

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{i_x}{r} dV, \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{i_y}{r} dV, \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{i_z}{r} dV \tag{5-49}$$

これらから次式が得られる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}}{r} dV \tag{5-50}$$

電流は空間に分布しており, それぞれが  $\mathbf{P}$  点にベクトルポテンシャルを作り, 全体の合計が  $\mathbf{A}$  である。 $\mathbf{r}$  は  $dV$  から  $\mathbf{P}$  点までのベクトルであり, 距離  $r = |\mathbf{r}|$  も  $dV$  点が変われば当然変化する。

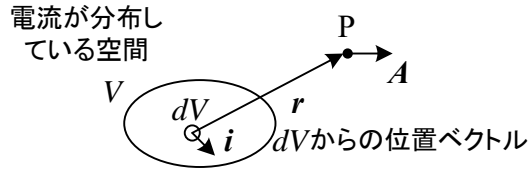


図 5-19 ベクトルポテンシャル

断面積  $S$  の細い導線に電流  $I$  が流れている場合には、図 5-20 より  $i dV = i t S dl = I t dl$  だから

$$A = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{t}{r} dl \quad (5-51)$$

$I t dl$  とそれが作るベクトルポテンシャル  $dA$  は同方向で、次式で表せる。

$$dA = \frac{\mu I t dl}{4\pi r} \quad (5-52)$$

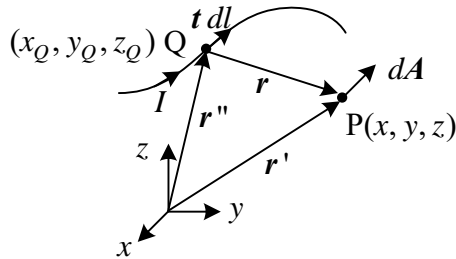


図 5-20 導線の電流が作るベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャルを使って、ビオ - サバールの法則を導こう。 図 5-20 の場合を考えよう。(5-51)より、rot の演算は、P 点の座標 (すなわち  $r'$ ) について行うので積分の中にいれて先に演算してもよいから、(2-25)の定義から

$$H = \frac{1}{\mu} \text{rot} A = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \left( \int_C \frac{t}{r} dl \right) = \frac{I}{4\pi} \int_C \text{rot} \left( \frac{t}{r} \right) dl$$

(付 6) より  $\text{rot}(f A) = (\text{grad } f) \times A + f(\text{rot} A)$  を用いて、

$$\text{rot} \left( \frac{t}{r} \right) = (\text{grad } \frac{1}{r}) \times t + \frac{1}{r} (\text{rot } t) = (\text{grad } \frac{1}{r}) \times t$$

$t$  は電流路で決まり、P 点の座標 (すなわち  $r'$ ) の関数ではないので、 $\text{rot } t = \mathbf{0}$  である。図より、

$$r = r' - r'' = (x - x_Q) \hat{x} + (y - y_Q) \hat{y} + (z - z_Q) \hat{z}$$

$$r = |r| = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}$$

だから、

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{1}{2r^3} \{ 2(x - x_Q) \hat{x} + 2(y - y_Q) \hat{y} + 2(z - z_Q) \hat{z} \} \\ &= -\frac{r}{r^3} \end{aligned} \quad (5-53)$$

$$\therefore \mathbf{H} = -\frac{I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{t} dl = \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \quad (5-54)$$

となる。微小電流要素  $I \mathbf{t} dl$  によって P 点に生じる磁界は

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \quad (5-55)$$

であり、これは(5-11)に示したビオ-サバルの法則である。ビオ-サバルの法則には  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  が含まれているが、周回積分の法則には  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  が含まれていないから、前者がより一般的である。

図 5-21 に示すように  $x$ - $y$  平面上にある長方形（中心は原点）の微小ループに電流  $I$  が流れているとき、中心から  $\mathbf{r}$  離れた透磁率  $\mu$  の空間にできるベクトルポテンシャルと磁界を求めよう。

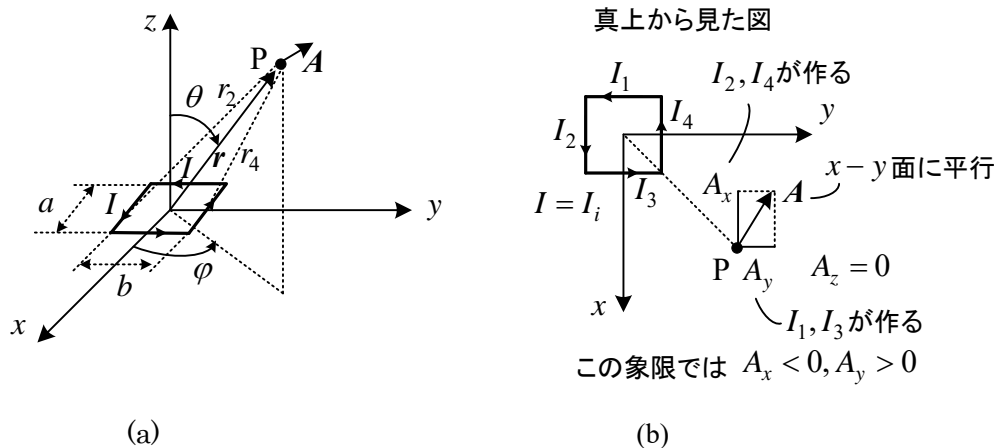


図 5-21 微小ループの電流が作るベクトルポテンシャル

電流  $I$  を辺ごとに  $I_1, I_2, I_3, I_4$  (全て  $I$  に等しい) と区別して考える。(5-52)よりベクトルポテンシャルは微小部分の電流の向きを向いていることがわかるので、P 点  $(x, y, z)$  のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の  $x$  成分  $A_x$  は  $I_2, I_4$  によって、 $y$  成分  $A_y$  は  $I_1, I_3$  によって作られると考えられる。 $a, b$  は(5-52)の微小長さ  $dl$  に対応し、 $I_2$  が作る  $A_x$  は正、 $I_4$  が作る  $A_x$  は負だから

$$A_x = \frac{\mu I a}{4\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \frac{\mu I a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + z^2}} - \frac{\mu I a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \frac{b}{2})^2 + z^2}}$$

ここで、 $r_2, r_4$  はそれぞれ  $I_2, I_4$  の辺の中心から P 点までの距離である。

この近似を行うにあたり、まず  $b^2$  の項を無視する。次に、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  より

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + by}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{by}{r^2}}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{by}{2r^2} \right)$$

を用いて

$$A_x \approx -\frac{\mu I a b y}{4\pi r^3}$$



となる。同様に,  $y$  成分  $A_y$  は  $I_1, I_3$  を考えて

$$A_y \approx \frac{\mu I a b x}{4\pi r^3}$$

$z$  成分  $A_z$  は, 電流の  $z$  成分がないので

$$A_z = 0$$

ここで, (5-15)より電流ループの磁気モーメントは次式で与えられる。

$$m = I a b = IS \text{ [Am}^2\text{]} \quad (5-56)$$

ベクトルポテンシャルはベクトル表示すると

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu m}{4\pi r^3} (-y \hat{x} + x \hat{y}) \\ &= \frac{\mu m}{4\pi r^3} (-r \sin \theta \sin \varphi \hat{x} + r \sin \theta \cos \varphi \hat{y}) \quad (\text{球座標系の公式より}) \\ &= \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r^2} (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) \\ &= \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (5-57)$$

従って, P 点の磁界は, 球面座標の rot 計算の公式(付 26)を用いて, 次式で表される。

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5-58)$$

すなわち,

$$B_r = \frac{\mu m}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{\mu m}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad B_\varphi = 0 \quad (5-59)$$

(5-59)の導出については,  $A_r = 0, A_\theta = 0, A_\varphi = \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r^2}$  より, 例えば,

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}$$

ここで,  $\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu m}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \right) = \frac{2\mu m}{4\pi r^2} \sin \theta \cos \theta$ ,  $\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = 0$  より求められる。

(注)  $\partial / \partial \theta$  のとき  $r$  は定数とみなす。 $r, \theta, \varphi$  がこの場合独立変数。

磁界は⑦より次式で求められる。

$$H_r = \frac{m \cos \theta}{2\pi r^3} = \frac{IS \cos \theta}{2\pi r^3}, \quad H_\theta = \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3} = \frac{IS \sin \theta}{4\pi r^3}, \quad H_\varphi = 0 \quad (5-60)$$

(5-45), (5-46)と(5-60)を比較すると,

$$M_m = q_m l = \mu m = \mu IS \text{ [Wbm]} \quad (5-61)$$

の場合, 磁荷モデルと電流モデルが等価であることが分かる。簡単のため図 5-21 の場合を考えたが, 図 5-22 の場合も磁気モーメント  $m = IS$  を使うと(5-60)と同じ結果が得られる。

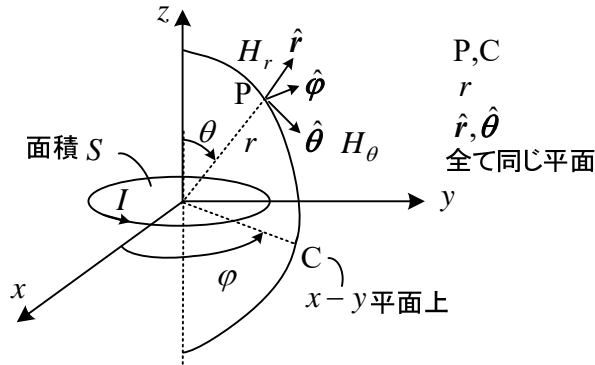


図 5-22 微小ループの円電流が作る磁界

図 5-22 の微小ループ電流が点 P に作る磁位  $\phi_m$  は、(5-61)を(5-43)に代入して、

$$\phi_m = \frac{M_m}{4\pi\mu r^2} \cos\theta = \frac{I}{4\pi} \frac{S}{r^2} \cos\theta = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (5-62)$$

と書ける。ここで、 $\Delta\Omega$ は微小面積  $S$  を点 P から見た立体角(solid angle)となっている。一般の電流ループの場合には、(5-62)は以下の式となる。

$$\phi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega \quad [\text{A}] \quad (5-63)$$

立体角について、図 5-23 で説明しよう。半径 1 の円の弧の長さで角度(ラジアン)を表す様に、半径 1 の球の面積で任意の面  $S$  (平面とは限らず周辺で決る) が点 P から見た立体角を表す。立体角の単位はステラジアン(steradian)で、半径 1 の球の表面積が  $4\pi$  だから最大値は  $4\pi$  である。

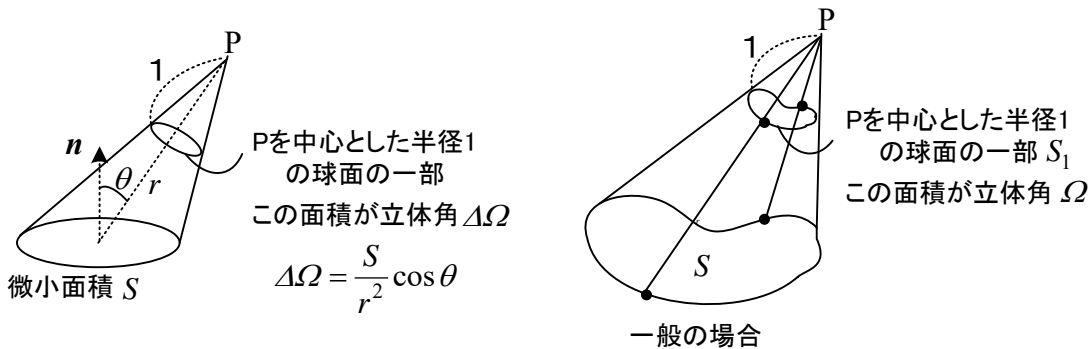


図 5-23 立体角

(5-62)から(5-63)の導出については、図 5-24 に示すように電流  $I$  が流れる微小面積の電流ループの重ね合わせから得られる。すなわち、

$$\phi_m = \sum_i \phi_{mi} = \sum_i \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega_i = \frac{I}{4\pi} \Omega \quad (5-64)$$

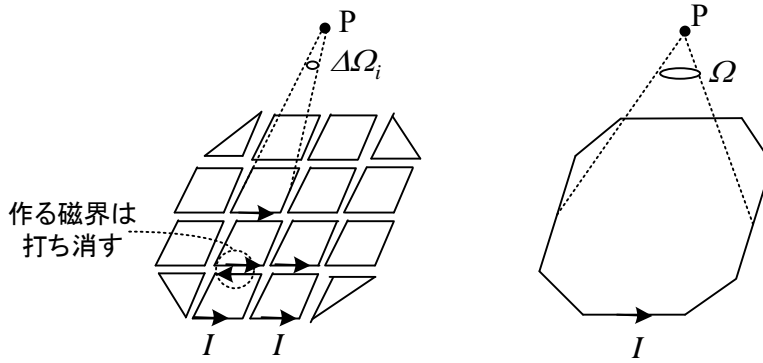


図 5-24 同じ磁界を作る等価電流

ベクトルポテンシャルで表した偏微分方程式を境界条件の下で解くことにより、例題 1 の問題を解いてみよう。多少複雑となるが物理的な直観力を必要としないことに意味がある。円柱座標系で考える。

ベクトルポテンシャルの定義  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  , および  $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i}$  ,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  より

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\mathbf{A}\right) = \mathbf{i} \quad \therefore \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \mu\mathbf{i} \quad (5-65)$$

電流は  $z$  方向のみであるから、(5-52)より、ベクトルポテンシャルも  $z$  成分のみで、対称性からベクトルポテンシャルは  $r$  のみの関数と考えられる。すなわち、

$$\mathbf{A} = A_z(r)\hat{\mathbf{z}} \quad (A_r = 0, A_\varphi = 0)$$

とする。(付 21)より、

$$\text{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right\}\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{付 21})$$

だから、 $\text{rot}\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}}$  で、もう一度(付 21)に代入して( $A_\varphi' = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}$  と置いてみる)

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

(5-65)の  $z$  成分に電流密度を代入して

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\frac{\mu_1 I}{\pi a^2} \quad (0 < r < a) \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = 0 \quad (a < r)$$

$A_z(r)$  は  $r$  のみの関数だから偏微分は常微分と考えてよく、上式は容易に解けて次式となる。

$$A_z = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} r^2 + k_1 \log r + k_2 \quad (0 < r < a)$$

$$A_z = k_3 \log r + k_4 \quad (a < r)$$

$r \rightarrow 0$  で  $A_z$  は有界でなければならないから、 $k_1 = 0$  である。ベクトルポテンシャルから磁束密度と磁界を求めると以下のようなになる。

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_1 I}{2\pi a^2} r \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a^2} r \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (0 < r < a)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \hat{\phi} = -\frac{k_3}{r} \hat{\phi}, \quad \mathbf{H} = -\frac{k_3}{\mu_2 r} \hat{\phi} \quad (a < r)$$

$r = a$  の境界条件より、磁界の接線成分が等しくなるから  $\frac{I}{2\pi a} = -k_3 \frac{1}{\mu_2 a} \therefore k_3 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (a < r)$$

以上、例題 1 と同じ結果が得られた。ベクトルポテンシャルが境界で連続である条件(2-70)から

$$k_2 = \frac{\mu_1 I}{4\pi} - \frac{\mu_2 I}{2\pi} \log a + k_4$$

が得られる。この式は磁束密度や磁界の境界条件からは得られない。よって次式が得られる<sup>(15)</sup>

$$\mathbf{A} = \left( -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} r^2 + \frac{\mu_1 I}{4\pi} - \frac{\mu_2 I}{2\pi} \log a + k_4 \right) \hat{z} \quad (0 < r < a)$$

$$\mathbf{A} = \left( -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \log r + k_4 \right) \hat{z} \quad (a < r)$$

$k_4 = 0$  とし、図 5-25 にベクトルポテンシャルの概略を示す。無限長の直線電流を仮定しているから  $r \rightarrow \infty$  でベクトルポテンシャルは無限大になる。 $k_4 = 0$  なら  $r = 1\text{m}$  で、 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  (基準) となる。基準は電磁界が 0 のところを選べばよいと思えるが、この場合は無限遠点にとれない。

(5-47)と(5-48)を用いても、全く同じ結果が得られる。このとき、円柱座標だから  $\nabla^2 \mathbf{A}$  は(付 23)から求め、(5-47)を使うと、

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = -\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{i}$$

となる。これは、(5-65)と同じである。一般に直角座標系以外では、 $\nabla^2 \mathbf{A}$  は簡単ではない。しかし、このケースのように円柱座標系で  $A_z$  のみの場合は例外で、(付 23)の  $z$  成分の公式が使える。

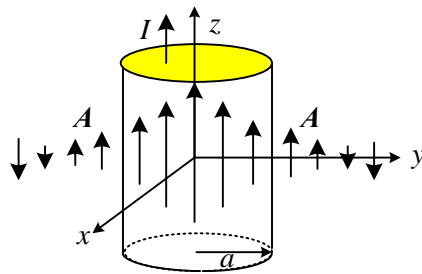
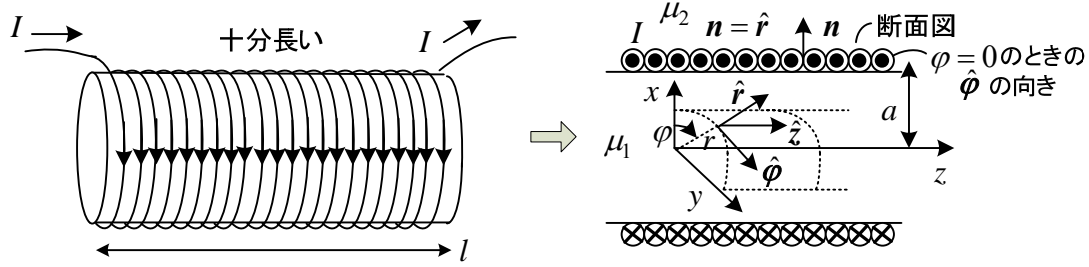


図 5-25 直線電流のベクトルポテンシャル

次に、図 5-7 のソレノイドについて同じように偏微分方程式を解いて解析しよう<sup>(15)</sup>。  
円柱座標系で考える。電流は  $\hat{\phi}$  方向のみであるから、(5-52)よりベクトルポテンシャルも  $\hat{\phi}$  成分のみで、対称性からベクトルポテンシャルは  $r$  のみの関数と考えられる。すなわち、



$$\mathbf{A} = A_\varphi(r)\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (A_r = 0, A_z = 0)$$

と仮定する。(付21)より,  $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\hat{\mathbf{z}}$  だから, もう一度(付21)に代入して

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right\} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

電流は  $r = a$  の境界条件として考えることにする。(5-65)より

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right\} = 0 \quad (0 < r < a), \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right\} = 0 \quad (a < r)$$

$A_\varphi(r)$  は  $r$  のみの関数だから偏微分は常微分と考えてよく, 上式は容易に解けて次式となる。

$$A_\varphi = \frac{1}{2}k_1 r + \frac{1}{r}k_2 \quad (0 < r < a), \quad A_\varphi = \frac{1}{2}k_3 r + \frac{1}{r}k_4 \quad (a < r)$$

$r \rightarrow 0$  で  $A_\varphi$  は有界でなければならないから,  $k_2 = 0$  である。ベクトルポテンシャルから磁束密度と磁界を求めると以下のようなになる。

$$\mathbf{B}_1 = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right\} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_1 r^2}{2} \right) \right\} \hat{\mathbf{z}} = k_1 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_1} k_1 \hat{\mathbf{z}} \quad (0 < r < a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_3 r^2}{2} + k_4 \right) \right\} \hat{\mathbf{z}} = k_3 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_2} k_3 \hat{\mathbf{z}} \quad (a < r)$$

$r = \infty$  のとき,  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  でなければならないから,  $k_3 = 0$  である。 $r = a$  の境界条件(2-58)より,  $n$  が 1m あたりの巻数で,  $I$  の正方向が  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  の向き,  $\mathbf{n}$  は媒質 1 から 2 の向きを考慮して

$$-\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = nI \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{単位長あたりの面電流密度 A/m}) \quad \therefore -\mathbf{n} \times \left( \frac{k_1}{\mu_1} \hat{\mathbf{z}} \right) = nI \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\therefore \frac{k_1}{\mu_1} \hat{\boldsymbol{\phi}} = nI \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \therefore k_1 = \mu_1 nI$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 nI \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{H}_1 = nI \hat{\mathbf{z}} \quad (0 < r < a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{0} \quad (a < r)$$

以上により, (5-10)と同じ結果が得られた。ベクトルポテンシャルが連続である境界条件(2-70)から

$$\frac{1}{2}k_1 a = \frac{k_4}{a} \quad \therefore k_4 = \frac{1}{2}\mu_1 n I a^2$$

が得られる。この式は、磁束密度や磁界の境界条件からは得られない。よって、

$$A = \frac{\mu_1 n I}{2} r \hat{\phi} \quad (0 < r < a) \quad , \quad A = \frac{\mu_1 n I}{2r} a^2 \hat{\phi} \quad (a < r)$$

図 5-26 にベクトルポテンシャルの概略を示す。

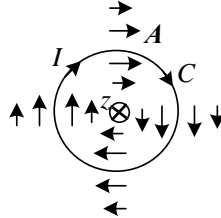


図 5-26 ソレノイドのベクトルポテンシャル (断面図)

閉曲線  $C$  を周辺とする任意の曲面を  $S$  とし、磁束  $\Phi$  を次式で定義した。

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いると、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  であるから

$$\Phi = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \tag{5-66}$$

ストークスの定理を用いると

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \tag{5-67}$$

このとき、閉曲線  $C$  の向きと、 $\mathbf{n}$  は右ねじの関係でなければならない。

図 5-26 の場合に閉曲線  $C$  をコイルの導線にとり  $\Phi$  を求めてみよう。磁束密度を用いる場合、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \int_S \mu_1 n I dS = \mu_1 n I \pi a^2$$

一方、ベクトルポテンシャルを用いると  $\mathbf{t} = \hat{\phi}$  だから

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \int_C \frac{\mu_1 n I a}{2} dl = \mu_1 n I \pi a^2$$

となり一致する。

長さ  $l$  の巻数を  $N$  とすれば、コイルのインダクタンス  $L$  は鎖交磁束  $N\Phi$  を用い次式で求まる。

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_1 \pi a^2 N^2}{l} \quad [\text{H}] \quad \because n = \frac{N}{l} \tag{5-68}$$

6章で詳しく述べる。コイルの半径  $a$  に比べて  $l$  が十分長くないとき  $L$  の値は(5-68)より小さくなる。空芯<sup>スッパ</sup>コイル (鉄心なし) の場合、詳細な計算結果は長岡係数  $k$  をかければ得られる。

$$L = k \frac{\mu_0 \pi a^2 N^2}{l} \quad [\text{H}] \tag{5-69}$$

$\mu_0$  は空気の透磁率である。  $2a/l = 1.0$  のとき、  $k = 0.688$  である<sup>(29)</sup>。

閉曲線  $C$  をコイルの外で、半径  $r = b (> a)$  の円周上にとった場合には、

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \frac{\mu_1 n I a^2}{2b} dl = \mu_1 n I \pi a^2$$

となり、 $r = a$  の場合と変わらない。鎖交する磁束は変わらないので当然の結果である。

## ○ エネルギーと力

磁界に関する力を求める方法として、**仮想変位の原理**と類似の**エネルギーの原理**による方法を説明する<sup>(7),(16)</sup>。

コイルを含んだ電気機械で時間  $\Delta t$  の間に面  $S$  が  $x$  の方向に  $\Delta x$  変化したとすると、この間に電源から供給されるエネルギーを  $\Delta W_e$ 、この間に变化した電磁エネルギーを  $\Delta W_m$  (変化の後の電磁エネルギー - 変化前の電磁エネルギー)、この間になされた機械的な仕事を  $\Delta W_x$  とするとき、エネルギーは保存されるから

$$\Delta W_e = \Delta W_m + \Delta W_x \tag{5-70}$$

が成立つ。 $\Delta$  は動作点からの微小変動を表す。

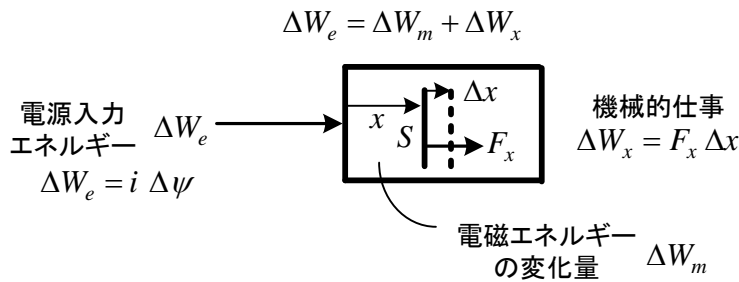


図 5-27 エネルギー保存

鎖交磁束  $\psi$  については(6-11), (6-12)で詳しく述べるが、 $\Delta W_e, \Delta W_x$  は次式で表される。

$$\Delta W_e = i v \Delta t = i \frac{\Delta \psi}{\Delta t} \Delta t = i \Delta \psi \tag{5-71}$$

$$\Delta W_x = F_x \Delta x \tag{5-72}$$

(5-71), (5-72)を(5-70)に代入して次式が得られる。

$$\Delta W_m = -F_x \Delta x + i \Delta \psi \tag{5-73}$$

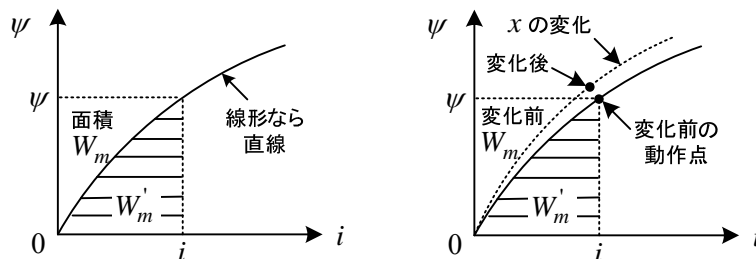


図 5-28 鎖交磁束と電流の関係

線形の磁気回路の場合には

$$\psi = L(x)i \quad (5-74)$$

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}L(x)i^2 = \frac{1}{2}\frac{\psi^2}{L(x)} \quad (5-75)$$

となる。インダクタンス  $L(x)$  は  $x$  の任意の関数でも線形である。

図 5-28 に示すように、 $i$  と  $\psi$  には関係があり、両方を独立変数にはできない。

(1)  $x$  と  $\psi$  を独立変数と考えた場合：

$W_m = W_m(x, \psi)$  として、(1-25)のテイラーの定理より

$$\Delta W_m = \frac{\partial W_m(x, \psi)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial W_m(x, \psi)}{\partial \psi} \Delta \psi \quad (5-76)$$

である。ここで、図 5-28 に示すように  $W_m(x, \psi) = \int_0^\psi i(x, \psi) d\psi$  より

$$\frac{\partial W_m(x, \psi)}{\partial \psi} = i(x, \psi) \quad (5-77)$$

となる。(5-75)からも確認できる。(5-77)を(5-76)に代入し、(5-73)と比べて、次式が得られる。

$$F_x = -\frac{\partial W_m(x, \psi)}{\partial x} \quad (5-78)$$

(2)  $x$  と  $i$  を独立変数と考えた場合：

図 5-28 より次式が成立つ。

$$W_m + W_m' = i\psi \quad (5-79)$$

よって、微小変化を考えると(5-73)より

$$\Delta W_m + \Delta W_m' = i \Delta \psi + \psi \Delta i \quad \therefore \Delta W_m - i \Delta \psi = \psi \Delta i - \Delta W_m' = -F_x \Delta x$$

従って、

$$\Delta W_m' = F_x \Delta x + \psi \Delta i \quad (5-80)$$

一方、テイラーの定理より  $x$  と  $i$  を独立変数と考えた場合

$$\Delta W_m'(x, i) = \frac{\partial W_m'(x, i)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial W_m'(x, i)}{\partial i} \Delta i \quad (5-81)$$

図 5-28 に示すように  $W_m'(x, i) = \int_0^i \psi(x, i) di$  より

$$\frac{\partial W_m'(x, i)}{\partial i} = \psi(x, i) \quad (5-82)$$

だから、(5-80)、(5-81)を比べて次式が得られる。

$$F_x = \frac{\partial W_m'(x, i)}{\partial x} \quad (5-83)$$



以上は非線形磁気回路の場合である。線形磁気回路では、 $W_m = W_m'$  だから

$$F_x = \frac{\partial W_m(x, i)}{\partial x} \quad (5-84)$$

が得られる。

電動機のように回転する場合には、力をトルク  $T$  [Nm] に、位置を角度  $\theta$  [rad] 変えることで同様に成立する。

線形の磁気回路の場合には

$$\psi = L(\theta) i \quad (5-85)$$

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} L(\theta) i^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L(\theta)} \quad (5-86)$$

となる。インダクタンス  $L(\theta)$  は  $\theta$  の任意の関数でも線形である。

線形磁気回路の場合、 $\theta$  が増える向きのトルク  $T$  は

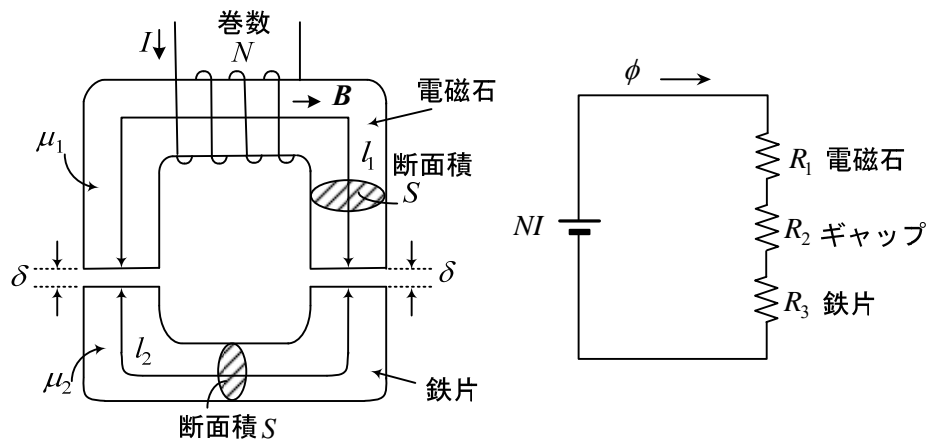
(1)  $\theta$  と  $\psi$  を独立変数と考えた場合：

$$T = -\frac{\partial W_m(\theta, \psi)}{\partial \theta} \quad (5-87)$$

(2)  $\theta$  と  $i$  を独立変数と考えた場合：

$$T = \frac{\partial W_m(\theta, i)}{\partial i} \quad (5-88)$$

**例題 12** 図のように透磁率  $\mu_1$  の電磁石が透磁率  $\mu_2$  の鉄片を吸引している。流れる電流が  $I$  で両方のギャップ長が  $\delta$  のとき、吸引する力を求めよ。ただし、漏れ磁束は無視する。



(解) 磁気抵抗は、

$$R_m = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{l_1}{\mu_1 S} + 2 \frac{\delta}{\mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S}$$

よって、磁束  $\phi$  は、

$$\phi = \frac{NI}{R_m}$$

であり、電磁石、ギャップ、鉄片の磁束密度  $B$  は、

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2}}$$

蓄えられる磁界のエネルギー  $W_m$  は、エネルギー密度  $\times$  体積より、ギャップは2箇所あるから

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} V = \frac{B^2}{\mu_0} S \delta + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_1} S l_1 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_2} S l_2$$

よって、 $\delta$  の増加する方向に働く力  $F$  は、鎖交磁束  $\psi = N\phi = NBS$  (よって磁束密度) と  $\delta$  を独立変数と考え(5-78)より次式で計算できる。第2,3項の偏微分は0となる。

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial \delta} = -\frac{B^2}{\mu_0} S \quad (5-89)$$

-がつくから、実際は  $\delta$  の減少する向きに働く。つまり吸引力である。

計算は複雑だが(5-84)より求めることもできる。

まず、 $W_m$  に  $B$  を代入して

$$W_m(\delta, I) = \left( \frac{S\delta}{\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{S l_1}{\mu_1} + \frac{1}{2} \frac{S l_2}{\mu_2} \right) \frac{(NI)^2}{\left( \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2} \right)^2} = \frac{S}{2} \frac{(NI)^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2\delta}{\mu_0} + \frac{l_2}{\mu_2}}$$

これより、

$$F_x = \frac{\partial W_m(\delta, I)}{\partial \delta}$$

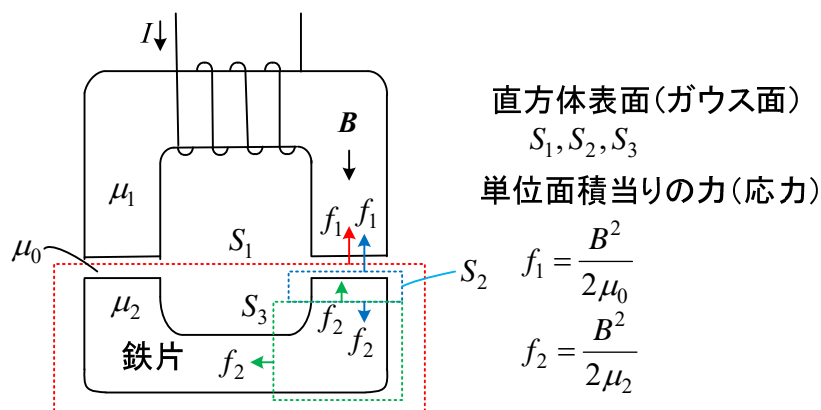
を計算すると(5-89)の結果と同じになる。

マクスウェルの応力から容易に求められる。ギャップと鉄片中以外  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  だから、その面の応力は0である。全体の力は下図のガウス面  $S_1$  に働く  $f_1$  に相当する (ギャップが2つで2倍)。

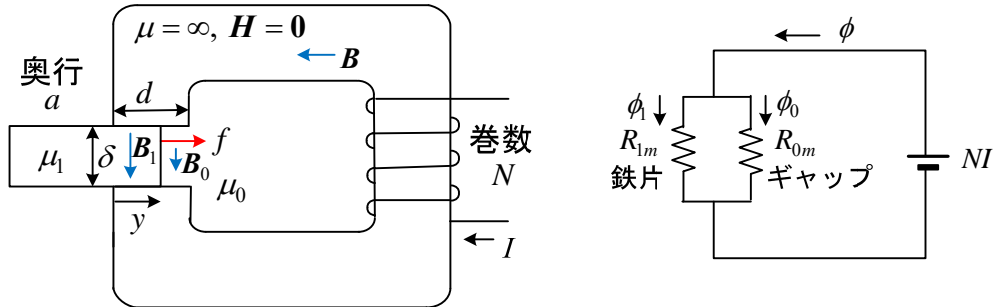
鉄片の上の面に働く力を誘電体の場合と同じようにマクスウェルの応力から求めた値は

$$F = 2 \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{B^2}{2} S = \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_0} \right) B^2 S$$

となる。これは、下図のガウス面  $S_2$  に働く力  $f_1 - f_2$  に相当する。しかし鉄片全体に働く力は幾つかに分割して加え合わせる必要がある。図の  $S_3$  を取ると、 $f_2$  の項は打ち消し鉄片を動かす力となることがわかる。このような説明は教科書に見られないようである。電磁石を永久磁石とした場合には、永久磁石の磁束密度を  $B$  とすれば、(5-89)は変わらない。



**例題 13** 図のように透磁率無限大の電磁石のギャップ中に透磁率  $\mu_1$  で直方体の鉄片を挿入する。電磁石と鉄片の奥行きは  $a$  とする。鉄片に働く力  $f$  を求めよ。ただし、磁束密度は電磁石、挿入した鉄片部分及びギャップ部分のみに存在するものとする。



(解) 磁気回路より磁束  $\phi_1, \phi_2$  は磁気抵抗を用いて以下のように求められる。

$$\phi_1 = \frac{NI}{R_{lm}} = NI \frac{\mu_1 a y}{\delta}, \quad \phi_0 = \frac{NI}{R_{0m}} = NI \frac{\mu_0 a (d - y)}{\delta}$$

よって、鉄片、ギャップの磁束密度  $B_1, B_0$  及び磁界  $H_1, H_0$  はそれぞれ、

$$B_1 = \frac{\phi_1}{a y} = \frac{\mu_1 N I}{\delta}, \quad B_0 = \frac{\phi_0}{a (d - y)} = \frac{\mu_0 N I}{\delta}, \quad H_1 = H_0 = \frac{N I}{\delta}$$

蓄えられる磁界のエネルギー  $W_m$  は、エネルギー密度  $\times$  体積より

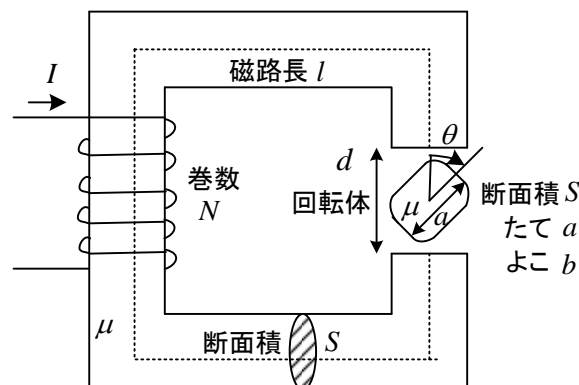
$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} V = \frac{1}{2} \left( \frac{N I}{\delta} \right)^2 (\mu_1 \delta y a + \mu_0 \delta (d - y) a)$$

よって、 $y$  の増加する方向に働く力  $f$  は、

$$f = \frac{\partial W_m(y, I)}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{N I}{\delta} \right)^2 \delta a (\mu_1 - \mu_0) = \left( \frac{1}{2} H_1 B_1 - \frac{1}{2} H_0 B_0 \right) \delta a$$

この問題は、コンデンサの例題 22 と類似している。マクスウェルの応力を用いる場合には、厳密な磁界解析を必要とするだろう。

**例題 14** 図のように透磁率  $\mu$  の回転体が角度  $\theta$  の方向を向いているとき、この回転体に働くトルクを求めよ。



(解)  $\theta = 0$  のとき、磁気抵抗は最小となり

$$R_{\min} = \frac{l+a}{\mu S} + \frac{d-a}{\mu_0 S}$$

$\theta = \pi/2$  のとき，磁気抵抗は最大となり

$$R_{\max} = \frac{l+b}{\mu S} + \frac{d-b}{\mu_0 S}$$

角度  $\theta$  のときの磁気抵抗  $R_m$  は，これらの間で変化するが，その逆数  $P_m$  が次式と仮定する。

$$P_m = 1/R_m = P_2 \cos 2\theta + P_1$$

$$\text{ただし, } P_1 + P_2 = \frac{1}{R_{\min}}, P_1 - P_2 = \frac{1}{R_{\max}}$$

よって，コイルの磁束  $\phi = P_m NI$  より鎖交磁束は

$$\psi = N\phi = (P_2 \cos 2\theta + P_1) N^2 I = LI$$

電磁エネルギー  $W_m$  は

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} (P_2 \cos 2\theta + P_1) N^2 I^2$$

$\theta$  が増える向きのトルク  $T$  は(5-88)より

$$T = \frac{\partial W_m(\theta, I)}{\partial \theta} = -P_2 N^2 I^2 \sin 2\theta$$

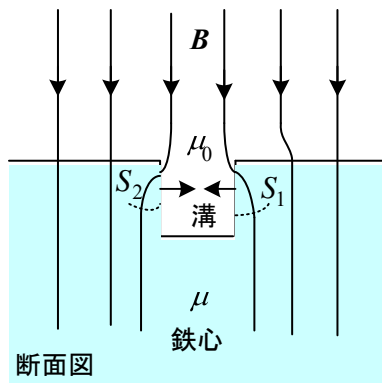
となる。(5-87)より求めることもできる。まず，電磁エネルギー  $W_m(\theta, \psi)$  を求める。

$$W_m(\theta, \psi) = \frac{\psi^2}{2N^2} \frac{1}{P_2 \cos 2\theta + P_1}$$

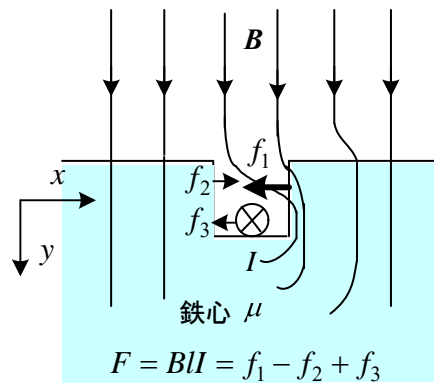
よって， $T = -\frac{\partial W_m(\theta, \psi)}{\partial \theta} = -P_2 N^2 I^2 \sin 2\theta$  となり，同じ結果が得られる。

電流を交流にし，さらにその位相を  $\theta$  に対して調整することで平均トルクが得られる。これはリラクタンスモータとして利用されている。

**例題 15** 図のように磁束密度  $B$  の外部磁界中で鉄心の中に埋め込んでいる長さ  $l$  の導線に電流  $I$  が流れているとき，導線に働く力は  $F = BIl$  ではない。この理由を説明せよ。



(a) 導線がないとき



(b) 電流  $I$  が流れているとき

(解) (a)の導線がない場合（あるいは電流が0の場合）、鉄心の透磁率 $\mu$ は空気中の透磁率 $\mu_0$ に比べてかなり大きいので、磁束線は図のようになって溝のy軸方向の磁束密度は小さい値となる。(b)のように電流を流すと、電流による磁束線が加わるので、溝の右側の鉄心の壁面 $S_1$ にはx軸方向の磁束密度 $B_x$ が大きくなり、逆に左側の壁面 $S_2$ では小さくなる。鉄心表面 $S_1$ に働くx軸方向の力 $f_1$ は、鉄心表面 $S_2$ に働くx軸方向の力 $f_2$ に比べて大きな値となる。導線を通るy軸方向の磁束密度 $B_y$ は小さいので $f_3 = B_y I l$ は小さい値になる。詳しい計算によると、導体に働く力と鉄心に働く力を加えると、図中に示すように、なんと $B I l$ となる<sup>(7),(24)</sup>。モータが回る力は主に鉄心に働いており、これを鉄心トルクという。ただ、力の計算は電流 $I$ が作る磁界を考えることなくフレミングの左手の法則で求めてよい。(a)の場合も鉄心に力は働いているが、打ち消す。

最後に永久磁石に働く力について述べよう。細長い2本の棒磁石の磁極については磁気クーロンの法則が成り立つ。異なる極どうしは引力、同じ極どうしは反発力が働き電荷の場合と同じだからわかりやすい。図5-29に示すように外部磁界 $H_0$ の真空中で円柱状の永久磁石の永久磁荷(磁極) $q_{m0}$  [Wb]が受ける力 $F$  [N]は次式で与えられる(誘導磁荷は無視する)。

$$F = q_{m0} H_0 \quad (5-90)$$

これは高校の教科書にもよく見られ、電界が電荷に及ぼす力と同じ形だから分かりやすい。

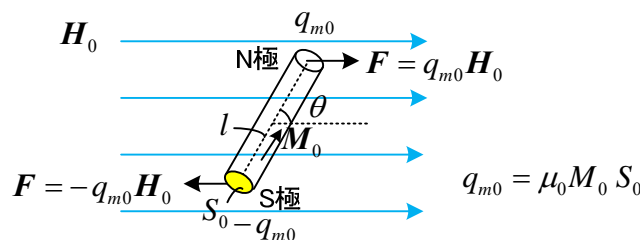


図 5-29 永久磁石が受ける力

この結果、磁石に右回りのトルク(モーメント) $N = q_{m0} l H_0 \sin \theta$  [Nm]が実際に働き、(5-90)によりうまく説明できる。磁荷は電荷のように実在しないが、(5-27)で数学的に定義した。空間の磁界 $H$ は、外部磁界 $H_0$ と磁石が作る磁界の和である。

これまで述べた第2章の理論を使って(5-90)やトルクを説明したいが、そう簡単ではないようだ。ここでは今井の解説<sup>(19)</sup>を簡単に紹介する。

図5-30に示すように、一様な外部磁界 $H_0$ 中に伝導電流が流れ永久磁化をもつ孤立した物体 $B$ がある。静磁界を考え $\text{rot } H = i$ とする。物体 $B$ の $B, H$ には、次の(5-22)の関係があった。

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M$$

物体 $B$ の外では、永久磁化はなく $B = \mu_1 H$ が成立し、伝導電流は流れていないとする。マクスウェルの応力テンソルを用いて力を求めよう。(2-46), (2-51)より、静磁界で時間変化を考えないので

$$F = \int_S (T_x \cdot n, T_y \cdot n, T_z \cdot n) dS \quad (S \text{ は } B \text{ の外だから } \mu_1 \text{ でよい})$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_1 \int_S \left( (H_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) n_x + H_x H_y n_y + H_x H_z n_z, H_y H_x n_x + (H_y^2 - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) n_y + H_y H_z n_z, \right. \\
&\quad \left. H_z H_x n_x + H_z H_y n_y + (H_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) n_z \right) dS \\
&= \mu_1 \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x} (H_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \frac{\partial (H_x H_y)}{\partial y} + \frac{\partial (H_x H_z)}{\partial z}, \frac{\partial (H_y H_x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (H_y^2 - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \frac{\partial (H_y H_z)}{\partial z}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial (H_z H_x)}{\partial x} + \frac{\partial (H_z H_y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (H_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \right) dV
\end{aligned}$$

(ガウスの定理より面積分を体積分に直したとき、閉曲面内の磁界全てが対象になる)

$$\begin{aligned}
&= \mu_1 \int_V (H_x \operatorname{div} \mathbf{H} + (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H})_x, H_y \operatorname{div} \mathbf{H} + (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H})_y, H_z \operatorname{div} \mathbf{H} + (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H})_z) dV \\
&= \mu_1 \int_V ((\operatorname{div} \mathbf{H}) \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}) dV
\end{aligned}$$

物体 B の外では(5-26)より  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}$  であり、物体 B の中では(5-26)より  $\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_m, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$  だから

$$\mathbf{F} = \mu_1 \int_B \left( \frac{\rho_m}{\mu_0} \mathbf{H} + \mathbf{i} \times \mathbf{H} \right) dV \quad (5-91)$$

磁界  $\mathbf{H}$  は、一様な外部磁界  $\mathbf{H}_0$  ( $\mathbf{B}_0 = \mu_1 \mathbf{H}_0$ ) と物体 B が作る磁界の和であるが、自己力は工学的には無視できるから

$$\mathbf{F} = \int_B \left( \frac{\mu_1 \rho_m}{\mu_0} \mathbf{H}_0 + \mathbf{i} \times \mathbf{B}_0 \right) dV = \frac{\mu_1}{\mu_0} \mathbf{H}_0 \int_B \rho_m dV + \int_B \mathbf{i} dV \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \quad (5-92)$$

となる。 $\rho_m$ の全体積分は0だから、磁荷に働く並進力は0である。また、 $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$ だから、電流の体積分も0となる<sup>(15)</sup>。しかし、トルクは0ではない。物体 B 内に原点をとり、それからの位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とする。原点についてのトルク  $\mathbf{N}$  [Nm] は次式で与えられる。

$$\mathbf{N} = \int_B \mathbf{r} \times \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \rho_m \mathbf{H}_0 + \mathbf{i} \times \mathbf{B}_0 \right) dV \quad (5-93)$$

(5-93)は面磁荷、面電流の面積分も含むとする。 $\mathbf{N}$ は回転しようとする軸の向きを向くが、 $\mathbf{N}$ の大きさと力の向きが大切だろう。真空中では  $\mu_1 = \mu_0$  である。これは(5-90)で力を計算してトルクを求めてよいことを意味する。また、電流に働くトルクについても明確にできた。

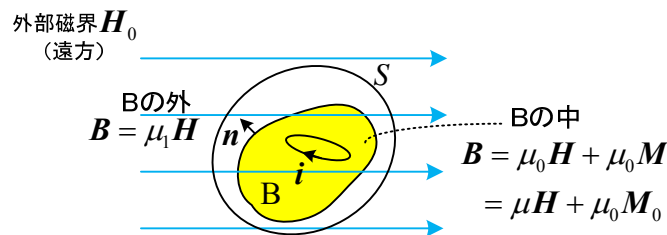


図 5-30 孤立物体 B

# 第6章 コイルⅡ

この章では、磁界の時間変化により電界が生じる**電磁誘導の法則**を中心に述べる。まず、自己誘導と相互誘導について述べる。次に導線が磁界中を動く場合に生じる起電力に関して解説する。また電気回路のキルヒホッフの法則を電磁気学の立場で明確にする。最後に表皮効果とうず電流を解析する。本章では(2-74)～(2-77)に示した磁界系の緩慢に変化する現象を解析する。

○ でんじゆうどう 電磁誘導の法則(law of electromagnetic induction)

“電気を発生させてください”と言われたら、“そんなことは自分にはできない”と言う人がほとんどだろう。しかし、実は以外に簡単に電気を作れる。磁石と電線を準備し、電線をぐるぐる巻いてコイルを作り、そのコイルに磁石を素早く近づけるだけでよい。立派にコイルに電気(起電力)が発生する。

図 6-1 に示すように、磁石を近づけたり遠ざけたりすると磁束密度  $B$  がコイルの中で変化し、コイルに**誘導起電力**(electromotive force 略 emf)が発生する。これは、ファラデーにより発見され、**電磁誘導の法則**とよばれる。なお、コイルの中の  $B$  が変化しないといけないので、磁石を静止させた状態では誘導起電力を生じない。誘導起電力  $e$  [V] は、コイルを貫く**磁束  $\phi$**  [Wb] の時間変化とコイルの巻数  $N$  に比例する。④より誘導起電力を(簡単のため  $e = V_e$  の記号使用)

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} \tag{6-1}$$

で表わすことが多い。ただ、(6-1)だけでは曖昧である。(6-1)は、誘導起電力  $e$  の矢印(測定の向き、あいまい 正の向き)を磁束  $\phi$  の矢印と右ねじの関係に選んだときの式である。すなわち  $\phi$  の矢印に対し、右ねじの回る向きにコイルの導線に  $e$  の矢印をとる( $e$  の測定の向きを逆に選べば-は不要)。図 6-1 のように開放した端子の場合、(6-1)の  $e$  は、コイル端子での電圧  $v$  (磁束  $\phi$  の向きに進むねじの回る向きにコイルをなぞり、その出口に矢を向ける) と等しくなる ( $e = v$ 、後で詳述する)。  $v'$  の様に  $v$  と逆向きに電圧の矢印を定義すると  $v' = -v$  で  $v' = Nd\phi/dt$  となる。図 6-1 では、(a)の場合磁束が増えるので  $d\phi/dt > 0 \therefore e = v < 0$ 、(b)の場合磁束が減るので  $d\phi/dt < 0 \therefore e = v > 0$  となる。矢印を用い、電圧は矢の先端の電位から矢の根の電位を引いた値であることは3章で述べた。(筒は巻き方が判るように書いた。)

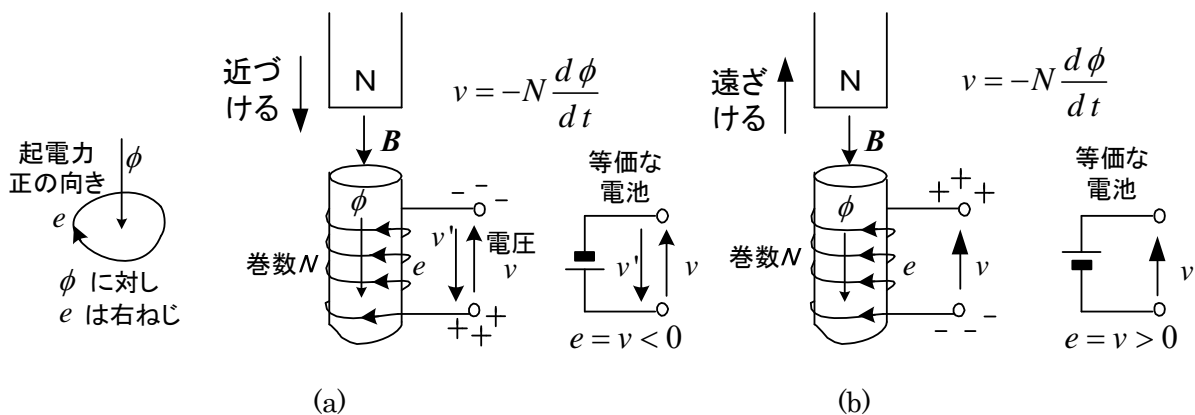


図 6-1 電磁誘導の法則

起電力は等価な電池として図 6-1 のように考えるとわかり易い。等価な電池の負極から正極に向けた向きを実際の誘導起電力の向きとすることがある。これは流そうとする電流の向きだが、都合良く正となる電池の電圧の矢印の向きと一致する。実際のをつけないで単に“起電力の向き”ということもあり、“起電力  $e$  の正の向き”と混同しやすい。起電力  $e$  の正の向きは  $e$  の矢印の向きである。(a)の場合  $e$  と反対向きが、(b)の場合は  $e$  の向きが実際の起電力の向きである。

**矢印の注意：**ベクトル場  $\mathbf{B}$  などを表す場合の矢印は実際の向きで測定の向き（正方向）という考え方はない。これに対し、 $e, v, \phi, v', i$  の矢印は、測定の向きを表す。 $e, v, \phi, v', i$  は線積分や面積分で定義され、そのときの接線ベクトル  $\mathbf{t}$  や法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の向きが測定の向きである( $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  は 2 通りのうちのいずれかであり、自分で選ぶ)。これが曖昧だと符号がはっきりしない。

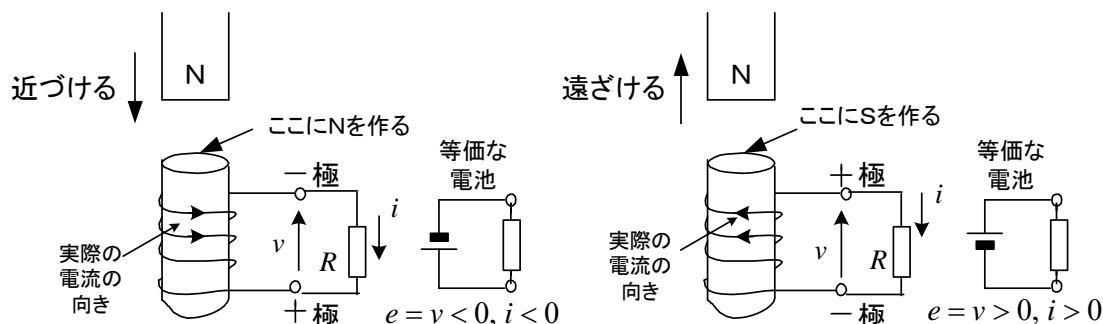


図 6-2 電磁誘導の法則 ( $e = v$  はコイルの内部抵抗無視の場合,  $v = Ri$ )

図 6-2 に示すように、コイルの端子に抵抗をつなぎ磁石を近づけたり遠ざけたりすると、電流（誘導電流）が流れる。誘導電流の向きは、誘導電流による磁界が、磁石による磁界の変化を妨げる向きである。これをレンツの法則(Lenz's law)という。図 6-1 で説明したように電流が流れなくても誘導起電力や電圧は生じているが、その極性をレンツの法則から求めることも可能である。このときも、コイルを図 6-2 に示すように電池に対応させるとわかり易い。コイルには、一極から + 極に電流が流れていることに注意しよう。抵抗をつないだ場合にも(6-1)は成り立つが、磁束  $\phi$  としては、磁石が作る磁束の他に、流れる電流による磁束（後述の自己誘導参照）も加えたものでなくてはならない。大学受験問題では問題が難しくなるので無視されることもあるが、電流が急変するときには、この項の影響は大きい。

電流が流れると(6-1)の誘導起電力  $e$  と図 6-2 の端子電圧  $v$  は一般に一致しない。これはコイルを作る電線の抵抗（内部抵抗(internal resistance)とよぶ）があるためで、第 3 章で説明した電池の場合と同じである。しかし、コイルの内部抵抗を 0 とすると  $e = v$  である。すなわち、コイルの内部抵抗が無視できるなら、たとえ電流が流れていても誘導起電力  $e$  と端子電圧  $v$  の値は等しくなる。このため電圧  $v$  を厳密には正しい言い方ではないが起電力とよぶこともある。電気回路では起電力という言葉は使わずに、電源電圧とかコイルの電圧ということが多い。

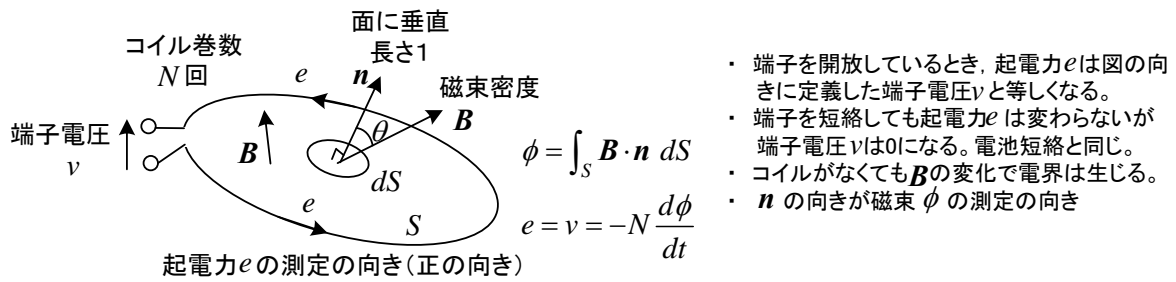
以上、概要を述べたが、これから詳しく説明しよう。まず磁束を述べよう。磁束  $\phi$  は、開曲面  $S$  をとり、その面に垂直な法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を自分で決め、磁束密度  $\mathbf{B}$  の  $\mathbf{n}$  方向成分  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B \cos \theta$  を  $S$  上で集めた面積分

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (6-2)$$

により定義される。磁束  $\phi$  は  $\mathbf{B}$  と違ってスカラーであり、面  $S$  や  $\mathbf{n}$  を決めないと決らない。 $\mathbf{n}$  のと



り方 (2通りある) で符号が違ってくる。ただ面  $S$  や  $\mathbf{n}$  を詳しく定義するのは、回路的に考える場合には煩雑<sup>はんざつ</sup>である。そこで面  $S$  はコイルの断面とし、 $\mathbf{n}$  の矢印の代わりに  $\phi$  に矢印を付けて表わすこともある。 $\mathbf{n}$  の向きが  $\phi$  の測定の向きである。また図中に  $\mathbf{B}$  のベクトルまたは磁束線が書かれていたら、その向き(側)に法線ベクトル  $\mathbf{n}$  が選ばれていると考えよう。 $\mathbf{B}$  の磁束線を描いて、 $\phi$  とだけ書いている本も多い。(6-1)で求める誘導起電力  $e$  の測定の向きは、 $\mathbf{n}$  の矢印 (磁束  $\phi$  の測定の向き) に対して右ねじを回す向きに選んだ場合である ( $\mathbf{n}$  の向きは自由に選んでよい)。



- ・ 端子を開放しているとき、起電力  $e$  は図の向きに定義した端子電圧  $v$  と等しくなる。
- ・ 端子を短絡しても起電力  $e$  は変わらないが端子電圧  $v$  は 0 になる。電池短絡と同じ。
- ・ コイルがなくても  $\mathbf{B}$  の変化で電界は生じる。
- ・  $\mathbf{n}$  の向きが磁束  $\phi$  の測定の向き

図 6-3 磁束  $\phi$ ，誘導起電力  $e$ ，端子電圧  $v$  の関係 (端子開放の場合)

起電力と電圧については、第 3 章の電池で詳しく述べたが、⑩に示したように起電力は非クーロン電界に対して定義された量で、電圧はクーロン電界について定義された量である。図 6-4 で磁石を近づけると磁界が変化して④により誘導電界  $\mathbf{E}_b$  が生じる。これは非クーロン電界の 1 つである。 $\mathbf{E}_b$  により、コイル中の電子が移動し、a の端子に貯まる。b の端子はその分電子が少なくなるので正に帯電する。レンツの法則でコイル中を a から b へ電流を流そうとして正電荷が b に貯まると考えてもよい。端子 a, b 付近には電荷が貯まるので、この結果クーロン電界  $\mathbf{E}_c$  が生じる。なお電荷の再配置は瞬時に完了する。内部抵抗のあるコイルの電流  $i_c$  は、⑧のオームの法則

$$i_c = \kappa(\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \quad (6-3)$$

を満たす。端子は開放されているから、当然  $i_c = 0$  である。よって、コイルの導線の中では

$$\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = 0 \quad (6-4)$$

でなくてはならない。すなわち、誘導電界とクーロン電界が打ち消して導線中の電界  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c$  は瞬時に 0 になる。ローレンツ力  $q\mathbf{E}$  も 0 となり、必要以上の電荷の移動は生じない。b 点から見た a 点の電圧は⑩よりクーロン電界を用いて次式で与えられる。

$$v = -\int_b^a \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \quad (6-5)$$

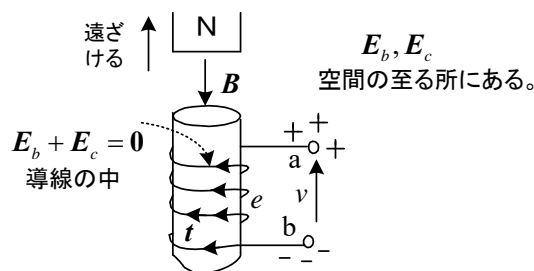


図 6-4 電界と起電力及び電圧の関係 (端子開放の場合)

クーロン電界の線積分は道によらないのでコイルの導線の中を通っても構わない。電圧を測る矢印は、途中の道に関係ないので、b 点から a 点に向けて適当に書く ( $\mathbf{t}$  の向きに一致)。一方、起電力はコイルの導線の中を

$$e = \int_b^a \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl \quad (6-6)$$

とする。起電力  $e$  は線積分する道に依存する。測る向きは  $\mathbf{t}$  の向きで、それを  $e$  の矢印として図中に書いている。(6-4)~(6-6)より、同じ導線内の積分路で

$$\int_b^a (\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad \therefore \int_b^a \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = - \int_b^a \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \quad \therefore e = v \quad (6-7)$$

起電力の定義では閉ループで線積分すべきだが、端子 ab 間の空気中の  $\mathbf{E}_b$  の寄与分はコイルの中で  $\mathbf{E}_b$  を十分集めた(6-6)に比べ十分小さいと考えられるから、 $e$  は誘導起電力と言えよう。一方、端子 ab 間の空気中のクーロン電界を線積分した値の方は導線中と同じ  $v$  である(道によらない)。

次に、端子に抵抗をつないで、電流が流れる図 6-5 の場合を考える。コイルの内部抵抗を考えているから、コイルの導線ではオームの法則より次式が成り立つ。

$$\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{i}_c}{\kappa} \quad (6-8)$$

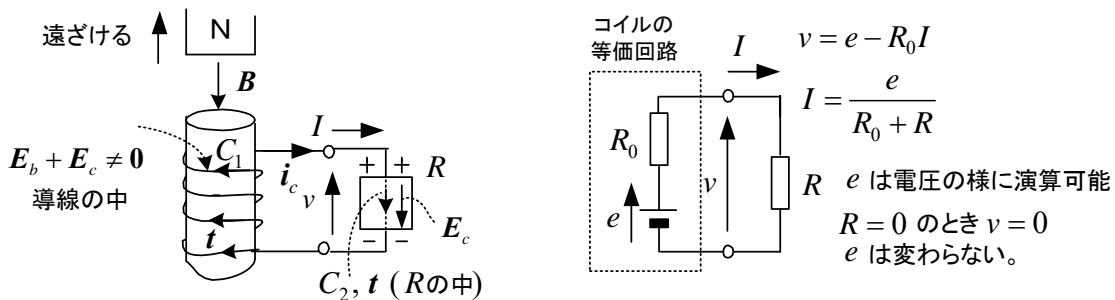


図 6-5 電界と起電力及び電圧の関係 (抵抗  $R$  を接続)

電流が流れる回路(積分路  $C = C_1 + C_2$ ,  $C_1$ :  $R$  以外)に沿って、電界の線積分を考える。クーロン電界  $\mathbf{E}_c$  を 1 周線積分した値は 0 であるから  $\mathbf{t}$  の向きに測った起電力  $e$  は次式となる。

$$\begin{aligned} e &= \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = \int_C (\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{C_1} (\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl \\ & \qquad \qquad \qquad \text{コイル} \qquad \qquad \qquad \text{抵抗 } R \\ &= \int_{C_1} \frac{\mathbf{i}_c}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \frac{\mathbf{i}_c}{\kappa_R} \cdot \mathbf{t} dl \quad (\mathbf{i}_c, \mathbf{t} \text{ 同じ向き}) \\ &= R_0 I + RI \quad \left( \because \frac{l'}{\kappa S'} S' i_c' + \frac{l''}{\kappa_R S''} S'' i_c'' \right), \quad S: \text{断面積}, l: \text{長さ} \end{aligned} \quad (6-9)$$

抵抗  $R$  の中にはクーロン電界のみとして近似している。抵抗はコイルから離れ、 $R$  の中では  $\mathbf{E}_b$  が小さいと考えられるからである。抵抗の両端に電荷が分布し、これが抵抗の中にクーロン電界を作って電流を流す。電荷は導体表面や抵抗の両端にあり、導体中や抵抗の中にはない。電荷の分布は正確に判らなくても構わないが、クーロン電界を作っている。抵抗の電圧は

$$v = \int_{C_2} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = RI \quad (6-10)$$

である (⑩とは  $\mathbf{t}$  の向きが逆なのでマイナス不要)。 (6-9), (6-10) より

$$e = R_0 I + v$$

が得られる。この式から図 6-5 のコイルに抵抗を接続した場合の等価回路が得られる。コイルに内部抵抗がなければ例え電流が流れていても  $e = v$  となる。図 6-5 ではコイルを等価的に表すため電池を考えているが、これは判りやすくするためであって、起電力  $e$  は (6-1) で計算しないといけない。一般に  $e$  は時間的に変化する。磁石を近づけるときは (6-9) は変わらず  $e < 0, I < 0$  である。

### ○ コイルに成り立つ式 (自己誘導 self-induction)

図 6-6 に示すように鉄心に巻かれたコイルに電源 (普通は交流) を接続し、電流  $i$  を流す。この電流により鉄心には  $\mathbf{B}$  の磁束線ができる。電源電圧を変えると、電流、 $\mathbf{B}$  及びコイルの磁束  $\phi$  が変化し、電磁誘導の法則によりコイルに誘導起電力が発生する。コイルが作った磁束によって、コイル自身に起電力が発生するので、この現象は自己誘導とよばれる。図 6-6 の (a), (b) ではコイルの巻き方が異なる。自分で決める電流  $i$  の矢印 (測定の向き) に対し、右ねじの進む向きに  $n$  の矢印 ( $\phi$  の測定の向き) を取ると (6-11) が成立する。これは自己インダクタンスの定義式である。

$$\psi = N\phi = Li \quad (6-11)$$

$L$  : 自己インダクタンス (self-inductance) [H] (ヘンリー) (常に正)

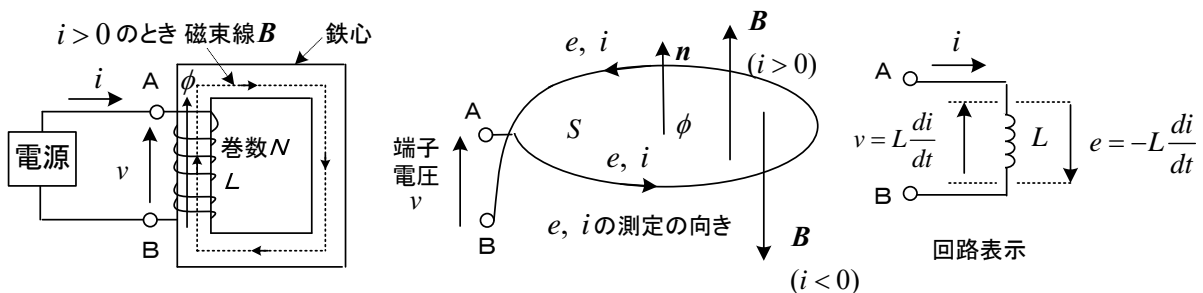
$\psi$  : 鎖交磁束 (linkage flux),  $N$  : コイルの巻数 (常に正)

図 6-6 (a), (b) いずれの場合も電流  $i$  が磁束  $\phi$  を作るが、 $i > 0$  なら右ねじの法則より  $\mathbf{B}$  と  $n$  の向きが一致するので  $\phi > 0$  ( $i < 0$  なら  $\mathbf{B}$  が逆向きになるから  $\phi < 0$ ) となる。

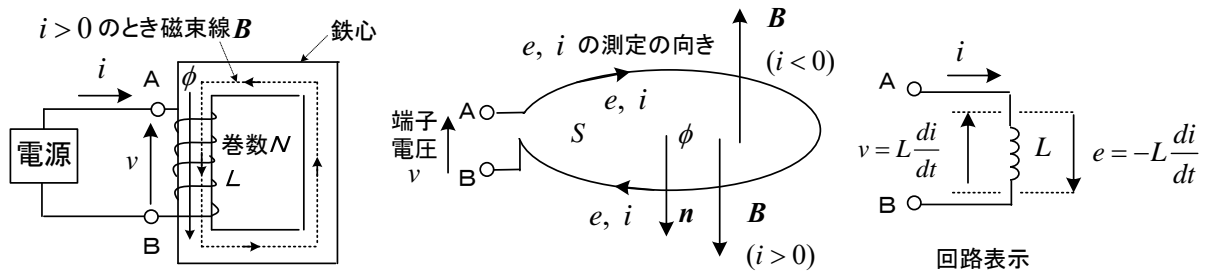
端子電圧  $v$  の測定の向き (矢印) を図 6-6 のようにとると (図 6-1, 6-2, 6-3 とは逆に選んでいることに注意), (a), (b) いずれの場合でもコイルの内部抵抗 (巻線抵抗) を無視すると、 $v = -e$  だから (6-1) より

$$v = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad (6-12)$$

となる。これは磁束  $\phi$  の測定の向き (矢印) に右ねじを進めるとき、ねじの回る方向にコイルをなぞり、その出口に電圧  $v$  の矢印の根をとっていることから判る。 (6-11), (6-12) より、



(a)コイルの巻き方 I



(b)コイルの巻き方Ⅱ

図 6-6 コイルの電流，磁束，起電力

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (6-13)$$

が得られる。この式は、コイルの基本式として大変重要である。注意点として、 $v$ と $i$ の矢印を逆向きに選んだ場合の式である。誘導起電力 $e$ は、電流と同じ向きに選ぶ場合（これが普通）には、

$$e = -L \frac{di}{dt} \quad (6-14)$$

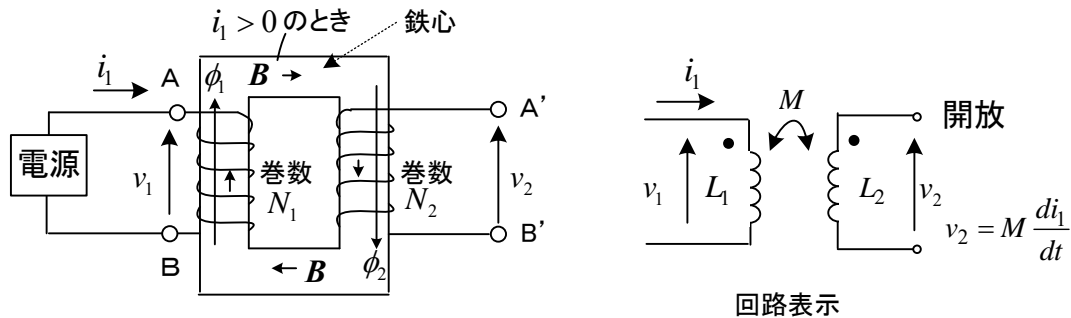
となる。コイルの巻き方に関係なく (6-13), (6-14) は成立することが判る。結局、回路で考える場合には(6-13)を測定の向きも含めて( $v, i$ の矢印を逆に選ぶ)覚えておけばよい。

### ○ コイルに成り立つ式（相互誘導 mutual-induction）

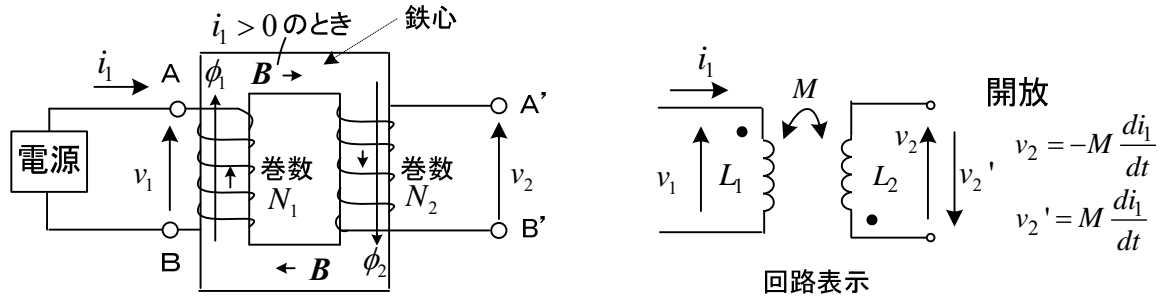
図 6-7 の様に、鉄心に 2 つのコイルを巻いた場合を考える。これが**変圧器**(transformer)である。電流 $i_1$ が流れると、 $i_1$ によって巻数 $N_1$ のコイル 1（一次巻線）に磁束密度 $B$ ができる。 $B$ は、鉄心を通って、巻数 $N_2$ のコイル 2（二次巻線）の中も通る。電源電圧を変化させて電流 $i_1$ を変化させると $B$ が変化し、電磁誘導の法則によって二次巻線にも誘導起電力が生じる。これは、**相互誘導**(mutual induction)と呼ばれる。相互誘導による図(a)の場合の電圧 $v_2$ は、次式で与えられる。

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (6-15)$$

ここで、 $M$ を**相互インダクタンス**(mutual inductance)[H]とよぶ。一次巻線に対する二次巻線の巻き方が、(b)の場合には、 $v_2$ の極性が逆になる。



(a) コイルの巻き方Ⅰ ( $M > 0$ )

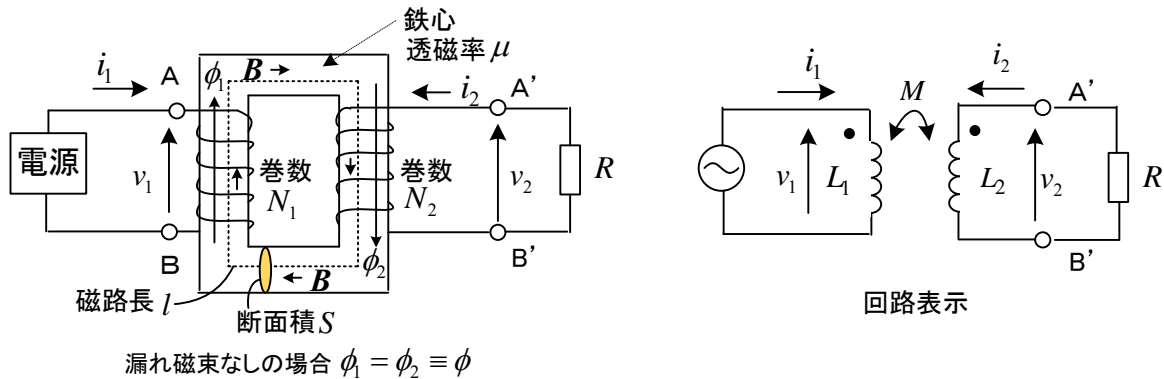


(b) コイルの巻き方Ⅱ ( $M > 0$ )

図 6-7 変圧器とその回路表示 (二次側開放の場合)

回路表示で図中の  $\bullet$  印は、巻線の巻き方の情報を示すものである。 $\bullet$  印は相互インダクタンス  $M$  についての式を立てる場合に関係し、自己インダクタンス  $L_1, L_2$  には関係しない。 $\bullet$  印からコイルに入る向きに電流  $i$  の矢印を選ぶと、相互誘導によって相手方のコイルの  $\bullet$  印に電圧の矢印の矢がある向きに  $M(di/dt)$  が生じるものと定義する。自己インダクタンスは常に正であるが、相互インダクタンスは正とは限らない。ただし、図 6-7 の場合には、図の様に  $\bullet$  印をつけることで(a),(b)いずれの場合でも相互インダクタンスを正 ( $M > 0$ ) にできる。

(6-15)が成り立つのは、二次巻線に何もつないでいない場合(開放)で、図 6-8 のように抵抗などをつなぐと電流  $i_2$  が流れ、二次巻線に自己誘導による電圧が発生すると同時に一次巻線に二次巻線の電流  $i_2$  による相互誘導の電圧が発生する。鉄心中の磁束密度  $B$  は電流  $i_1$  と電流  $i_2$  で作られる。この場合が一般的なので、磁気回路の考え方を使得てやや詳しく述べよう。仮定として、鉄心の外では  $B$  は  $0$  とする。すなわち、鉄心の外(空气中)に漏れる磁束線(漏れ磁束 leakage flux)はないものとする。この結果、一次巻線にできる磁束  $\phi_1$  と二次巻線にできる磁束  $\phi_2$  は等しく、これを  $\phi$  で表す。すなわち、 $\phi = \phi_1 = \phi_2$  である。またコイルの内部抵抗(巻線抵抗)は無視する。



漏れ磁束なしの場合  $\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$

図 6-8 変圧器とその回路表示 (二次側に負荷抵抗を接続の場合)

磁束  $\phi$  は、電流  $i_1$  だけでなく、電流  $i_2$  によっても作られる。電流  $i_1, i_2$  の矢印(正方向)を図の向きにとると、これらの電流が正のとき同じ向きの  $B$  を作るから、磁気回路の考え方を使得て

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = \frac{\text{起磁力}}{\text{磁気抵抗}} = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_m} \quad (6-16)$$

磁気抵抗は次式で与えられる。鉄心の断面積はどこも同じと仮定する。

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (6-17)$$

ここで、 $l$ ：鉄心の磁路長[m]、 $\mu$ ：鉄心の透磁率[H/m]、 $S$ ：鉄心の断面積[m<sup>2</sup>]  
一次巻線の鎖交磁束は(6-16)より

$$N_1 \phi_1 = \frac{N_1^2}{R_m} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R_m} i_2 \equiv L_1 i_1 + M i_2 \quad (6-18)$$

同様に二次巻線の鎖交磁束は

$$N_2 \phi_2 = \frac{N_1 N_2}{R_m} i_1 + \frac{N_2^2}{R_m} i_2 \equiv M i_1 + L_2 i_2 \quad (6-19)$$

となる。上式は、自己インダクタンス  $L_1, L_2$ 、相互インダクタンス  $M$  の定義式で

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m}, L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}, M = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (6-20)$$

となることが判る。 $M > 0$  で、

$$L_1 L_2 = M^2$$

が成立する。これは漏れ磁束がない場合に成り立ち、**密結合条件**とよばれている。

変圧器に生じる電圧は、(6-12)より次のように計算できる。これは磁束の測定の向き（図の矢印）に右ねじを進めるとき、コイルの最終端に電圧の矢印の根をとっているから－がつかない。

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (6-21)$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (6-22)$$

漏れ磁束を考慮する場合には、漏れ磁束を作る巻線の漏れインダクタンス  $l_1, l_2$  をそれぞれ  $L_1, L_2$  に加え、改めて  $L_1 + l_1 \rightarrow L_1, L_2 + l_2 \rightarrow L_2$  と置き換えることで、(6-21),(6-22)として表す。この場合には、 $L_1 L_2 > M^2$  となる。電気回路では以上の様に変圧器のモデル化を行う。なお、実際には巻線に抵抗が存在するから、 $L_1, L_2$  にそれぞれ巻線抵抗を直列に加えることもある。

変圧器に蓄えられるエネルギーについて考える。図6-8で変圧器に送られる瞬時電力  $p$  [W] は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p &= v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) \quad [\text{W}] \end{aligned}$$

よって、変圧器に蓄えられる磁界のエネルギー  $W_m$  は次式で与えられる。

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad [\text{J}] \quad (6-23)$$

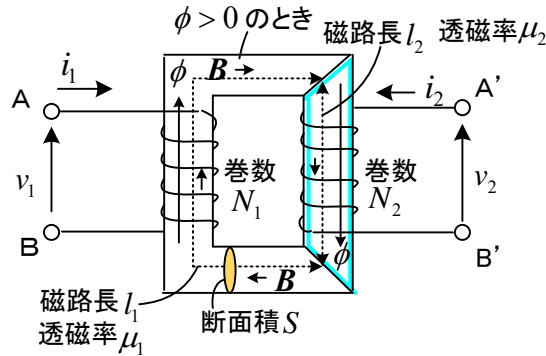
(2-45)を用い鉄心中の磁界のエネルギーを求めてみよう。 $\phi = BS$  で(6-16)より

$$W_m = \frac{1}{2} B H l S = \frac{1}{2\mu} B^2 l S = \frac{l}{2\mu S} \phi^2 = \frac{l}{2\mu S} \frac{(N_1 i_1 + N_2 i_2)^2}{R_m^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{N_1^2 i_1^2 + 2N_1 N_2 i_1 i_2 + N_2^2 i_2^2}{R_m} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

となり、(6-23)の結果と一致する。

**例題 1** 図のように透磁率の異なる 2 つの部分からなる鉄心にコイルが巻かれている。鉄心の断面積はどこでも  $S$  とする。磁気回路の考え方をういて自己インダクタンスと相互インダクタンスを求め、電気回路で表せ。ただし、巻線抵抗、鉄心の外への漏れ磁束は無視する。



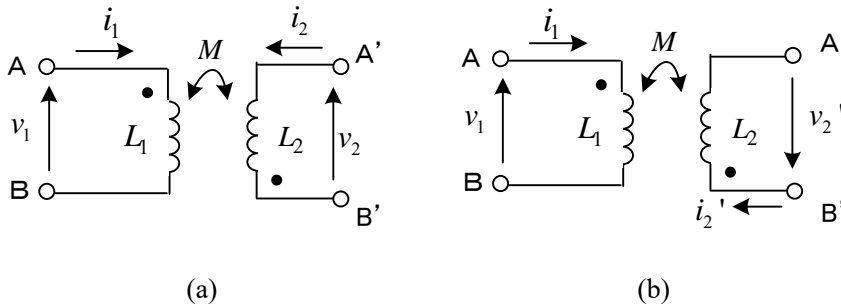
(解) 漏れ磁束がないので、鉄心の磁束  $\phi$  はどの断面  $S$  でも同じである。図の矢印の向きに電圧、電流、磁束の正方向を選ぶと、巻線の巻き方に注意し、電流  $i_1, i_2$  の正負と  $\phi$  の正負を考えて

$$\phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R_m}, \quad \text{磁気抵抗 } R_m = \frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S}$$

となる。電圧は次式となり、電気回路は図(a)で表される。

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \quad v_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

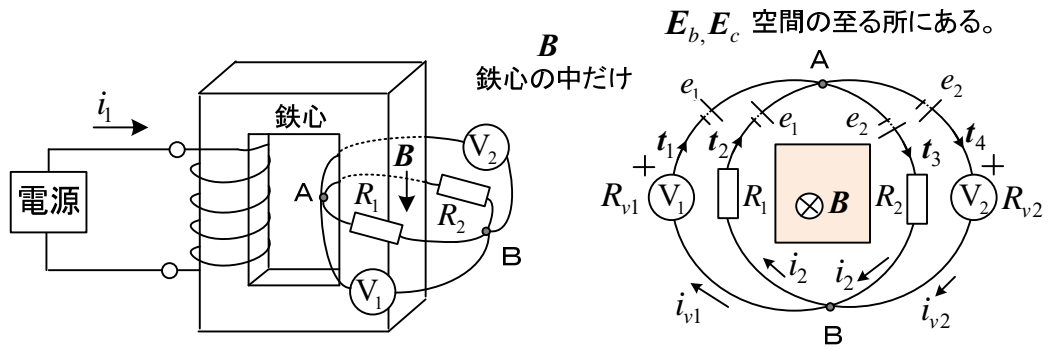
ただし、自己インダクタンス： $L_1 = \frac{N_1^2}{R_m}$ 、 $L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}$ 、相互インダクタンス  $M = \frac{N_1 N_2}{R_m}$



図(b)のように、 $i_2' = -i_2$ 、 $v_2' = -v_2$  を用いると、-はつかない。

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2'}{dt}, \quad v_2' = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2'}{dt}$$

**例題 2** 図の変圧器の 2 次側に 1 回巻きのコイルがあり、抵抗  $R_1, R_2$  を接続している。またコイルの点 A, B に電圧計  $V_1, V_2$  を接続している。抵抗  $R_1, R_2$  に流れる電流が  $i_2$  のとき電圧計の読みを求めよ。磁界は鉄心中のみとする。



(解) 電圧計の内部抵抗  $R_v$  は非常に大きいので、そこに流れる電流  $i_{v1}, i_{v2}$  は  $i_2$  に比べて無視できる。電圧計は  $R_v$  と + 端子から流れ込む電流を掛けた瞬時値を表示するもの考える ( $V_1 = -R_{v1}i_{v1}$ ,  $V_2 = R_{v2}i_{v2}$ )。すなわち電圧計(voltmeter)は非常に大きな抵抗で、その中に生じるクーロン電界による電圧を表示する(電圧計の中の誘導電界は無視する)。動くものはないので、④の電磁誘導の法則よりクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  と誘導電界  $\mathbf{E}_b$  を用いて一般に

$$\int_C (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

である。 $\mathbf{t}_1, -\mathbf{t}_2$  の閉路(BAB)については鎖交する磁束は0だから、

$$\int_{BA} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t}_1 dl + \int_{AB} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot (-\mathbf{t}_2) dl = 0 \quad (1)$$

オームの法則より  $\int_{BA} \frac{i_{v1}}{\kappa_{R1}} \cdot \mathbf{t}_1 dl - \int_{BA} \frac{i_2}{\kappa_{R1}} \cdot \mathbf{t}_2 dl = 0 \quad \therefore R_{v1} i_{v1} = R_1 i_2 \quad \therefore V_1 = -R_1 i_2$

同様に  $\mathbf{t}_3, -\mathbf{t}_4$  の閉路(ABA)について  $\int_{AB} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t}_3 dl + \int_{BA} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot (-\mathbf{t}_4) dl = 0 \quad (2)$

$$\therefore \int_{AB} \frac{i_2}{\kappa_{R2}} \cdot \mathbf{t}_3 dl - \int_{AB} \frac{i_{v2}}{\kappa_{R2}} \cdot \mathbf{t}_4 dl = 0 \quad \therefore R_2 i_2 = R_{v2} i_{v2} \quad \therefore V_2 = R_2 i_2$$

このように同じ端子につないでも、電圧計の読みが異なるということが起こる(4)。

別の考え方をしてみよう。(1)でクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  の1周の線積分は0だから、その分を除き

$$\int_{BA} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t}_1 dl = \int_{BA} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t}_2 dl \equiv e_1$$

とおける。同様に(2)より

$$\int_{AB} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t}_3 dl = \int_{AB} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t}_4 dl \equiv e_2$$

とおく。 $e_1, e_2$  を電池に置き換えて右図に示すように考えると、電気回路の問題として容易に解ける。同じ端子であっても、電圧計のリード線に起電力が隠れているのである。

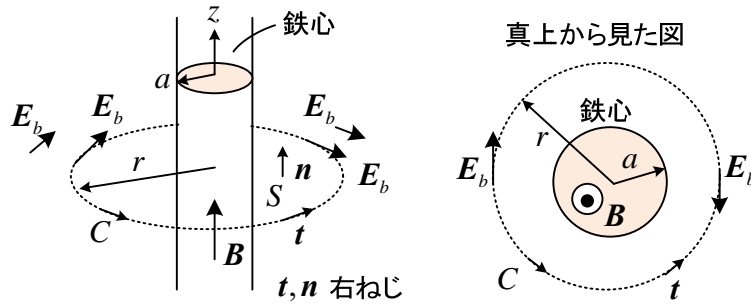
$R_1$  だけを残し、 $R_2$  の抵抗を取り除いた場合を考えると、電圧計の抵抗は大きいから電流は無視できて  $V_1 = 0, V_2 = -d\phi/dt = e_1 + e_2$  となる。やはり電圧計の読みは異なる。

注意点として、一般に  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  であるが、鉄心の外では  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  だから  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  である。しかし、鉄心の外でも  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  にはならない。 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}$  の場合も同様である。



例題 3 図のように  $z$  軸方向（鉛直方向）に十分長い半径  $a$  の円柱状の鉄心に一様に磁束密度  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0 t)$  が、時間と共に増加している ( $B_0$  は正で一定)。鉄心以外に磁界はないとする。

(1) 水平面で半径  $r$  の同心円周上の点の電界を求めよ。



(解) 半径  $r$  の円周上を周回する積分路を  $C$  とすると、④' のファラデーの電磁誘導の法則より、 $\mathbf{t}$  の向きに測った起電力  $V_e$  は

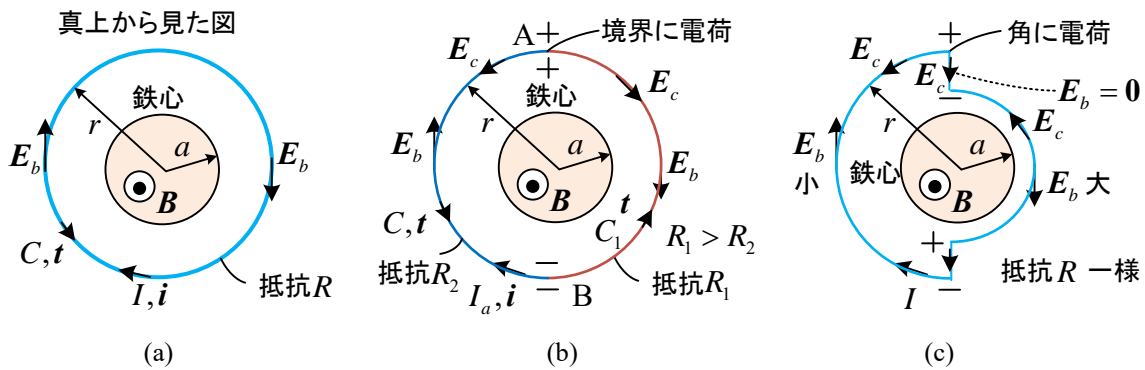
$$V_e = \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

が成り立つ。誘導電界の大きさは円周上では同じで、図に示す円の接線方向と考えられる。磁界は鉄心の中だけで、 $E_t$  を  $E_b$  の  $\mathbf{t}$  方向成分として、磁束  $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \pi a^2 B_0 t$  より

$$V_e = 2\pi r E_t = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 \pi a^2, \quad E_t = -\frac{B_0 a^2}{2r}$$

$\mathbf{t}$  と逆方向に誘導電界  $\mathbf{E}_b$  が生じる。④' を使うとき、 $\mathbf{t}$  と磁束を求める  $\mathbf{n}$  は右ねじの関係に選ぶ必要がある。この場合クーロン電界はない。

- (2) 図の各場合について、流れる電流を求めよ。なお流れる電流が作る磁界は無視する。また、(b), (c) の場合、流れる電流がどこでも等しくなる理由を説明せよ。
- (a) 半径  $r$  の円周上に一様な抵抗  $R$  の導線を置いた場合。
  - (b) 半径  $r$  の円周上に一様な抵抗  $R_1$  と一様な抵抗  $R_2$  をつないだ導線を置いた場合。
  - (c) 半径  $r$  の円周上に一様な抵抗  $R$  の導線を図のように置いた場合。



(解) (a) (1) の起電力を用い、流れる電流は  $I = B_0 \pi a^2 / R$ 。  $\mathbf{B}$  の変化を打ち消すような電流が

流れる。電流に関する電荷は生じないのでクーロン電界はなく  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_b$  である。詳しく書くと、起電力の定義とオームの法則から、 $\mathbf{i}, \mathbf{t}$  が逆向きなので

$$V_e = \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = \int_C \frac{\mathbf{i}}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl = -RI \quad \therefore I = -\frac{V_e}{R} = \frac{B_0 \pi a^2}{R}$$

クーロン電界はないから電圧は定義できない。

- (b) 回路の磁束は(1)と同じだから、起電力の大きさは変わらないので、電流は  $R_1, R_2$  いずれも  $I_a = B_0 \pi a^2 / (R_1 + R_2)$  である。抵抗  $R_1, R_2$  に生じる誘導電界は等しい。オームの法則は⑧より  $\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b)$  であり、この場合には  $R_1, R_2$  の境界に電荷が瞬時に生じてクーロン電界ができる。電流が同じになるように、 $R_1$  では電界を強め、 $R_2$  では電界を弱める。詳しく書くと

$$V_e = \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = \int_C (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t} dl = \int_C \frac{\mathbf{i}}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl = -(R_1 + R_2)I_a$$

(クーロン電界  $\mathbf{E}_c$  の閉路  $C$  の積分値は 0 になる。)

クーロン電界があるから電圧が定義できて (積分路  $C_1$  は点 B から点 A まで抵抗  $R_1$  の中を通る)

$$V_{AB} = -\int_{C_1} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = -\int_{C_1} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_1} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = -\int_{C_1} \frac{\mathbf{i}}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_1} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = R_1 I_a + \frac{V_e}{2}$$

$R_2$  の側を  $-\mathbf{t}$  方向に線積分することで求めると  $V_{AB} = -R_2 I_a - V_e / 2$  が得られる。

- (c) 回路の磁束は(1)と同じだから、起電力の大きさは変わらないので電流は  $I = B_0 \pi a^2 / R$  で(a)の場合と同じである。この場合には、誘導電界  $\mathbf{E}_b$  が小さい箇所、大きい箇所、導線方向成分が 0 の箇所に分かれる。流れる電流はどこでも同じで、導線が折れ曲がる場所に電荷が生じてクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  ができ、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b$  の大きさを一定に保っている<sup>(9)</sup>。

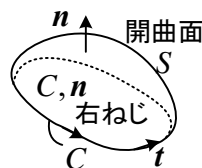
オームの法則は電界と電流の関係を定め、 $\mathbf{i}, \rho$  をつなぐ電荷保存の法則⑩と  $\rho, \mathbf{E}$  をつなぐガウスの法則①を用いずとも解が得られている。なお、境界や角の電荷が時間的に変化している場合、キルヒホッフの電流則は厳密には成立しないが、周波数が高くないならその影響は無視できる。つまり、(2-77) の  $\text{div } \mathbf{i} = 0$  が成り立つとする。これが緩慢に変化する現象の磁界系の解析である。

## ○ 動く導体

第 2 章で、起電力は次式により計算できることを示した。

$$V_e = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{④}'$$

変圧器起電力    速度起電力



これまで、変圧器起電力を詳しく取り上げてきたが、本節では速度起電力についても考える。速度起電力に関するフレミングの右手の法則をここで再掲しておく。注意点として、導線に電流が流れる場合には、磁界を生じ変圧器起電力が生じる可能性がある (例題 6, 8 参照)。

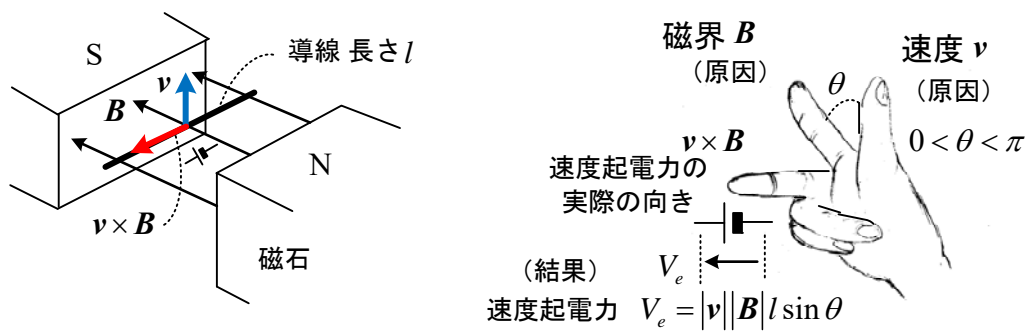


図 6-9 フレミングの右手の法則

④' の速度起電力  $V_e$  は積分路  $C$  の向きに測った値であるから負になることがある。しかし、図 6-9 に示す速度起電力  $V_e$  はフレミングの右手の法則で実際の向きを求めているので正である。電気回路では、 $V_e$  を図の向きの電圧として取り扱う。

一方、電流に働く力は

$$F = I \times B l \tag{6-24}$$

で与えられ、フレミングの左手の法則として知られている。図をもう一度示しておこう。注意点として自己力は工学的に常に無視できるから<sup>(15)</sup>、導線の電流が作る磁界は  $B$  に含まれない。

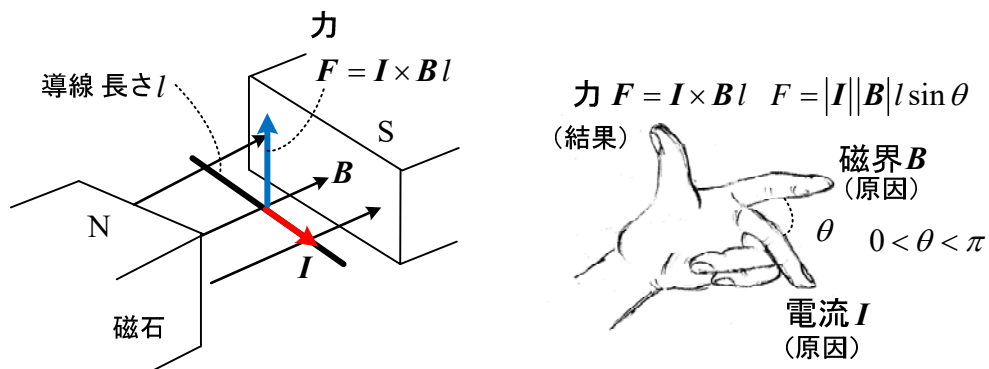
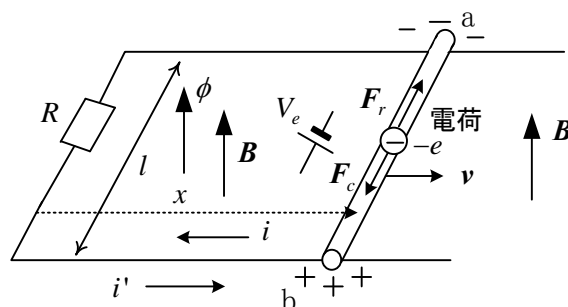


図 6-10 フレミングの左手の法則

**例題 4** 図の様に水平面の平行導体上に垂直に導体棒  $ab$  がのせられ、接触しながら速度  $v$  [m/s] で動いている。平行導体の間隔は  $l$  [m] とし、鉛直方向に一樣に磁束密度  $B$  [T] が加えられている。導体棒  $ab$  の平行導体間の抵抗が  $R_0$  [ $\Omega$ ] のとき流れる電流を求めよ。なお、導線に流れる電流による磁界は無視できるものとする。



(解) 导体棒 ab に生じる速度起電力はフレミングの右手の法則より、 $V_e = vBl$  である。ただし、 $v = |\mathbf{v}|, B = |\mathbf{B}|$ 。a 点より b 点の電位が高く、電流  $i$  は図の向きに流れ

$$i = \frac{vBl}{R + R_0}$$

となる。電流による磁界が無視できるので、インダクタンスを考える必要がない。

別解として、閉路に生じる起電力  $V_e'$  を電磁誘導の法則から求めることもできる。(6-1)より

$$V_e' = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

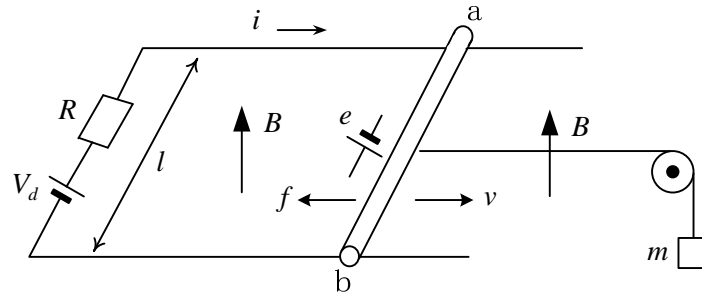
となる。 $V_e'$  を測る向きは、 $\phi$  を測る向き ( $\mathbf{B}$  の向き) に対して右ねじの回る向きなので、図に示す電流  $i'$  を流そうとする向きである。よって、 $i' = V_e' / (R + R_0) = -vBl / (R + R_0) = -i$  となる。

この問題は高校生でも容易に答えを出すであろう。また、以下の様なことも高校の教科書に書いてある。

导体棒 ab の中にある電子の電荷を  $-e$  とする。これに  $\mathbf{F}_r = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  のローレンツ力が働き、端子 a 付近に電子が移動する。このために、端子 b 付近は+に帯電する。これらの電荷の再配置によってクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  が b から a の向きにでき、このため電子に  $\mathbf{F}_c = -e\mathbf{E}_c$  の力が働くことになる。内部抵抗  $R_0 = 0$  のとき、これらの力は釣り合う。すなわち、 $\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}$  (力 0 で電子は等速運動する) で、 $\mathbf{E}_c + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  が成り立つ。何故なら、导体棒についてオームの法則より、 $\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E}_c + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  が成り立つが、内部抵抗を 0 としているので  $\kappa = \infty$  だからである。 $\mathbf{E}_c + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  を線積分することで、電圧  $V_{ba}$  が起電力  $V_e$  と等しくなることが導ける。電池やコイルでも同様のことを行ってきたので参照して欲しい。起電力を作る非クーロン電界が電池の場合は  $\mathbf{E}_e$ 、コイルの場合は  $\mathbf{E}_b$ 、動く導体の場合には  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  に変わったただけである。内部抵抗がある場合についても、電池やコイルを参照して欲しい。この場合  $\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_c \neq \mathbf{0}$  である。

もし、上記の导体棒が密着し絶縁した鉄棒の中にあつたら (線路と接触する部分だけは导体棒として)、 $\mathbf{B}$  は鉄の中を通過して、导体棒の中をほとんど通らない。この結果导体棒の  $vBl$  は小さくなるが、棒から離れた一定の外部磁界  $B_0$  を使い起電力  $V_e = vB_0l$  として計算して構わない。鉄の中を  $\mathbf{B}$  が通るとき、その付近の  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  (変圧器起電力) が 0 でなくなり誘導電界が生じ、その分を考慮すると  $V_e = vB_0l$  に等しい大きさの起電力になるであろう。ファラデーの電磁誘導の法則  $e = -d\phi/dt$  がそんな場合でも成り立つからである。簡単な式ではあるが、恐るべしファラデーの電磁誘導の法則である。

**例題 5** 水平面の十分長い平行導体上に垂直に接触して导体棒 ab がのせられ、質量  $m[\text{kg}]$  のおもりをつないだ滑車で引っ張る。平行導体の間隔は  $l[\text{m}]$  とし、垂直方向に一様に大きさ  $B[\text{T}]$  の磁束密度が加えられている。時間  $t = 0$  で导体棒 ab の速度  $v[\text{m/s}]$  を 0 とし、その後の電流  $i[\text{A}]$  と接触して動く导体棒の速度  $v$  を求めよ。但し、导体棒の質量や摩擦、導線や导体棒の抵抗は無視できるものとする。また電流による磁界は無視できるとする。



(解) 導体棒の速度が  $v$  のとき、導体棒にはフレミングの右手の法則より起電力  $e$  [V] が生じる。

$$e = vBl \quad [\text{V}]$$

( $v > 0$  のとき、図の等価な電池の向きに起電力が生じる。導体棒の抵抗は 0 なので、a 点に対する b 点の電圧は  $e$  [V] に等しい)

また、一方で、フレミングの左手の法則により、力  $f$  [N] が加わる。すなわち、

$$f = Bli \quad [\text{N}]$$

回路の式は、

$$V_d + e = Ri \quad \therefore V_d + vBl = Ri \quad (1)$$

おもりの運動方程式は、導体棒の質量が無視できるので、

$$m \frac{dv}{dt} = mg - f \quad \therefore m \frac{dv}{dt} = mg - Bli \quad (2)$$

(1)を(2)に代入して  $i$  を消去すると、

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{R} v = mg - \frac{BlV_d}{R} \quad (3)$$

右辺は一定である。 $t = 0$  で、 $v = 0$  として(3)の微分方程式を解くと

$$v = \left( \frac{Rmg}{B^2 l^2} - \frac{V_d}{Bl} \right) (1 - e^{-st}) \quad [\text{m/s}]$$

$$\text{但し、} s = \frac{B^2 l^2}{mR} > 0$$

(1)に代入して、

$$i = \frac{V_d}{R} + \left( \frac{mg}{Bl} - \frac{V_d}{R} \right) (1 - e^{-st}) = \frac{mg}{Bl} - \left( \frac{mg}{Bl} - \frac{V_d}{R} \right) e^{-st} \quad [\text{A}]$$

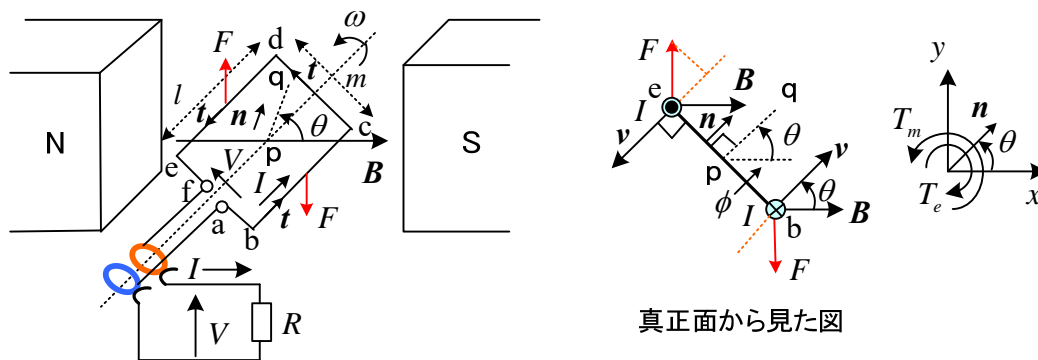
$t = \infty$  のとき、 $i = \frac{mg}{Bl}$  で重力とつり合うように電流が流れる。このとき、 $v = \frac{1}{Bl}(Ri - V_d)$

となり、 $V_d$  の大きさで動く向きが違ふ。 $Ri > V_d$  のとき、 $v > 0$  で、質量  $m$  の物体に引っ張られ、その向きに動く。 $Ri < V_d$  のとき、 $v < 0$  で、質量  $m$  の物体を持ち上げる。起電力  $e$  も正、負に変化し、 $V_d$  と  $e$  で質量に見合った電流を流すようになる。

**例題 6** 磁束密度  $B$  [T] の一様磁界中で、abcdef の 1 回巻きのコイルを一定の角速度  $\omega$  [rad/s] で図の向きに外からの力によって回転させる。時間  $t = 0$  で、角度  $\theta = 0$  とする。コイルには、電磁誘

導により電圧  $V$  [V] が生じる。コイルの抵抗とインダクタンスは  $0$  とするとき以下の間に答えよ。

- (1) 図の向きに端子電圧  $V$  [V] の測定の向きを定義するとき、 $V$  を求めよ。 $V$  は  $a$  点を基準とした  $f$  点の電圧または  $a$  点から見た  $f$  点の電圧という。また抵抗に流れる電流  $I$  を求めよ。
- (2) コイル辺  $bc, de$  に働くトルクを求めよ。
- (3) コイルを回すのに外力がする仕事と抵抗  $R$  で消費される電力が等しいことを証明せよ。



(解) (1) 題意よりインダクタンス  $0$  だから電流が作る磁界を無視して、 $\mathbf{B}$  は永久磁石が作る磁束密度と考えてよい。 $\mathbf{B}$  は一様だから  $\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0}$  である。 $\mathbf{B} = |\mathbf{B}|, \mathbf{v} = |\mathbf{v}|$  として、④' より

$$V_e = \int_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = \int_b^c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl + \int_d^e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl = 2vBl \sin \theta$$

このようにコイル片  $bc$  と  $de$  は磁束を切るように動くので交流の速度起電力を生じる。コイル辺  $ab, cd, ef$  では  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  と  $\mathbf{t}$  の向きが  $90$  度だから、 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} = 0$  である。コイルの角速度は  $\omega$  だから、その周辺速度  $v$  [m/s] は、半径を掛けて  $v = m\omega/2$  となる。従って

$$V_e = Bml\omega \sin \theta$$

コイルの抵抗とインダクタンスは  $0$  だから、 $\mathbf{t}$  の向きに測った起電力  $V_e$  は図の向きの端子電圧  $V$  に等しく  $V = V_e$  である。流れる電流  $I$  は交流で、図の矢印の向きを測定の向きとすると

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Bml\omega \sin \theta}{R}$$

今度は、ファラデーの電磁誘導の法則で考えてみよう。コイルの面を通過する磁束  $\phi$  は

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = SB \cos \theta = mlB \cos \theta$$

となる。磁束  $\phi$  は角度  $\theta$  によって変化し、 $\theta = 0$  のときが最も多く通過する。 $V$  の測定の向きが、 $\phi$  の向きに右ねじを回してコイルをなぞり、その出口に矢がある向きだから、コイルの巻数  $N = 1$ 、 $d\theta/dt = \omega$  に注意して

$$V = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (Blm \cos \theta) = Blm \frac{d\theta}{dt} \sin \theta = Bml\omega \sin \theta$$

となり、先の結果と一致する。 $d\theta/dt = \omega$  (一定) より  $\theta = \omega t$  ( $t = 0$  で  $\theta = 0$ ) と表せる。

(2) 回転に関係のある力はコイル辺  $de, bc$  のみである。 $de$  の辺に働く  $y$  方向の力  $F$  [N] は

$$F = IBl$$

となる。電流に働くトルク（モーメント） $T_e$  [Nm] は、右回りを正の向きとして、半径×(力の $-v$ 方向成分) だから、辺  $de$  で考え、 $bc$  の分で2倍して

$$T_e = F \frac{m}{2} \sin \theta \times 2 = mBI \sin \theta$$

自己力は工学的に常に無視できるから<sup>(15)</sup>、コイルが作る磁界を考慮しても  $F$  の  $B$  は変わらない。  
 (3) 角速度が一定だから、外部からのトルク  $T_m$ （左回りを正の向きとする）とそれに反発する電流が作るトルク  $T_e$  は大きさが等しく、向きが逆でなければならない（そのような外力を加えないと速度は一定にならない）。よって  $T_m = T_e$  である。

このとき、外力がする仕事率  $P_{in}$  [W] は

$$P_{in} = T_m \omega$$

である。一方、抵抗で消費される電力  $P_{out}$  [W] は

$$P_{out} = VI = BmlI\omega \sin \theta = T_e \omega = P_{in}$$

となる。

発電には、水力発電、火力発電、原子力発電、エンジン発電などがある。発電機(generator)の原理は簡単で、磁界の中でコイルを機械的に回転させる（またはコイルの中で磁石を回転させる）だけでよい。例題6はまさにこの例であった。電磁誘導の法則により、コイルに誘導起電力を発生させるのである。発電の違いは、何により回転させるかの違いで、火力発電ではボイラで蒸気を発生させてタービンを回し、その力で発電機を回す。

**例題7** 例題6で、永久磁石の代わりに電磁石を用い、電磁石に流す電流を変化させる。この結果、磁束密度が  $\mathbf{B} = (B_0 \sin \omega t, 0, 0)$  ( $B_0$  は一定) と変化するとき、電圧  $V$  を求めよ。

(解) まず、電磁誘導の法則より求めてみよう。 $\theta = \omega t$  だから、 $ml = S$  として

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = SB \cos \theta = SB_0 \sin \omega t \cos \omega t$$

よって、

$$V = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (B_0 S \sin \omega t \cos \omega t) = -\omega B_0 S \cos^2 \omega t + \omega B_0 S \sin^2 \omega t$$

今度は、変圧器起電力と速度起電力を使って求めてみよう。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_0 \sin \omega t, 0, 0) = (\omega B_0 \cos \omega t, 0, 0), \quad \mathbf{n} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$$

を用いて、変圧器起電力は

$$V_1 = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\int_S \omega B_0 \cos^2 \omega t \, dS = -\omega B_0 S \cos^2 \omega t$$

となる。速度起電力は例題6で求めたように

$$V_2 = BS\omega \sin \theta = \omega B_0 S \sin^2 \omega t$$

これらの和は、 $V$  に一致する。

**例題 8** 図 6-11 は固定子と回転子にそれぞれコイルを巻いた単純なモータで、モータの解析を行うときの基本となる。モータは鉄心の中にスロットを作り、そこに絶縁されたコイルを巻いた構造である。回転子に電流を流す場合にはスリップリングを使う。モータの解析は、電気回路として表示した 2 つのコイルについて行う。このとき、コイルの電流と磁束密度  $\mathbf{B}$  の向きを明確に決めておく必要がある。ここでは図 6-12 に示すように  $\bullet$  印のところに流れ込む電流の正負によって図の向きに  $\mathbf{B}$  が生じると定義しよう。この結果、図 6-11 のモータは図 6-13 の 2 つのコイルでモデル化される。2 つのコイルは一種の変圧器を作っていると考えられるが、変圧器と違って相互インダクタンス  $M$  が回転子のコイルの位置によって変化する。 $M = M_0 \cos \theta$  ( $M_0 > 0$ ) と仮定するとき\*、回転子に働くトルク  $T_e$  をエネルギーの原理から求めよ。

\* 図 6-11 のように 1 か所にコイルを巻くとき集中巻という。この場合には  $i_a$  が作るエアギャップの  $\mathbf{B}$  はほぼ半径方向（面に垂直）なので相互インダクタンスの変化は  $\theta$  の変化に対し直線的になる<sup>(16)</sup>。しかし、実際の巻線は相互インダクタンスが正弦波になるように分布巻が用いられているから、このように仮定する。

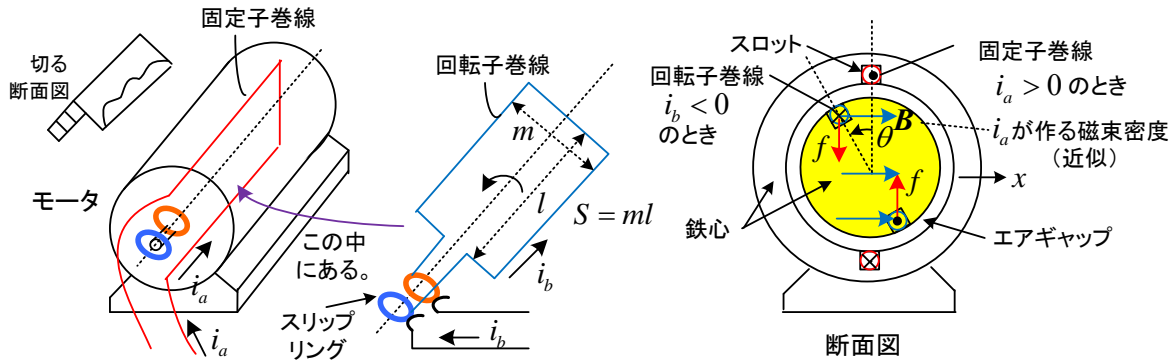


図 6-11 2 つのコイルからなる単純なモータ

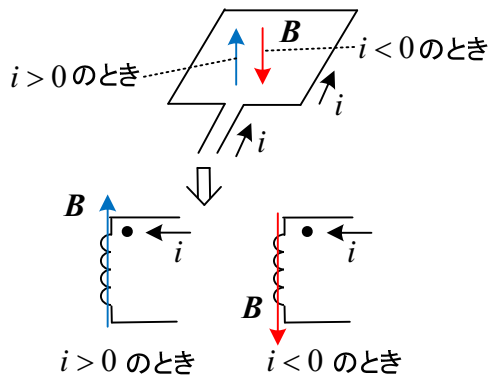


図 6-12 コイルの表現

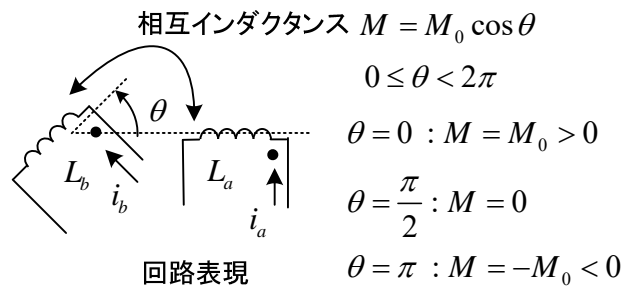


図 6-13 単純なモータの回路モデル

(解) コイルに蓄えられるエネルギー  $W_m(\theta, i_a, i_b)$  は(6-23)より

$$W_m(\theta, i_a, i_b) = \frac{1}{2} L_a i_a^2 + M_0 \cos \theta \cdot i_a i_b + \frac{1}{2} L_b i_b^2 \quad (1)$$

(5-88)より  $\theta$  が増える向きのトルク  $T_e$  は

$$T_e = \frac{\partial W_m(\theta, i_a, i_b)}{\partial \theta} = -M_0 i_a i_b \sin \theta \quad [\text{Nm}] \quad (2)$$

と簡単に計算できる。

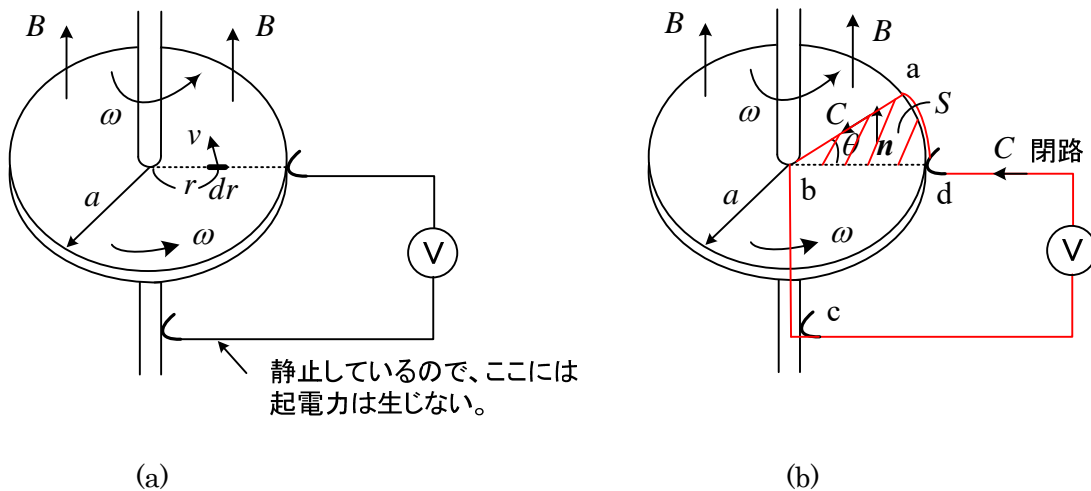


(考察)  $i_a > 0, i_b < 0$  のとき図 6-11 の断面図を考える。厳密な解析を避けて、 $\theta = 0$  の場合、変圧器と同じように考えよう。つまり、インダクタンスは磁気抵抗を  $R_m$  として、 $L_a = N_a^2 / R_m$ 、 $L_b = N_b^2 / R_m$ 、 $M_0 = N_a N_b / R_m$  とする。 $N_a, N_b$  はコイルの実効巻数である。 $i_a$  が作る磁束密度  $B$  は、磁気回路では一様で  $x$  軸方向のみと近似することになり、 $B = \phi / S = N_a i_a / (R_m S)$  となる。任意の  $\theta$  の場合  $M = M_0 \cos \theta$  が成立する。力  $f$  は、 $i_a$  が作る  $B$  と  $i_b$  の間でフレミングの左手の法則を用いて計算する。自分が作った磁界で自分にトルクは働かないから  $i_b$  が作る磁界を考える必要はない。 $x$  軸方向の磁束密度に対し、コイル辺に力  $f$  が働き、トルクは  $T_e = N_b m f \sin \theta$  (左回り) となる。 $f = -B l i_b = -N_a i_a l i_b / (R_m S)$  だから  $T_e = -M_0 i_a i_b \sin \theta$  となり(2)と一致する。

電圧の式は、変圧器と同様に考えて、次式となる。 $i_a, i_b, \theta$  は時間の関数である。

$$v_a = L_a \frac{di_a}{dt} + M_0 \frac{d}{dt}(i_b \cos \theta) \quad , \quad v_b = M_0 \frac{d}{dt}(i_a \cos \theta) + L_b \frac{di_b}{dt} \quad (3)$$

**例題 9** 図のように一様な磁束密度  $B$  中を、一定の角速度  $\omega$  で回転する導体円板が水平面にある。すり接触子でつながり静止した電圧計に現れる電圧を求めよ。円板の半径を  $a$  とする。



(解) 磁界中で動く物体には速度起電力が生じる。中心から  $r$  の点  $dr$  の速度は  $v = r\omega$  である。よって、 $dr$  の部分に生じる起電力は、 $r\omega B dr$  となる。これを半径方向に  $0$  から  $a$  まで集めて、円盤の軸と縁の間に生じる起電力は次式で求められる。

$$V = \int_0^a r\omega B dr = \left[ \frac{1}{2} r^2 \omega B \right]_0^a = \frac{1}{2} a^2 \omega B$$

この起電力が電圧計の読みとなる。

(別解) 導体円盤上に固定して  $a, b$  点を取り、 $abcd$  の積分路  $C$  を考える。磁束が鎖交する面は扇形  $abd$  である。扇形の面積は  $S = \theta a^2 / 2$  である。よって  $C$  向きの起電力は

$$V_e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} (BS) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{Ba^2\theta}{2} \right) = -\frac{1}{2} a^2 \omega B$$

起電力の測定の向きを考えると同じ結果である。第 2 章で述べたように、磁束の微分から起電力を求める場合には、積分路  $C$  は物質とともに動かす必要がある。

**単極誘導(unipolar induction)**： 図 6-14 の様に棒磁石を軸の周りに角速度  $\omega$  で回転した場合にも、すり接触子でつながった起電力が生じ電圧計(静止)の針が振れる。磁界を作る原因が何であってもつまり自分で作った磁界であっても、磁界中を物体が動くとき磁石に速度起電力が生じるのである。この電圧は例題 9 と同じである。磁界が磁石と同じ速度で回転すると考えてはいけない。

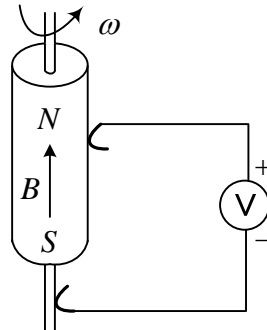


図 6-14 単極誘導

図 6-15 の様に導体円板を回転させるかわりに円柱磁石だけを角速度  $\omega$  で回転させると電圧計は振れるだろうか？答は“振れない”である。速度起電力の速度  $v$  は、静止座標系に対する物体の速度で、磁石との相対速度ではない。従って、この場合には磁石の回転があっても  $B$  は全く変化せず、円板にとっては磁石が回転していない場合と変わらない。また、磁石を固定し導体円板と電圧計を一緒に回転させた場合にも電圧計は振れない。これは、すり接触子と電圧計を結ぶ導線にも起電力を生じ、打ち消すため、電圧計に電流が流れないのである。

以上のように磁界は磁石に固定されているのではなく、空間の物理的状態として認識されなければならない。

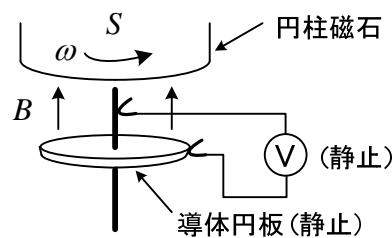


図 6-15 磁石のみ回転

## ○ キルヒホッフの法則

これまでに、回路を構成する素子を全て紹介したので、キルヒホッフの法則がどのように導かれるか図 6-16 の場合を例にとり述べておく。銅棒の速度  $v$  は外力によって時間とともに正負に変化し（交流電源を模擬して）、このため回路を流れる電流  $i$  も時間の関数であるとする。ただし、銅棒にかかる磁束密度  $B$  は鉛直方向で一定とする。なお、素子をつなぐ導線は完全導体とする。 $R_e, R_L, R_v$  は内部抵抗である。

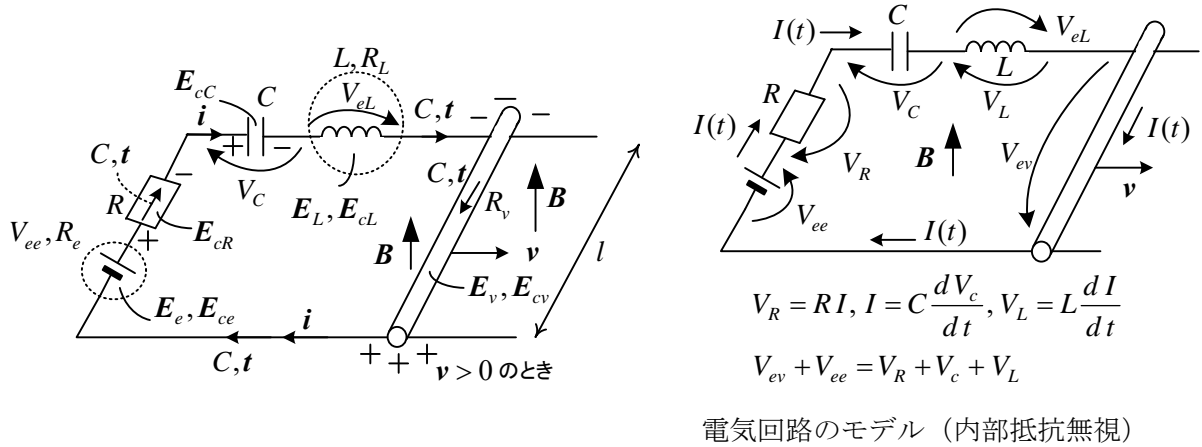


図 6-16 キルヒホッフの電圧則

まず、電荷が作るクーロン電界  $\mathbf{E}_c$  は、空間の至るところに存在する。これを図の各素子を含む空間の領域に分けて、次式で表す。

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_{cR} + \mathbf{E}_{cC} + \mathbf{E}_{cL} + \mathbf{E}_{cv} \quad (6-25)$$

空間の境界を厳密に分ける必要はなく、まとめて  $\mathbf{E}_c$  としてもよいが、判り易くするため領域を分けている。一方、非クーロン電界は、電池の中に  $\mathbf{E}_e$ 、コイルに  $\mathbf{E}_L$  (誘導電界)、銅棒に  $\mathbf{E}_v = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  が生じる。コイル以外の誘導電界は小さいと考え無視する。 $\mathbf{E}_e$  と  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  は等価な電界で電界  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_L$  には入らない。非クーロン電界をまとめて

$$\mathbf{E}_{nc} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_v \quad (6-26)$$

と表す。以上をまとめて

$$\mathbf{E}_{all} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc} \quad (6-27)$$

と書く。 $\mathbf{E}_{all}$  を電流が流れている素子や導線の中を 1 周する積分路で周回積分する。コンデンサの極板間には電流は流れていないが、ここも積分路とする。すると、クーロン電界  $\mathbf{E}_c$  の線積分は 1 周すると 0 だから、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} (\mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \mathbf{E}_{cR} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_3} \mathbf{E}_{cC} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_4} (\mathbf{E}_{cL} + \mathbf{E}_L) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_5} (\mathbf{E}_{cv} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl \\ &= \int_{C_1} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_4} \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_5} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl \end{aligned} \quad (6-28)$$

素子を結ぶ導線部分は完全導体だから  $\mathbf{E}$  は  $\mathbf{0}$  である。右辺には  $\mathbf{E}_{nc}$  の線積分だけが残る。(6-28) は左辺と右辺の同じ項を省くと  $\mathbf{E}_c$  の周回積分が 0 の式である。左辺で、コンデンサ以外は、オームの法則を用いて

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{C_1} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_e} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_2} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_R} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_3} \mathbf{E}_{cC} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_4} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_L} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{C_5} \frac{\mathbf{i}}{\kappa_v} \cdot \mathbf{t} dl \\ &= R_e I + RI + V_c + R_L I + R_v I \end{aligned}$$

$V_c$  の矢印を  $\mathbf{t}$  と逆向きにとると⑩より、 $V_c = \int_{C_3} \mathbf{E}_{cC} \cdot \mathbf{t} dl$  である。右辺は、起電力の和であり

$$\text{右辺} = V_{ee} + V_{eL} + V_{ev}$$

$$\text{ここで, } V_{eL} = \int_{C_4} \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{t} dl = -L \frac{dI}{dt}$$

従って,

$$(V_{ee} - R_e I) + (V_{eL} - R_L I) + (vBl - R_v I) = RI + V_c \quad (6-29)$$

電池                  コイル                  銅棒                  抵抗          コンデンサ

となり、キルヒホッフの電圧則が得られる。内部抵抗  $R_e, R_L, R_v$  が 0 ならその項はない。図 6-16 には内部抵抗を無視した場合の電気回路のモデルも示している。キルヒホッフの電圧則は、 $\text{rot } \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$  の変形である。起電力から内部抵抗を引いた値は端子の電圧で、これはクーロン電界で表すことができる。電気回路では  $V_{eL}$  ではなく逆向きに測定する  $V_L (= -V_{eL})$  を用いる。

以上において、以下の現象は影響が小さいとして無視している。

- (1) 流れる電流によって、コイル以外にも磁界を生じる。磁界が時間変化すると誘導電界を生じる。従って、導線、抵抗などにもインダクタンスがある。
- (2) コンデンサ極板の電束密度の時間変化（変位電流）は磁界を発生し、コンデンサ内に誘導電界を発生する。
- (3) 導線及び各素子の間（空气中）には電界があり、等価的なコンデンサを形成する。

これらの影響は、電圧や電流の周波数が大きくなるほど大きくなる。この場合の解析については、第 7 章で述べる。

次に、キルヒホッフの電流則について述べる。

図 6-17 で、キルヒホッフの電流則は次式で与えられる。

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (6-30)$$

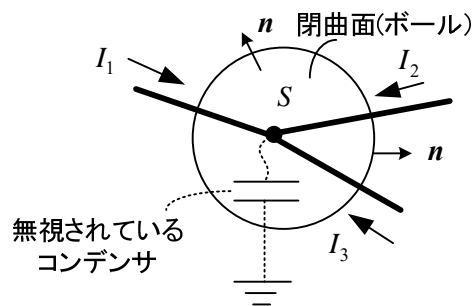


図 6-17 キルヒホッフの電流則

これは、①の電荷保存の法則から導かれる。

$$\text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ガウスの定理を閉曲面  $S$  に適用すると

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (6-31)$$

を得る。閉曲面  $S$  内に電荷の時間変化がなければ、左辺第 2 項は 0 となる。このとき

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (6-32)$$

が成立し、キルヒホッフの電流則が成り立つ。すなわち、キルヒホッフの電流則は  $\text{div } \mathbf{i} = 0$  の変形である。

キルヒホッフの電流則が成立しなくなる場合は、例えば、等価的に導線と大地間にわずかな容量のコンデンサ(浮遊容量という)があつて、導線の表面に電荷が貯まることが考えられる。すると、(6-31)の左辺第2項は0とならず、キルヒホッフの電流則は成り立たない。もちろん、この等価なコンデンサを考慮して回路を考え、コンデンサ電流も加味すればキルヒホッフの電流則は成り立つ。浮遊容量の影響は、コンデンサのインピーダンスが小さくなる高周波において大きくなる。

以上のように普通の電気回路理論は、比較的周波数の低い領域で利用できるものである。とは言つても、数 m 以内の回路であれば、周波数が MHz 程度まで利用が可能であろう。50Hz や 60Hz の商用周波数では問題なく利用できる。周波数の高い場合の電気回路は、分布定数回路として取り扱うことができる。これについても第7章で述べる。

### ○ 緩慢に変化する現象の解析

これまで磁界系の緩慢に変化する現象を電気回路との関連で考えてきた。本節では、偏微分方程式と境界条件を解くことで表皮効果とうず電流という重要な現象を本格的に解析してみよう。とは言つても多くの仮定なしに解析解を得るのは困難である。

図 6-18(a)に示すように電線に交流電源をつないで電流を流すと電流密度は電線表面に近いほど大きくなる。これを電流の表皮効果(skin effect)と言う。また、図(b)に示すように鉄心に巻いたコイルについては、電流が変化すると磁界が鉄心の表面に集まる。これを磁界の表皮効果という。表皮効果は電源の周波数が高いときに問題となる。

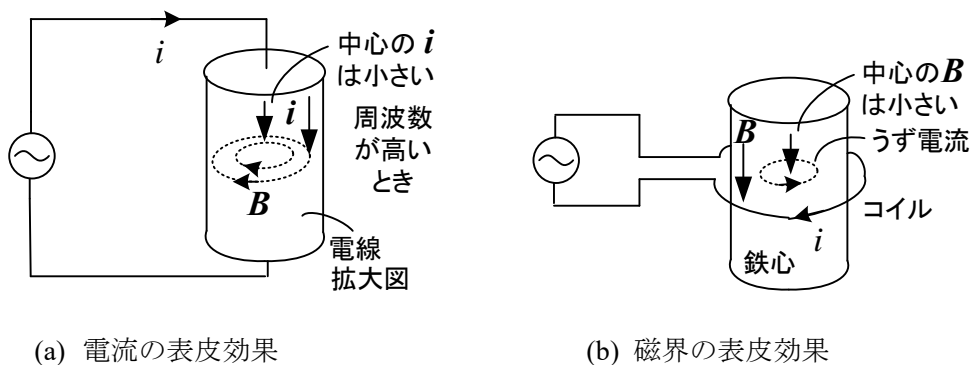


図 6-18 表皮効果

**例題 10** 図 6-19 に示すように半径  $a$ 、長さ  $l$ 、導電率  $\kappa$ 、透磁率  $\mu$  の円柱導体に電圧  $v = V_m \sin \omega t$  の交流電源をつないで電流を流す。導体に一様な電流が流れていると仮定して、電気回路として成立する式を求めよ。回路のインダクタンスとしては、導体の内部インダクタンス  $L_i$  のみ考慮するものとする。なお、回路の線は完全導体とする。

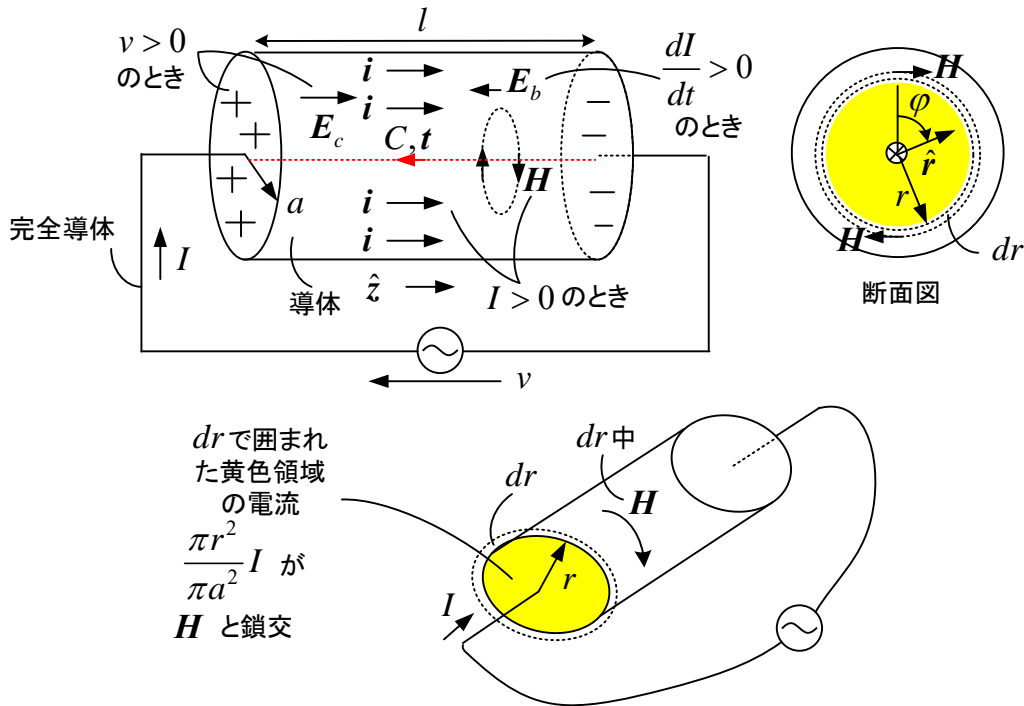


図 6-19 円柱導体の内部インダクタンス

(解) キルヒホッフの法則より，次式が成立するであろう。

$$V_m \sin \omega t = RI + L_i \frac{dI}{dt}$$

ここで，  $R = \frac{l}{\kappa \pi a^2}$  ，  $L_i = \frac{\mu l}{8\pi}$

詳しく述べよう。まず内部インダクタンス  $L_i$  を求める。

中心軸より  $r$  の点の磁界は，第 5 章例題 1 より，  $H_\phi = \frac{rI}{2\pi a^2}$  である。図の  $dr$  の部分の長方形

断面を通る磁束は  $\mu H_\phi l dr$  であり，この磁束が鎖交する電流は，黄色部分の電流で  $I$  より小さく，巻数は 1 回もなく  $r^2/a^2$  と考えられるから ( $I$  に鎖交して 1 回)，電流  $I$  との鎖交磁束  $d\phi$  は

$$d\phi = \frac{r^2}{a^2} \mu H_\phi l dr = \frac{\mu r^3 l I}{2\pi a^4} dr$$

従って，鎖交磁束  $\phi$  は

$$\phi = \int d\phi = \int_0^a \frac{\mu r^3 l I}{2\pi a^4} dr = \frac{\mu l I}{8\pi} \quad \therefore L_i = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu l}{8\pi}$$

導体端子の電圧が電源電圧に等しいから，導体内に積分路  $C, t$  を図の向きにとり次式が得られる。

$$\begin{aligned} v &= -\int_C \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = -\int_C (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{t} dl + \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl \\ &= -\int_C \frac{\mathbf{i}}{\kappa} \cdot \mathbf{t} dl + \int_C \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{t} dl = RI + L_i \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

ここで，導体中は一様な電流密度の仮定から，オームの法則より電界  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b$  も一様になる。

内部インダクタンス  $L_i$  をベクトルポテンシャルから求めることも可能である<sup>(29)</sup>。

**例題 11** 図 6-20 に示すように半径  $a$  の十分長い円柱導体に交流電源をつないで電流を流すとき、導体の電流と磁界を求めよ。導体の導電率を  $\kappa$  とする。

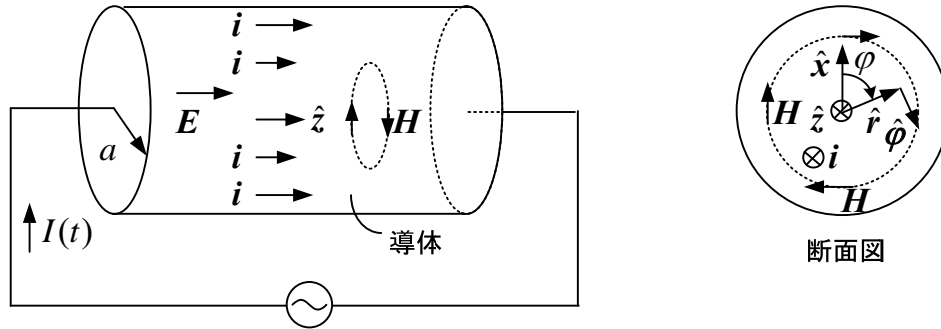


図 6-20 電流の表皮効果

(解) 断面図に示すように  $\mathbf{H} = H_r \hat{r} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z}$  の円柱座標系を用いる。(付 21)を用い、対称性より  $\mathbf{H}$  は  $\phi$  成分  $H_\phi$  しかなく、 $z$  が変化しても  $\mathbf{H}$  は同様だから  $\partial/\partial z = 0$  とおけるので

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right\} \hat{z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \hat{z} \end{aligned} \quad (6-33)$$

が得られる。電流は、十分長い円柱導体では  $z$  成分しかなく、オームの法則  $\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E}$  より

$$\mathbf{i} = i_r \hat{r} + i_\phi \hat{\phi} + i_z \hat{z} = \kappa E_z \hat{z} \quad (6-34)$$

と表せる。従って、③で変位電流を無視した  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}$  より次式が得られる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) = \kappa E_z \quad \therefore \frac{1}{r} H_\phi + \frac{\partial H_\phi}{\partial r} = \kappa E_z \quad (6-35)$$

次に、(6-34)より電界は  $z$  成分  $E_z$  しかないと考えられ、 $\phi$  が変化しても  $\mathbf{E}$  は同様だから  $\partial/\partial \phi = 0$  とおいて

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right\} \hat{z} \\ &= -\frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6-36)$$

となる。従って、④の  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  より次式が得られる。

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \quad (6-37)$$

ここで、交流電源が接続され時間が十分経過した定常状態を考えると、電界や磁界も電源と同じ周波数で変化していると考えられるので、回路で行ったようにフェーズ表示を用いることが可

能となる。ここでは、 $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{A} = A_m e^{j\varphi}$  に対応させる。 $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$  と置き換えるだけで、変数から時間の項を除去できる。この結果(6-35), (6-37)より

$$\frac{1}{r} \dot{H}_\varphi + \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial r} = \kappa \dot{E}_z$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = j\omega\mu \dot{H}_\varphi$$

がえられる。これらの式より、 $\dot{H}_\varphi$  を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = j\omega\kappa\mu \dot{E}_z$$

$\dot{E}_z$  は  $r$  だけの関数なので、偏微分を常微分に置き換えて良い。よって

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{E}_z}{dr} + k^2 \dot{E}_z = 0 \quad (6-38)$$

ここで、 $k^2 = -j\omega\kappa\mu$  である。 $\sqrt{-j} = (e^{-j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$  だから、

$$k = (1-j)\sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}} = \frac{1-j}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$$

これはベッセルの微分方程式(Bessel's differential equation) とよばれている。

まず、 $r$  が比較的大きく左辺の第2項を無視した次式の解は容易に求められる。

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dr^2} + k^2 \dot{E}_z = 0 \quad (6-39)$$

特性方程式の根は、 $s^2 = -k^2$  より、 $s = \pm jk \therefore s = \pm(1+j)/\delta$  である。

$$\dot{E}_z = K_1 e^{(1+j)r/\delta} + K_2 e^{-(1+j)r/\delta} \quad (6-40)$$

となる。 $r$  が比較的大きい場合には、右辺第1項が求める解である。 $r = a$  のとき、 $\dot{E}_z = E_m$  (実数) と仮定すると

$$E_m = K_1 e^{(1+j)a/\delta} \quad \therefore K_1 = E_m e^{-(1+j)a/\delta}$$

よって

$$\dot{E}_z = E_m e^{(1+j)(r-a)/\delta} \quad (6-41)$$

磁界は

$$\dot{H}_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = \frac{1+j}{j\omega\mu\delta} E_m e^{(1+j)(r-a)/\delta}$$

瞬時値は  $e^{j\omega t}$  を掛けて実部をとり



$$E_z = E_m e^{-(a-r)/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta}\right) \quad (6-42)$$

電流密度は次式で表せる。

$$i_z = \kappa E_m e^{-(a-r)/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta}\right)$$

磁界は

$$H_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\omega\mu\delta} E_m e^{-(a-r)/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

導体表面 ( $r = a$ ) に比べ、導体中は電流密度が減衰し、位相も変化することが分る。  $\delta$  は表皮の厚さ(skin depth)とよばれている。高周波になると、 $\delta$  が小さくなり、電流は導体表面に集中する。これが電流の表皮効果である。銅の場合、

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \times 5.9 \times 10^7 \times 1.257 \times 10^{-6}}} = 0.066 \sqrt{\frac{1}{f}} \quad [\text{m}]$$

$f = 60\text{Hz}$  のとき、 $\delta = 8.5 \text{ mm}$  となる。

(6-38)のベッセルの微分方程式を解くと次式となる<sup>(3),(28)</sup>。 $\dot{I}$  は  $I(t)$  のフェーザ表示である。

$$\dot{E}_z = \frac{k \dot{I}}{2\pi a \kappa} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}}{2\pi a} \frac{J_1(kr)}{J_1(ka)} \quad (r = a \text{ のとき周回積分の法則})$$

$$\dot{I}_z = \kappa \dot{E}_z$$

$J_0, J_1$  はそれぞれ 0 次及び第 1 次のベッセル関数(Bessel function)である。この導体の等価なインピーダンスは、次式で求められている<sup>(3)</sup>。

$$R + j\omega L_i = \frac{l \dot{E}_z(r=a)}{\dot{I}} = \frac{lk}{2\pi a \kappa} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \quad (6-43)$$

周波数が低いとき、この値は例題 10 の値と一致することが示されている<sup>(3)</sup>。

(別解) ベクトルポテンシャルを用いて解析する。(2-30)で  $\dot{\mathbf{i}}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{0}$  とおくと、(2-32)は次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A} + \mu\kappa V) \quad (6-44)$$

この場合、ローレンツゲージは  $\text{grad}$  の括弧の中を 0 とおいて次式となる。

$$\text{div} \mathbf{A} + \mu\kappa V = 0 \quad (6-45)$$

(6-45)を(6-44)に代入すると次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6-46)$$

これは拡散方程式(diffusion equation)とよばれ、熱が伝わる場合も同じ形になる。

この場合も円柱座標系を用いる。電流については、 $z$ 成分しかないので、(5-52)よりベクトルポテンシャルも  $z$ 成分  $A_z$  しかなく、 $r$ の関数と考えられる。(付 20)より

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (6-47)$$

となり、(6-45)より  $\kappa \neq 0$  の導体で

$$V = 0 \quad (6-48)$$

が得られる。

(6-46)より、(付 23)を用いて次式が得られる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \right) = \mu \kappa \frac{\partial A_z(r)}{\partial t} \quad (6-49)$$

$$\therefore \frac{d^2 A_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} = \mu \kappa \frac{\partial A_z(r)}{\partial t} \quad (6-50)$$

フェーザ表示により時間項を除くと

$$\frac{d^2 \dot{A}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} = j\omega \mu \kappa \dot{A}_z \quad (6-51)$$

これは(6-38)と同じ形であるから同様に解くことができる。ここでは、 $r$ が比較的大きく左辺の第2項を無視した解を求めよう。

$$\dot{A}_z = \dot{A}_m e^{(1+j)(r-a)/\delta} \quad (6-52)$$

電界は、(6-48)より

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6-53)$$

フェーザ表示すると

$$\dot{\mathbf{E}}_z = -j\omega \dot{A}_z$$

$r = a$  のとき、 $\dot{\mathbf{E}}_z = \mathbf{E}_m$  とすると、 $\mathbf{E}_m = -j\omega \dot{A}_m$   $\therefore \dot{A}_m = j\mathbf{E}_m / \omega$  となり

$$\dot{\mathbf{E}}_z = \mathbf{E}_m e^{(1+j)(r-a)/\delta}$$

が得られる。これは、(6-41)に一致する。他の量も同様に得られる。

**例題 12** 図 6-21 に示すように単位長あたり  $n$  回巻きの十分長いソレノイドがある。交流電流を流すとき鉄心の磁界と電流を求めよ。

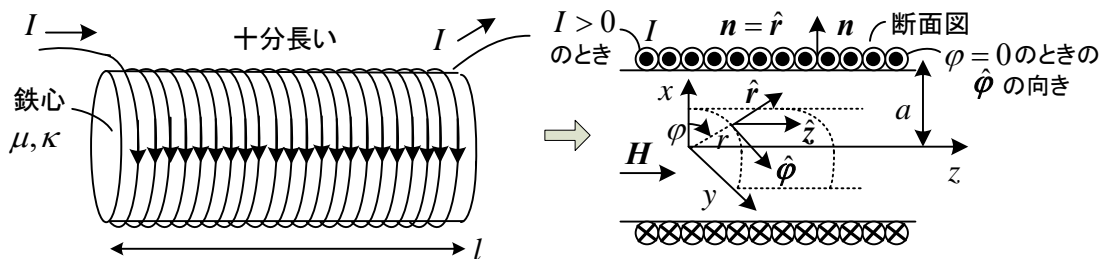


図 6-21 磁束の表皮効果

(解)  $\mathbf{H} = H_r \hat{r} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z}$  の円柱座標系を用いる。対称性より  $\mathbf{H}$  は  $z$ 成分  $H_z$  しかなく、 $H_z$

は対称性より  $r$  のみの関数と考えられる。(付 21)を用い,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{\partial H_z}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}\quad (6-54)$$

となる。鉄心中の電流については、 $\varphi$  成分しかないのでオームの法則より

$$\mathbf{i} = i_r \hat{\mathbf{r}} + i_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + i_z \hat{\mathbf{z}} = \kappa E_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (6-55)$$

と表せる。従って、③で変位電流を無視して、次式が得られる。

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \kappa E_\varphi \quad (6-56)$$

次に、④の  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  において、電流は  $\varphi$  成分しかないので、導体中ではオームの法則より

電界も  $\varphi$  成分  $E_\varphi$  しかないと考えられ、 $z$  が変化しても  $\mathbf{E}$  は同様だから  $\partial/\partial z = 0$  とおいて

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

となる。従って、次式が得られる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (6-57)$$

ここで、交流電源が接続され時間が十分経過した定常状態を考えると、電界や磁界も電源と同じ周波数で変化していると考えられるので、回路で行ったようにフェーザ表示を用いることが可能となる。 $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$  と置き換えるだけで、変数から時間の項を除去できる。この結果(6-56)、(6-57)より

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} &= \kappa \dot{E}_\varphi \\ \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \dot{E}_\varphi &= -j\omega \mu \dot{H}_z\end{aligned}$$

がえられる。これらの式より、 $\dot{E}_\varphi$  を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = j\omega \kappa \mu \dot{H}_z$$

$\dot{H}_z$  は  $r$  だけの関数なので、偏微分を常微分に置き換えて良い。よって

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{H}_z}{dr} = j\omega \kappa \mu \dot{H}_z \quad (6-58)$$

これはベッセルの微分方程式である。ここでは、 $r$  が比較的大きく左辺の第 2 項を無視した次式

の解を求めよう。

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dr^2} = j\omega\kappa\mu\dot{H}_z \quad (6-59)$$

例題 11 と同様に

$$\dot{H}_z = K_1 e^{(1+j)r/\delta} + K_2 e^{-(1+j)r/\delta} \quad (6-60)$$

となる。 $r$  が比較的大きい場合には、右辺第 1 項が求める解である。 $r = a$  のとき、 $\dot{H}_z = H_m$  (実数) と仮定すると

$$H_m = K_1 e^{(1+j)a/\delta} \quad \therefore K_1 = H_m e^{-(1+j)a/\delta}$$

よって

$$\dot{H}_z = H_m e^{(1+j)(r-a)/\delta}$$

電界は(6-56)より

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = -\frac{1+j}{\kappa\delta} H_m e^{(1+j)(r-a)/\delta}$$

鉄心表面 ( $r = a$ ) に比べ、鉄心中は磁界、電界が減衰する。境界条件(2-58)より、 $-\mathbf{n} \times \mathbf{H} = nI\hat{\phi}$  (単位長あたりの面電流密度 A/m)  $\therefore -\mathbf{n} \times (H_m \hat{\mathbf{z}}) = nI\hat{\phi} \quad \therefore H_m = nI$  となる。

次に、図 6-22(a)に示すように金属板に流れるうず電流について考える。金属板がコイルである場合はこの章の最初に述べたが、これが金属板であっても同じように電磁誘導の法則により磁界の変化を打ち消すようなうず電流(eddy current)が流れる。うずになる理由は  $\text{div } \mathbf{i} = 0$  だからである。磁石を動かすかわりに図(b)のようにコイルに交流電流を流すと時間とともに磁界  $\mathbf{B}$  が変化するため金属板にうず電流が流れる。

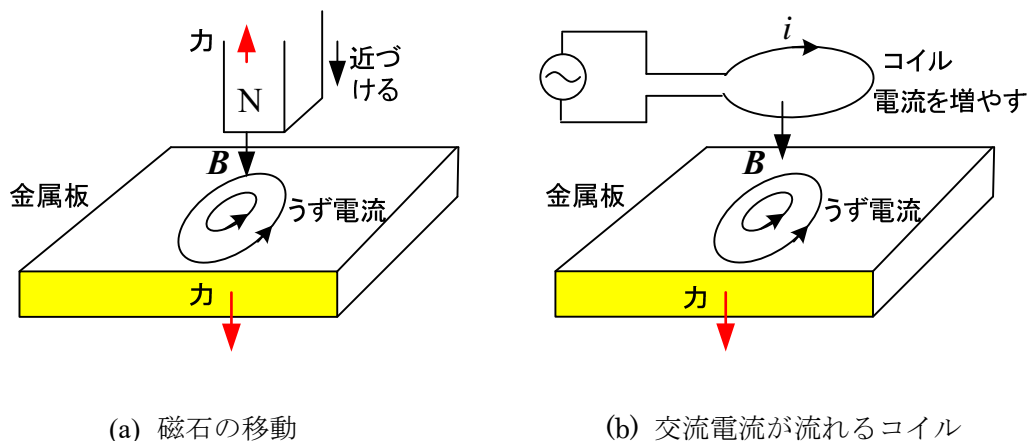


図 6-22 うず電流

図 6-23(a)は磁石を金属面に平行に移動した場合である。この場合、これから磁界が強くなる磁石の右端と磁界が弱くなる左端では、うず電流の向きが図のように逆になる。これも電磁誘導の

法則から理解できる。磁石の真下の電流はどちらのうず電流も手前向きなので、フレミングの左手の法則より金属板は右向きの力を受ける。一方、磁石はその反作用として左向きの力を受ける。これは広く利用されている誘導モータ(induction motor)の原理である。ただ、実際に磁石を動かすことは現実的でないので、スイッチをつけたコイルを3つ準備し、 $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots$ と繰り返すことで、移動磁界を作る。スイッチはトランジスタを使って信号でオン、オフができる。

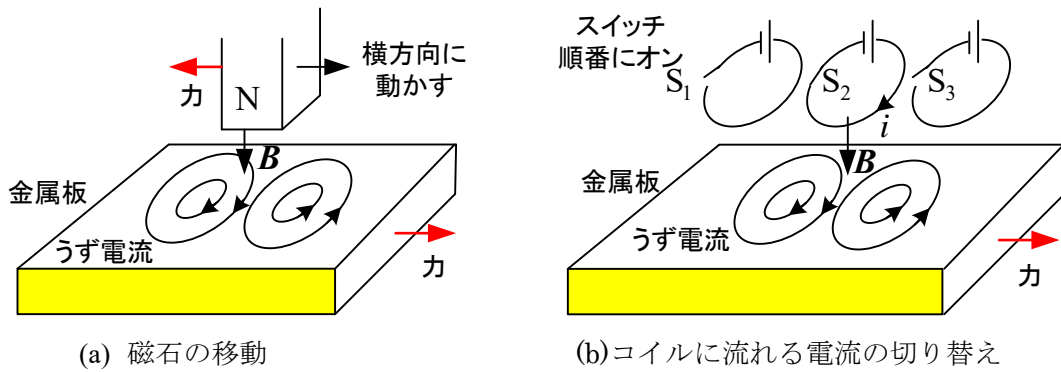


図 6-23 移動磁界によるうず電流 (誘導モータの原理)

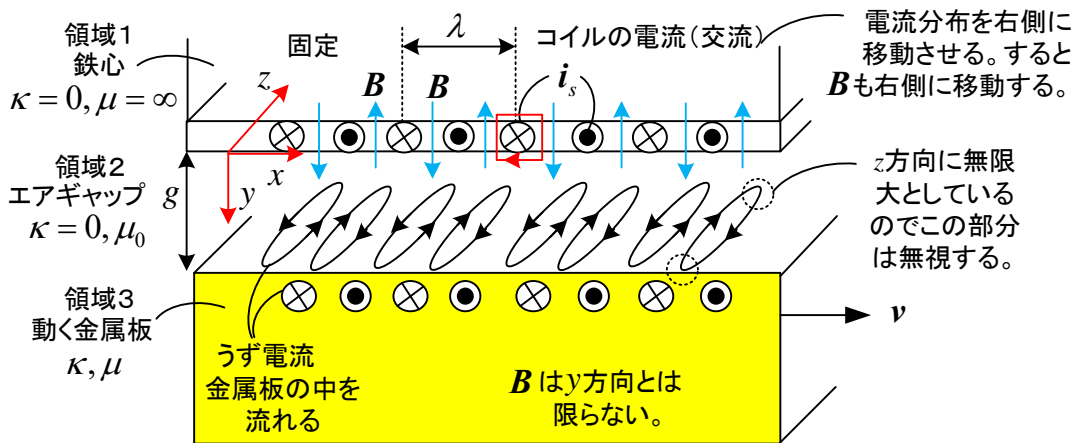


図 6-24 リニア誘導モータの原理

図 6-24 はリニア誘導モータを簡単にモデル化している。固定したコイルに既知の強制電流  $i_0$  を流す。 $i_0$  は交流電流で、この電流によって図 6-23(b)に示した右方向に移動磁界  $B$  を作る事ができる。実際には三相巻線に三相交流電流を流すことで実現する。三相交流はインバータで作る、そこにトランジスタスイッチが使われているのである。この磁界が狭いエアギャップ(空気)を通して金属板を通過すると、電磁誘導の法則で金属板にうず電流が流れる。移動磁界とうず電流により金属板に右方向の力が働いて速度  $v$  で動くことになる(実際は金属板を固定しておいて、その反作用として鉄心部分を動かす)。

解析において、以下の仮定を設ける。

仮定 1 金属板は  $x$  方向に一定速度  $v_x$  で動いている。

仮定 2 全ての方向に無限に長い。

仮定 3 仮定 2 を考慮しコイルに流れる電流は  $z$  方向のみとする。コイルの層は十分薄いとす。

仮定 4 仮定 2 を考慮し，うず電流も  $z$  方向のみとする。

仮定 5 鉄心の透磁率は  $\infty$  とする。

変位電流を無視するとき，電流による磁界は一般に③と⑧より

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6-61)$$

電界は，(2-26)で述べたようにクーロン電界と誘導電界の和として次式で表される。

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

(2-25)より，ベクトルポテンシャルから磁束密度が求められる。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

これらの式を用い，(6-61)を  $\mathbf{A}, V$  の式にすると (⑦も使用)

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mu \mathbf{i}_0 + \mu \kappa \left( -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

が得られる。ここで，(付 13)の

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を用いると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{i}_0 + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A} + \mu \kappa V) \quad (6-62)$$

となる。①については，⑥を用い

$$\varepsilon \text{div} \left( -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

である。ここで(付 13)の

$$\text{div}(\text{grad}V) = \nabla^2 V$$

を用いると，次式が得られる。

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (6-63)$$

ここで， $\mathbf{A}$ ， $V$  に(6-62)の  $\text{grad}$  の( )の中を  $\mathbf{0}$  とおいた次式のローレンツゲージを課す。

$$\text{div} \mathbf{A} + \mu \kappa V = 0 \quad (6-64)$$

このとき(6-62)，(6-63)は次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \kappa \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{i}_0 \quad (6-65)$$

$$\nabla^2 V - \mu \kappa \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (6-66)$$

これは，(2-35)，(2-36)で，速度起電力を考慮し，変位電流を無視したときの式である。

(6-65)は，領域ごとに以下の式が成立つ。

領域 1 鉄心中： $\kappa = 0, \mu = \infty, \mathbf{H} = \mathbf{0}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

領域 2 空气中： $\kappa = 0, \mu = \mu_0, \mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (6-67)$$

領域3 動く金属板中:  $\kappa = \kappa, \mu = \mu, \mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu\kappa \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (6-68)$$

基本的には, (6-67), (6-68)を第2章で述べた境界条件を考慮して解くことで, ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を求めることになる。 $\mathbf{A}$ が決まると他の量が求められる。強制電流  $\mathbf{i}_0[\text{A/m}^2]$ は面電流密度  $\mathbf{i}_s[\text{A/m}]$ として境界条件に考慮できる。すなわち, 各領域で  $\mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$  とできる。

仮定2,3,4より, 電流が  $z$ 成分のみなので, ベクトルポテンシャルも  $z$ 成分のみであり, また  $z$ 方向に無限に長いと考えているので,  $A_z$ は  $z$ の関数でないと考えられる。従って

$$\mathbf{A} = A_z(x, y, t)\hat{\mathbf{z}} \quad (6-69)$$

(6-69)より,

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (6-70)$$

となる。よって(6-64)より  $\kappa \neq 0$ の空間では

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (6-71)$$

だから

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6-72)$$

となり, 導体中の電界は誘導電界のみとなる。速度は

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} \quad (6-73)$$

(6-69), (6-73)を(6-68)に代入すると,  $z$ 成分のみ0でなく, よく知られた次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \mu\kappa \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (6-74)$$

$$\therefore \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & 0 & 0 \\ \partial A_z / \partial y & -\partial A_z / \partial x & 0 \end{vmatrix} = -v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}}$$

コイルを流れる電流はシート電流として次式の面電流密度で表わす。これは高校でも習う空間を  $x$ 方向に移動する波の式と同じである。単位に注意しよう。

$$\mathbf{i}_s = I_0 \cos(\omega t - \beta x) \hat{\mathbf{z}} \quad [\text{A/m}] \quad (6-75)$$

ここで,  $\beta = 2\pi / \lambda$

境界条件として以下の関係式が得られる。

$$(1) \quad y = 0 : H_{x2} = -I_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

(2-58)を適用する。鉄心の  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{n}$ は1から2に向けた向きだから  $\hat{\mathbf{y}}$ の向きである。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 1 & 0 \\ H_{x2} & H_{y2} & 0 \end{vmatrix} = -H_{x2} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{i}_s \quad \text{より。} \quad \mathbf{i}_s \text{の周りで周回積分則を適用してもよい。}$$

$$(2) \quad y = g : B_{y2} = B_{y3} \quad (2-59) \text{より}$$

$$(3) \quad y = g : H_{x2} = H_{x3} \quad \text{面電流なし, (2-58)より}$$

$$(4) \quad y \rightarrow \infty : A_{z3} = 0$$

ベクトルポテンシャルは電流によって作られるから、定常状態ではベクトルポテンシャルに  $\cos(\omega t - \beta x)$  の項が含まれると考えられよう。従って

$$A_z(x, y, t) = A_z(y) \cos(\omega t - \beta x + \theta) \hat{z} \quad (6-76)$$

とおく。次式の複素表示を考える。

$$\dot{A}_z(x, y, t) \equiv \dot{A}_z(y) e^{j(\omega t - \beta x)} \quad \text{ただし, } \dot{A}_z(y) \equiv A_z(y) e^{j\theta} \quad (6-77)$$

逆に,

$$A_z(x, y, t) = \text{Re} \{ \dot{A}_z(x, y, t) \} \quad (6-78)$$

(6-74)で  $A_z \rightarrow \dot{A}_z(x, y, t)$  と置き換え ( $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ ,  $\partial/\partial x \rightarrow -j\beta$ ),  $e^{j(\omega t - \beta x)}$  で割ると

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_z(y)}{\partial y^2} = \alpha^2 \dot{A}_z(y) \quad \text{ただし, } \alpha^2 = \beta^2 + j\mu\kappa(\omega - \beta v_x) \quad (6-79)$$

$\dot{A}_z(y)$  は  $y$  のみの関数であるから、 $\partial/\partial y$  を  $d/dy$  とおける。

領域 2 では  $\kappa = 0$  だから

$$\frac{d^2 \dot{A}_{z2}(y)}{dy^2} = \beta^2 \dot{A}_{z2}(y) \quad (6-80)$$

領域 3 では

$$\frac{d^2 \dot{A}_{z3}(y)}{dy^2} = \alpha^2 \dot{A}_{z3}(y) \quad (6-81)$$

となる。一般解は次式で与えられる。

$$\dot{A}_{z2}(y) = k_1 e^{\beta y} + k_2 e^{-\beta y} \quad (6-82)$$

$$\dot{A}_{z3}(y) = k_3 e^{\alpha y} + k_4 e^{-\alpha y} \quad (6-83)$$

従って, (6-77)より

$$\dot{A}_{z2}(x, y, t) = (k_1 e^{\beta y} + k_2 e^{-\beta y}) e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (6-84)$$

$$\dot{A}_{z3}(x, y, t) = (k_3 e^{\alpha y} + k_4 e^{-\alpha y}) e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (6-85)$$

ベクトルポテンシャルが求まったので、磁束密度  $\mathbf{B}$  と磁界  $\mathbf{H}$  を求めよう。

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(x, y, t) \end{vmatrix} = \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial x} \hat{y}$$

$\mathbf{B}$  についても複素表示を考えると

$$\dot{B}_{x2} = \frac{\partial \dot{A}_{z2}(x, y, t)}{\partial y} = (k_1 \beta e^{\beta y} - k_2 \beta e^{-\beta y}) e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (6-86)$$



$$\dot{B}_{y2} = -\frac{\partial \dot{A}_{z2}(x, y, t)}{\partial x} = j\beta(k_1 e^{\beta y} + k_2 e^{-\beta y})e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (6-87)$$

$$\dot{B}_{x3} = \frac{\partial \dot{A}_{z3}(x, y, t)}{\partial y} = (k_3 \alpha e^{\alpha y} - k_4 \alpha e^{-\alpha y})e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (6-88)$$

$$\dot{B}_{y3} = -\frac{\partial \dot{A}_{z3}(x, y, t)}{\partial x} = j\beta(k_3 e^{\alpha y} + k_4 e^{-\alpha y})e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (6-89)$$

磁界については

$$\dot{H}_{x2} = \frac{1}{\mu_0} \dot{B}_{x2}, \quad \dot{H}_{y2} = \frac{1}{\mu_0} \dot{B}_{y2}, \quad \dot{H}_{x3} = \frac{1}{\mu} \dot{B}_{x3}, \quad \dot{H}_{y3} = \frac{1}{\mu} \dot{B}_{y3}$$

境界条件を複素表示に直して

$$(1) \quad y=0: \dot{H}_{x2} = -I_0 e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(2) \quad y=g: \dot{B}_{y2} = \dot{B}_{y3}$$

$$(3) \quad y=g: \dot{H}_{x2} = \dot{H}_{x3}$$

$$(4) \quad y \rightarrow \infty: \dot{A}_{z3} = 0$$

であるから、次式の関係が得られる。

$$(1) \quad \frac{\beta}{\mu_0} (k_1 - k_2) = -I_0$$

$$(2) \quad k_1 e^{\beta g} + k_2 e^{-\beta g} = k_3 e^{\alpha g} + k_4 e^{-\alpha g} \quad (\text{これは } \dot{A}_{z2}(g) = \dot{A}_{z3}(g) \text{ から得られる。})$$

$$(3) \quad \frac{\beta}{\mu_0} (k_1 e^{\beta g} - k_2 e^{-\beta g}) = \frac{\alpha}{\mu} (k_3 e^{\alpha g} - k_4 e^{-\alpha g})$$

$$(4) \quad k_3 = 0$$

以上により、 $k_1, k_2, k_3, k_4$  を決定できる。金属板について、複素表示は  $k_3 = 0$  より

$$\dot{A}_3 = \dot{A}_{z3}(x, y, t) \hat{z} = k_4 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{z} \quad (6-90)$$

$$\dot{B}_3 = \dot{B}_{x3} \hat{x} + \dot{B}_{y3} \hat{y} = -k_4 \alpha e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{x} + j\beta k_4 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{y} \quad (6-91)$$

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_{z3}(x, y, t) \hat{z} = -j\omega \dot{A}_{z3}(x, y, t) \hat{z} = -j\omega k_4 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{z} \quad (6-72) \text{より} \quad (6-92)$$

$$\dot{i}_3 = \kappa(\dot{E}_3 + \mathbf{v} \times \dot{B}_3) \quad (6-61) \text{より} \quad (6-93)$$

それぞれの実際の瞬時値は実部をとればよい。金属板に働く力密度は  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{B}_3$  で求められる。複素表示から直接求める場合には、電気回路の電力と同じような工夫が必要である。

# 第7章 電磁波 -空間に分布した回路-

この章では急速に変化する現象として電磁波について考える。このためにはマクスウェルの方程式を一応全部使って問題を解く必要がある。式がたくさん出て難しく感じるかもしれないが、本テキストでは基本的な問題しか扱わないので食わず嫌いにならないでほしい。電磁波を考える場合、電気回路（分布定数回路）による解法も利用可能である。もちろんマクスウェルの方程式には及ばないが、線路を使った通信で重要な TEM 波では大いに役に立つ。本テキストでは、電気回路による解法とマクスウェルの方程式による解法を比較して述べることで、電磁波の基本が理解できるように解説しよう。電位、ベクトルポテンシャルについても理解を深める。導波管や空間に飛び出す電磁波に関しては、TEM 波のように回路理論で解析できないが、これまでの学習の頂点にあるので、マクスウェルの方程式による解析を示す。

## ○ 電気回路の基本式

平行 2 線の線路を考える。

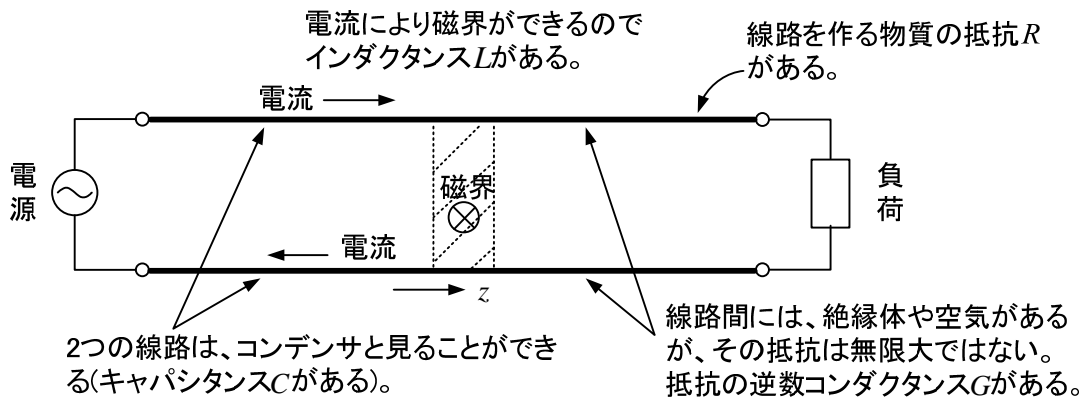


図 7-1 電線やケーブルはどんな素子で表せるか？

これまでの電線では、上記の  $R$ 、 $L$ 、 $C$ 、 $G$  は全て無視し、 $0$  と考えていた。電源からの座標を  $z$  とし、短い区間  $\Delta z$  をとると、その間の等価回路は図 7-3 のように考えられる。

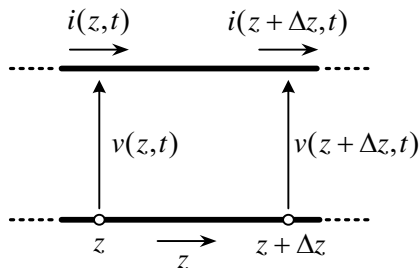


図 7-2 微小区間の電圧、電流

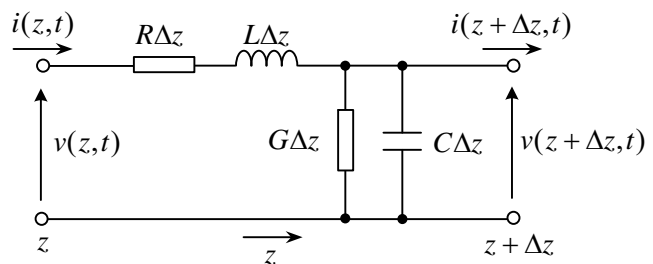


図 7-3 等価回路

抵抗は線路の長さに比例するが、1mに換算した抵抗を(往復分)  $R [\Omega/m]$ とすると、微小区間  $\Delta z$ では、 $R\Delta z$ となる。インダクタンスも長さに比例し、1m当りのインダクタンス(往復分)を  $L [H/m]$ とすると、 $\Delta z$ 間では $L\Delta z$ となる(付録参照)。静電容量も長さに比例し、1m当り  $C [F/m]$ とすると、 $\Delta z$ 間では $C\Delta z$ となる。線路間のコンダクタンスは長さに比例し、1m当り  $G [S/m]$ とすると、 $\Delta z$ 間では $G\Delta z$ となる。従って、特に線路が長い場合や周波数が高い場合に電圧や電流に影響を与えるので、これらの素子を無視できないことがわかる。電圧や電流が時間  $t$  だけの関数ではなく位置  $z$  の関数にもなっているのは、等価回路から判るように場所によって値が異なるからである。このような回路は**分布定数回路(distributed constant circuit)**とよばれる。

等価回路より、

$$v(z,t) = R\Delta z i(z,t) + L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + v(z+\Delta z,t) \quad (7-1)$$

偏微分したのは電流が位置と時間の関数だからである。 $\Delta z$ で割り

$$\frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z} = -R i(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (7-2)$$

ここで、 $\Delta z \rightarrow 0$ とすると

$$\boxed{-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = R i(z,t) + L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}} \quad (7-3)$$

電流については、等価回路より

$$i(z+\Delta z,t) = i(z,t) - G\Delta z v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} \quad (7-4)$$

偏微分したのは電圧が位置と時間の関数だからである。 $\Delta z$ で割り

$$\frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} = -G v(z+\Delta z,t) - C \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

ここで、 $\Delta z \rightarrow 0$ とすると

$$\boxed{-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G v(z,t) + C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}} \quad (7-5)$$

(7-3), (7-5)は、分布定数回路の出発点となる。 $z$ 軸のみの1次元空間でのモデルになる。

図 7-4 の電源電圧を  $v_s(t) = V_s \cos \omega t$  とすると、電源から  $z[m]$  離れた点の電圧  $v(z,t)$ 、電流  $i(z,t)$  は、定常状態では次式で表される。

$$v(z,t) = V_m(z) \cos(\omega t + \theta_v(z)) \quad (7-6)$$

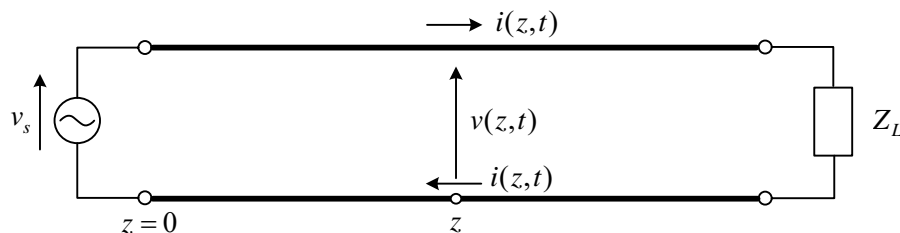


図 7-4 分布定数回路(線路)に交流電源を接続

$$i(z,t) = I_m(z) \cos(\omega t + \theta_i(z)) \quad (7-7)$$

すなわち、場所によって振幅や位相は異なるが、電源と同じ周波数の正弦波である。分布定数回路も一定の  $R, L, C, G$  が集まってできた回路であるから、交流電源がつながった定常状態では一般の交流回路と同様と考えてよいであろう。(7-6), (7-7)に対するフェーザ(phasor)を

$$\dot{V}(z) \equiv V_m(z) e^{j\theta_v(z)} \quad (7-8)$$

$$\dot{I}(z) \equiv I_m(z) e^{j\theta_i(z)} \quad (7-9)$$

と定義する。通信関係では瞬時値を  $\cos$  で表し、 $\sqrt{2}$  で割らない形で定義することが多いので、それに従う。場所によってフェーザが異なることに注意しよう。各  $z$  において回路素子があると思えばよい。フェーザから瞬時値を求めるには、

$$v(z,t) = \text{Re}(\dot{V}(z) e^{j\omega t}) \quad (7-10)$$

$$i(z,t) = \text{Re}(\dot{I}(z) e^{j\omega t}) \quad (7-11)$$

ここで、 $\text{Re}()$  は実部を意味する。(7-6), (7-7)を  $\sin$  で表すと、虚部( $\text{Im}$ )をとれば良く、以下の理論は同じである。

(7-10), (7-11)を(7-3), (7-5)に代入すると、次式のフェーザ表示式が得られる。このとき、 $\partial/\partial z$  はフェーザが  $z$  のみの関数だから  $d/dz$ ,  $\partial/\partial t$  は時間に関しての偏微分なので  $j\omega$  が掛けられる。

$$-\frac{d\dot{V}(z)}{dz} = R\dot{I}(z) + j\omega L\dot{I}(z) \quad (7-12)$$

$$-\frac{d\dot{I}(z)}{dz} = G\dot{V}(z) + j\omega C\dot{V}(z) \quad (7-13)$$

これは、 $\text{Re}(-\frac{\partial \dot{V}(z)}{\partial z} e^{j\omega t}) = \text{Re}(R \dot{I}(z) e^{j\omega t}) + \text{Re}(L \frac{\partial}{\partial t} (\dot{I}(z) e^{j\omega t}))$  が任意の  $t$  で成り立つこと

から、 $e^{j\omega t} = 1, e^{j\omega t} = j$  とすれば、それぞれ実部、虚部が等しくなることから得られる。

一方の式を  $z$  で微分し、他方の式を代入すれば

$$\frac{d^2 \dot{V}(z)}{dz^2} = \gamma^2 \dot{V}(z) \quad (7-14)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}(z)}{dz^2} = \gamma^2 \dot{I}(z) \quad (7-15)$$

$$\text{ただし、} \gamma \text{ (ガンマ) は、} \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (7-16)$$

(7-14)を解くと、特性方程式は  $p^2 = \gamma^2 \quad \therefore p = \pm \gamma$  だから

$$\dot{V}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} \quad (7-17)$$

(7-17)を(7-12)に代入して、

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) \quad (7-18)$$

となる。 $A, B$ は線路両端の条件による決る定数（一般に複素数）である。ここで、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega] \quad (7-19)$$

$Z_0$ は特性インピーダンス(characteristic impedance),  $\gamma$ は伝搬定数(propagation constant)とよばれる。

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \alpha \geq 0 \quad (7-20)$$

において、 $\alpha$ を減衰定数(attenuation constant),  $\beta$ を位相定数(phase constant)とよぶ。(7-16)の両辺を2乗して、実部と虚部を等しいとおくことにより次式が得られる。

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG) \right\}} \quad (7-21)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (\omega^2 LC - RG) \right\}} \quad (7-22)$$

(7-17), (7-18)は、分布定数回路の基本となる重要な公式である。実際の瞬時値は、(7-10), (7-11)に代入して求まる。電圧については次式となる。

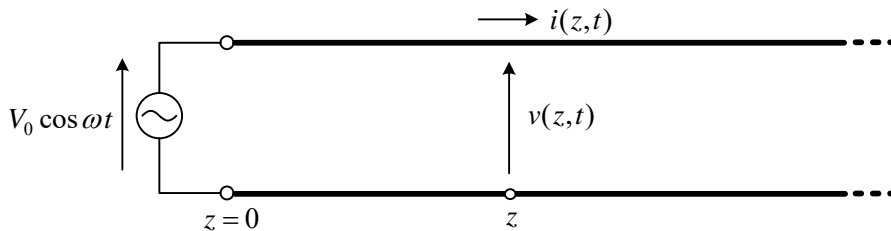
$$\begin{aligned} v(z, t) &= \text{Re}(\dot{V}(z)e^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}((Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z})e^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}(Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}) + \text{Re}(Be^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}) \end{aligned} \quad (7-23)$$

第1項は $z$ が増加する方向に進む波、第2項は逆に $z$ が減少する方向に進む波を表し、一般にはこれらの波を加え合わせたものとなる。一般に、 $A, B$ は複素数なので、注意すること。

電流については、第1項、第2項とも特性インピーダンス $Z_0$ で割ることで、(7-18)より同様に得られる。

**例題1** 図の半無限長線路で、 $z$ 点の電圧と電流を求めよ。

但し、特性インピーダンス $Z_0$ 、伝搬定数 $\gamma = \alpha + j\beta$  ( $\alpha > 0$ )とする。



(解)  $v(z,t)$  のフェーザ  $\dot{V}(z)$  は次式で与えられる。

$$\dot{V}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} = Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + Be^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (1)$$

一般に波源が有限の領域にある場合は、無限遠では外向きの波しか存在しない放射条件がある。この場合、電源は限られた領域にあるから、 $z$  が負の向きに伝搬する波はなく、 $B=0$  でなくてはならない。よって、(1)より、

$$\dot{V}(z) = Ae^{-\gamma z}$$

境界条件として、 $z=0$  で、 $\dot{V}(0) = V_0$  (実数) だから、 $A = V_0$

$$\therefore \dot{V}(z) = V_0 e^{-\gamma z} = V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (2)$$

電流は、

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3)$$

(2)より、

$$v(z,t) = \text{Re}(\dot{V}(z)e^{j\omega t}) = \text{Re}(V_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}) = V_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (4)$$

(3)より、

$$\begin{aligned} i(z,t) &= \text{Re}(\dot{I}(z)e^{j\omega t}) \\ &= \frac{V_0}{|Z_0|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \arg Z_0) \quad \because Z_0 = |Z_0| e^{j\arg Z_0} \end{aligned} \quad (5)$$

$t=0$  のとき、 $v = V_0 e^{-\alpha z} \cos \beta z$

$t = \frac{T}{4}$  ( $T = 2\pi / \omega$ : 周期) のとき、 $v = V_0 e^{-\alpha z} \cos(\frac{\pi}{2} - \beta z) = V_0 e^{-\alpha z} \sin \beta z$

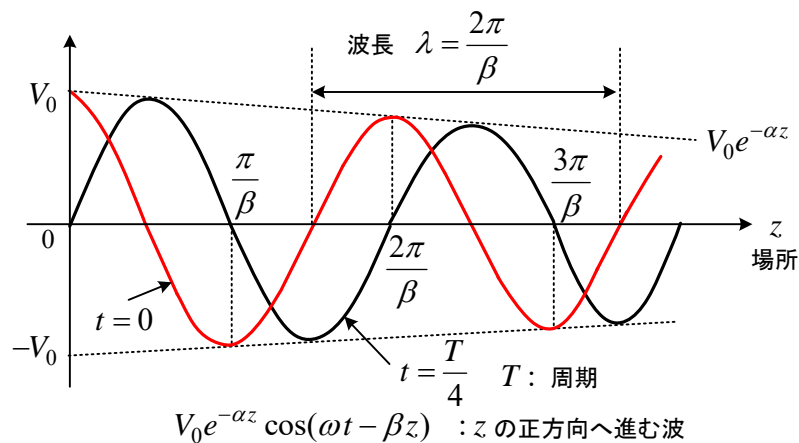


図 7-5 進行波(travelling wave)

$\cos(\omega t - \beta z)$  について

- ある点  $z = z_0$  では  $\cos(\omega t - \beta z_0)$   $\therefore$  周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (時間について, 正弦波)
- ある時間  $t = t_0$  では,  $\cos(\omega t_0 - \beta z)$   $\therefore$  波長  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$  (場所について, 正弦波)
- $\beta$  は  $2\pi$  [m] 中にある波の数になるから波数(wave number)ともよばれる。
- 図より, 時間が  $T/4$  変わると, 波は  $z$  方向に  $\lambda/4$  進行している。

よって, 波の速度  $v_p$  は位相速度(phase velocity)とよばれ,

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{\beta} \quad [\text{m/s}] \quad (7-24)$$

となる。 $\omega t - \beta z = \text{一定}$  なら  $\cos$  の値が変化しないから, 両辺を  $t$  で微分して,  $\omega - \beta dz/dt = 0$  より求めても良い。

$v_p = c$  (真空中の光速) とすると,  $f = 1\text{MHz}$  のとき波長  $\lambda \approx 3 \times 10^8 / 10^6 = 300\text{m}$  となる。  
1m 中にある波の数は  $\beta/(2\pi) = 1/300$  である。 $f = 1\text{MHz}$  程度以下なら, 1m 以内で回路を作る場合, 分布定数回路で考えなくも誤差は小さいだろう。

### 無損失線路

$R = G = 0$  の場合, 損失が無いので無損失線路(lossless transmission line)とよばれる。

$$\text{伝搬定数 } \gamma = \sqrt{j\omega C \cdot j\omega L} = j\omega\sqrt{LC} \quad \therefore \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (7-25)$$

$$\text{特性インピーダンス } Z_0 = \sqrt{L/C}, \text{ 位相速度 } v_p = 1/\sqrt{LC} \quad (7-26)$$

従って, (4), (5)より

$$\begin{aligned} v(z, t) &= V_0 \cos(\omega t - \omega\sqrt{LC}z) \\ i(z, t) &= V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cos(\omega t - \omega\sqrt{LC}z) \end{aligned} \quad (7-27)$$

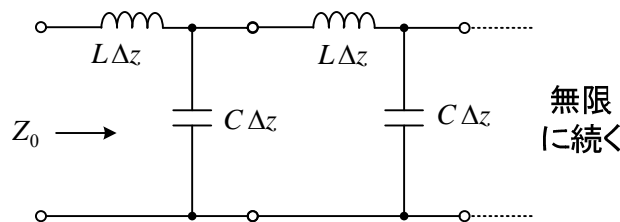


図 7-6 無損失線路

このことから, どの点においても, それから右側に純抵抗  $\sqrt{L/C}$  があるとした電流が流れる。実際には抵抗は無いが,  $L$  と  $C$  が無限につながっているのだから, そこにエネルギーが蓄えられていくと考えられる。 $LC(\Delta z)^2$  の項を無視すると特性インピーダンスは反復インピーダンスに等しい。

## ○ 電磁波の基本式

出発点となるのは以下の式である。

$$\text{電荷保存の法則} \quad \operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{ガウスの法則} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{②}$$

$$\text{磁束の保存則} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{アンペア・マクスウェルの法則} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{④}$$

$$\text{ファラデーの法則} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{⑤}$$

$$\text{物質の式} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{⑥}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{⑦}$$

$$\mathbf{i}_c = \kappa \mathbf{E} \quad \text{⑧'}$$

⑧' において、動く物体や電池は考えないことにする。また、伝導電流  $\mathbf{i}$  を強制電流  $\mathbf{i}_0$  とそれ以外  $\mathbf{i}_c$  に分ける。強制電流は問題を解く場合に既に分かっている電流と考えればよい。すなわち

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_c \quad (7-28)$$

また、この章の電磁波の解析において、以下の仮定(1)を設ける。

仮定(1)  $\varepsilon, \mu, \kappa$  は考える空間で一定の定数とする。すなわち均質媒質を考える。

電荷密度  $\rho$  は、電流に合わせて

$$\rho = \rho_0 + \rho_c \quad (7-29)$$

と分解できる。すなわち、

$$\operatorname{div} \mathbf{i}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{i}_c + \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0 \quad (7-30)$$

③の rot をとり、④～⑧', (7-28)を用いて

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{i}_0 \quad (7-31)$$

を得る。④の rot をとり、③～⑧', (7-28)を用いて次式を得る。

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t} \quad (7-32)$$

一般に、(付 13)より、 $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$  ( $\nabla^2$  の定義) だから、(7-31)より、②を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \kappa \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{i}_0 \quad (7-33)$$

$x, y, z$  直角座標系では、



$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{H} = & \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) \hat{y} \\ & + \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \hat{z}\end{aligned}\quad (7-34)$$

となるが、円柱座標，球座標では定義より計算しないといけない。(7-32)より，①を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \rho \quad (7-35)$$

導電性の物体を考えない場合には， $\kappa = 0$ と置けばよく，⑧'より $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$ で，(7-30)より $\rho_c$ は時間に依存しない（空間の関数であってもよい）。しかし，時間的に正弦波で変動する場合は $\rho_c$ も時間変動する必要があるから，結局 $\rho_c = 0$ である。よって，

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot} \mathbf{i}_0 \quad (7-36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \rho_0 \quad (7-37)$$

となる。さらに，強制電流 $\mathbf{i}_0$ とそれに伴う電荷 $\rho_0$ がない空間を考える場合には( $\mathbf{i}_0, \rho_0$ はどこかにはあるが)，次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7-38)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7-39)$$

この形の偏微分方程式は**波動方程式**(wave equation)とよばれている。

さらにこの章では次の仮定を設けて，電磁波で良く利用されるフェーザ表示の式を導こう。

**仮定(2)** 電磁波を作る原因となるのが，電荷密度 $\rho_0$ と強制電流 $\mathbf{i}_0$ である。これらは角周波数 $\omega$ の正弦波とする。

**仮定(3)** 回路で言うところの定常状態にあり，全ての量が時間的に角周波数 $\omega$ の正弦波であるとする。つまり電源のスイッチを入れた後の過渡現象は考えない。

仮定(2),(3)の結果，電気回路の交流理論（フェーザ表示）と同じことができる。空間の各点ごとにフェーザ表示が異なることに注意しなければならない。これは回路素子ごとに電圧や電流のフェーザが異なるのと同じである。電圧や電流が電界や磁界になったと思えばよい。前節でも述べたことであるが，③を例にとり説明しよう。まず，任意の $(x, y, z)$ 点において

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = (H_x(x, y, z, t), H_y(x, y, z, t), H_z(x, y, z, t)) \quad (7-40)$$

ここで， $H_x(x, y, z, t) = H_{xm}(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_{hx}(x, y, z))$

$H_y(x, y, z, t) = H_{ym}(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_{hy}(x, y, z))$

$$H_z(x, y, z, t) = H_{zm}(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_{hz}(x, y, z))$$

$H_{xm}(x, y, z), H_{ym}(x, y, z), H_{zm}(x, y, z)$  は振幅で、いずれも正または0と書ける。(7-6),(7-7)の3次元への拡張である。フェーザ表示(ドットをつける)を次式で定義する。(7-8)と同じように実効値ではなく振幅で定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) &= (\dot{H}_x(x, y, z), \dot{H}_y(x, y, z), \dot{H}_z(x, y, z)) \\ &= (H_{xm}(x, y, z)e^{j\theta_{hx}(x, y, z)}, H_{ym}(x, y, z)e^{j\theta_{hy}(x, y, z)}, H_{zm}(x, y, z)e^{j\theta_{hz}(x, y, z)}) \end{aligned} \quad (7-41)$$

$\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)$  から実際の  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$  を求める場合には

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (7-42)$$

とすればよい。Reは実部をとることを意味する。

$\mathbf{i}(x, y, z, t), \mathbf{D}(x, y, z, t)$  についても全く同様にフェーザ表示が定義でき、次式が成り立つ。

$$\mathbf{i}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\dot{\mathbf{i}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (7-43)$$

$$\mathbf{D}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\dot{\mathbf{D}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (7-44)$$

③に代入して、

$$\text{rot}(\text{Re}\{\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)e^{j\omega t}\}) = \text{Re}\{\dot{\mathbf{i}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} + \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}\{\dot{\mathbf{D}}(x, y, z)e^{j\omega t}\}$$

Reの演算は入れ替えても良く、rotの演算は時間に関係ないから

$$\text{Re}\{e^{j\omega t} \text{rot} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z)\} = \text{Re}\{\dot{\mathbf{i}}(x, y, z)e^{j\omega t}\} + \text{Re}\{\dot{\mathbf{D}}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t}\}$$

$$\therefore \text{Re}\{e^{j\omega t} (\text{rot} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) - \dot{\mathbf{i}}(x, y, z) - j\omega \dot{\mathbf{D}}(x, y, z))\} = \mathbf{0}$$

となる。任意の時間に対して成り立つためには、当然  $e^{j\omega t} = 1, e^{j\omega t} = j$  となる場合にも成立するから次式が得られる。

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{i}}(x, y, z) + j\omega \dot{\mathbf{D}}(x, y, z) \quad (7-45)$$

同様に、形式的に  $\partial/\partial t$  を  $j\omega$  と置くことで求められる。 $\epsilon, \mu, \kappa$  を除く全ての量が時間を含まない複素数になっていることに注意しなくてはならない。 $\dot{\mathbf{i}}_c$  を消去し、 $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$  の式に直すと、 $(x, y, z)$  は省略して、①~⑧' より

$$\text{div}(\kappa \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}}_0) + j\omega \dot{\rho} = 0 \quad (7-46)$$

$$\text{div}(\epsilon \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho} \quad (7-47)$$

$$\text{div}(\mu \dot{\mathbf{H}}) = 0 \quad (7-48)$$

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}} = (\kappa + j\omega\epsilon) \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}}_0 \quad (7-49)$$

$$\text{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \quad (7-50)$$

が得られる。(7-50)の両辺のdivを計算すると、 $\omega \neq 0$  の条件(静電界、静磁界でない)の下で、

(7-48)が得られる。(7-49)の両辺の div を計算し、(7-46)を用いると、 $\omega \neq 0$  の条件の下で、(7-47)が得られる。よって、 $\omega \neq 0$  の条件の下で(7-46)、(7-49)、(7-50)が独立である。あるいは、(7-47)、(7-49)、(7-50)だけが独立である。電流  $\dot{\mathbf{i}}_0$  が与えられ、電荷密度  $\dot{\rho}$  を求める必要がなければ、(7-49)、(7-50)だけ解けばよい。別の見方をすれば、(7-46)~(7-50)で未知数は  $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$  の成分が6つと電荷密度  $\dot{\rho}$  の合計7つである。(7-49)、(7-50)には  $\dot{\rho}$  は含まれていないので、 $\omega \neq 0$  の条件の下では(7-49)、(7-50)で  $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$  が求まる。必要なら(7-46)か(7-47)で  $\dot{\rho}$  が計算できる。

$\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}$  を分離した式は、(7-46)、(7-49)、(7-50)で求められるが、(7-33)、(7-35)からも直接得られる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \dot{\mathbf{i}}_0 \quad (7-51)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu \dot{\mathbf{i}}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \dot{\rho} \quad (7-52)$$

$$\text{ただし、 } k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega\kappa\mu} = \beta - j\alpha, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - j\omega\kappa\mu \quad (7-53)$$

(7-20)で定義した伝搬定数  $\gamma$  の代わりに  $k$  を用いることも多い。 $k$  も伝搬定数と呼ばれている。両者には以下の関係がある。

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta \quad (7-54)$$

(7-53)より減衰定数  $\alpha$ 、位相定数  $\beta$  は、 $\alpha \geq 0$  の条件より以下の式となる。

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right\}} \quad , \quad \alpha = 0 \quad (\kappa = 0 \text{ のとき}) \quad (7-55)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right\}} \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (\kappa = 0 \text{ のとき}) \quad (7-56)$$

(7-21)、(7-22)で  $R=0, LC = \varepsilon\mu, G/C = \kappa/\varepsilon$  とおくと、それぞれ(7-55)、(7-56)と一致する。 $G/C = \kappa/\varepsilon$  は(4-41)で得られた結果と同じである。

電荷密度  $\dot{\rho}$  は、(7-29)、(7-30)を複素表示して

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 + \dot{\rho}_c$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{i}}_0 + j\omega\dot{\rho}_0 = 0, \quad \text{div } \dot{\mathbf{i}}_c + j\omega\dot{\rho}_c = 0$$

となる。 $\omega \neq 0$  の条件の下で、 $\dot{\mathbf{i}}_0 = \mathbf{0}$  なら、 $\dot{\rho}_0 = 0$ 、 $\dot{\mathbf{i}}_c = \mathbf{0}$  なら、 $\dot{\rho}_c = 0$  となる。しかし、逆は必ずしも成立しない。例えば、 $\dot{\rho}_c = 0$  でも、 $\text{div } \dot{\mathbf{i}}_c = 0$  であって、空間的に一様な  $\dot{\mathbf{i}}_c$  はありえる。

$$\textcircled{8}' \text{ より } \text{div } \dot{\mathbf{i}}_c = \kappa \text{div } \dot{\mathbf{E}} = \frac{\kappa\dot{\rho}}{\varepsilon}$$

$$\text{故に } \frac{\kappa\dot{\rho}}{\varepsilon} + j\omega\dot{\rho}_c = 0 \quad \therefore \dot{\rho}_c = -\frac{\kappa\dot{\rho}_0}{\kappa + j\omega\varepsilon} \quad (7-57)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} = -j\omega \frac{\dot{\rho}_c}{\kappa} = \frac{j\omega\dot{\rho}_0}{\kappa + j\omega\varepsilon} \quad \therefore \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \dot{\rho} = \frac{j\omega}{\kappa + j\omega\varepsilon} \text{grad } \dot{\rho}_0$$

従って、(7-52)は次式となる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu \dot{\mathbf{i}}_0 + \frac{j\omega}{\kappa + j\omega\varepsilon} \text{grad} \dot{\rho}_0 \quad (7-58)$$

2つの均質媒質が境界面で接している場合は、それぞれの媒質内で(7-57), (7-58)が成立する。境界では、境界条件を使って電磁界を求める。

(7-49), (7-50)で $\omega \neq 0$ の条件の下で強制電流 $\dot{\mathbf{i}}_0$ がない空間では次式となる。なお、 $\dot{\mathbf{i}}_0 = \mathbf{0}$ なら電荷 $\dot{\rho}_0 = 0$ および(7-57)より $\dot{\rho}_c = 0$ である。

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = (\kappa + j\omega\varepsilon) \dot{\mathbf{E}} \quad (7-59)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \quad (7-60)$$

(7-59), (7-60)よりあるいは(7-51), (7-52)から直接次式が得られる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (7-61)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (7-62)$$

これはヘルムホルツの方程式(Helmholtz equation)と呼ばれている。この式はマクスウェルの方程式の両辺のrotを計算して求めているから(7-59), (7-60)の必要条件であり、これらの式だけで $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ は決まらない。(7-59)と(7-60)を適当に用いて $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ を決定する。(7-59), (7-60)より、それぞれ $\text{div} \dot{\mathbf{E}} = 0, \text{div} \dot{\mathbf{H}} = 0$ が得られ、これは(7-47), (7-48)に相当し、必要に応じて利用すればよい。(7-59), (7-60)に含まれた条件だから、 $\text{div} \dot{\mathbf{E}} = 0, \text{div} \dot{\mathbf{H}} = 0$ を必ず使用しないといけない訳ではない。

ポテンシャルを用いる場合には、(2-35), (2-36)をフェーザ表示して次式となる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{i}}_0 \quad (7-63)$$

$$\nabla^2 \dot{V} + k^2 \dot{V} = -\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \quad (7-64)$$

このとき、(2-34)のローレンツゲージは次式で与えられる。

$$\text{div} \dot{\mathbf{A}} + j\omega\mu\varepsilon \dot{V} + \mu\kappa \dot{V} = 0 \quad (7-65)$$

## ○ 平面波

導電性の物質がなく $\kappa = 0$ で、電荷と電流のない $\varepsilon, \mu$ 一定の空間を考える。(7-62)と(7-60)を解いて、平面波を説明しよう。(7-62)のヘルムホルツの方程式

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (7-53) \text{より } k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

は、直角座標系では、以下のように書ける。

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_x = 0 \quad (7-66)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y = 0 \quad (7-67)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z = 0 \quad (7-68)$$

波源を考えていないので、どの方向にも同じ条件である。そこで

$$\dot{E}_x = \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z) \quad (7-69)$$

と仮定する<sup>(15)</sup>。(7-66)に代入し、

$$\dot{Y}(y)\dot{Z}(z)\frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \dot{X}(x)\dot{Z}(z)\frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\frac{\partial^2 \dot{Z}(z)}{\partial z^2} + k^2 \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z) = 0$$

両辺を  $\dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z)$  で割ると

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{\dot{Z}(z)} \frac{\partial^2 \dot{Z}(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

これが成り立つには、それぞれの項が定数でなければならない。

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{d^2 \dot{X}(x)}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{d^2 \dot{Y}(y)}{dy^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{\dot{Z}(z)} \frac{d^2 \dot{Z}(z)}{dz^2} = -k_z^2 \quad (7-70)$$

とおくと、

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (7-71)$$

(7-70)は、(7-17)のように解くことができる。この結果、

$$\dot{E}_x = (Ae^{-jk_x x} + Be^{jk_x x})(Ce^{-jk_y y} + De^{jk_y y})(Ee^{-jk_z z} + Fe^{jk_z z}) \quad (7-72)$$

となる。 $x > 0, y > 0, z > 0$ の向きに伝搬する波だけを考える場合には、 $B = D = F = 0$ とおける。 $x < 0, y < 0, z < 0$ の向きに伝搬する波は $A = C = E = 0$ とおく。 $B = C = E = 0$ とおいた場合は、 $x > 0, y < 0, z < 0$ の向きに伝搬する波を表す。(7-67), (7-68)より  $y, z$  成分も同様に求められる。

以上のことから、(7-62)の解の1つとして、次式が求められる。

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (7-73)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{E}}_0$ は定ベクトルである。

逆に

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = -k^2 \dot{\mathbf{E}}$$

となり, (7-73)はヘルムホルツの方程式の解の1つであることが確かめられる。

磁界は波動方程式でなく, 波動方程式を解いて求めた(7-73)を使い, (7-60)より求める。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \dot{\mathbf{E}} \\ &= \frac{j}{\omega\mu} \text{rot}(\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}) \\ &= \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k_x & k_y & k_z \\ \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} & \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -jk_x \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (7-74)$$

ここで,

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (7-75)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_0 = \dot{E}_{0x} \hat{x} + \dot{E}_{0y} \hat{y} + \dot{E}_{0z} \hat{z} \quad (7-76)$$

また,  $\text{div} \dot{\mathbf{E}} = 0$  より

$$\begin{aligned} \text{div} \dot{\mathbf{E}} &= \text{div}(\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + \frac{\partial}{\partial y} \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + \frac{\partial}{\partial z} \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -jk_x \dot{E}_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - jk_y \dot{E}_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - jk_z \dot{E}_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -j \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \end{aligned} \quad (7-77)$$

(7-77)は $\text{div} \dot{\mathbf{E}} = 0$ から得られたが,  $\text{div} \dot{\mathbf{E}} = 0$ は(7-59)から得られ,  $\text{div} \dot{\mathbf{E}} = 0$ が独立な式として必要だったわけではない。 $\mathbf{k}$ は実数だから, (7-74), (7-77)より瞬時値 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ については,  $\mathbf{H} = (1/\omega\mu) \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ が成立つから, それぞれ直交する。座標軸の取り方は自由なのでz軸方向に伝搬する電磁波を考え

$$\mathbf{k} = k_z \hat{z} = k \hat{z} \quad (k_x = k_y = 0, k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}) \quad (7-78)$$

として図7-7のように選ぶ。図より電界はx成分, 磁界はy成分だけである。 $\mathbf{k}$ は波の進行方向

を向き波数ベクトルと言われる。なお、フェーザ表示は(7-73), (7-76), (7-78)より次式で表せる。

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_{0x} e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{x}} = \dot{E}_0 e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{x}} \quad (\dot{E}_{0y} = \dot{E}_{0z} = 0, \dot{E}_0 \equiv \dot{E}_{0x}) \quad (7-79)$$

(7-74)より, (7-78)を用いて

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}} = \frac{k}{\omega\mu} \dot{E}_0 e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \dot{E}_0 e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{y}} \quad (7-80)$$

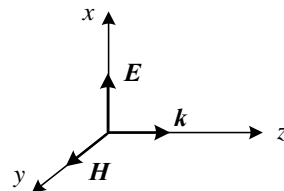


図 7-7 平面波と座標軸の取り方

実際の電界は以下のように求められる。

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) = (\text{Re}(\dot{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}), 0, 0)$$

$$\therefore E_x = |\dot{E}_0| \cos(\omega t - kz + \theta_0), E_y = 0, E_z = 0 \quad \text{ただし, } \theta_0 = \arg \dot{E}_0$$

一般に, 座標原点 ( $x = y = z = 0$ ) で, 正弦波で変化する電界の  $x$  成分,  $y$  成分,  $z$  成分, 磁界の  $x$  成分,  $y$  成分,  $z$  成分などのうち, どれか1つは, 時間  $t = 0$  で最大として良い(時間の原点の定義)。交流回路の解析でも, どれかの素子の電圧または電流のうち, いずれか 1 つのフェーザを実数に選べる。よって,  $\dot{E}_0 = E_0$  (実数)としても一般性を失わない。最終的に

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), E_y = 0, E_z = 0 \quad (7-81)$$

となる。磁界は次式となる。

$$H_x = 0, H_y = \sqrt{\varepsilon/\mu} E_0 \cos(\omega t - kz), H_z = 0 \quad (7-82)$$

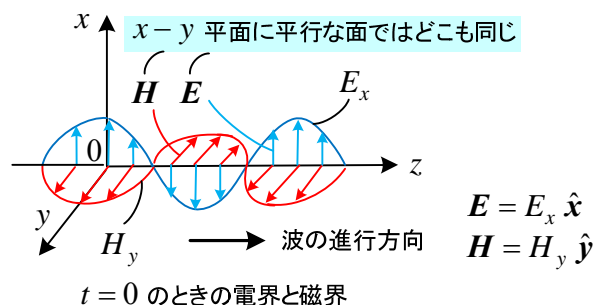


図 7-8 平面波 (矢印は  $z$  軸上の点の電磁界)

この様子を図 7-8 に示す。  $z$  軸に垂直な  $x-y$  平面 (波面という) において, 電磁界は時間によって変化するが, どの場所でも同じベクトルである (決して  $z$  軸のところだけに電磁界があるわけで

はない)。 $x, y$ に無関係だから $\partial/\partial x = 0, \partial/\partial y = 0$ と言える。 $\partial/\partial z \neq 0, \partial/\partial t \neq 0$ である。このように平面波は簡単な式で表現でき、解が(7-27)の分布定数回路とも対応しているので判り易い。

ただ、無限に広がる空間に平面波を作るためには、無限のエネルギーが必要だから、その意味では平面波は架空の電磁界である。しかし、波源（アンテナ）から十分離れたところでは、近似的に平面波と考えてよいのである。

電磁波の速度は、真空中とすると(7-24)より、波源の周波数に関係なく

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c \approx 3.0 \times 10^8 \text{ [m/s]} \quad (7-83)$$

となる。すなわち真空中の光速で進む。波の波長 $\lambda$ は、 $f = 1\text{MHz}$ なら $\lambda = 300\text{m}$ である。

## ○ 平面波の導体への入射

表面が平らな導電性の十分広い媒質に平面波が垂直に入射する場合について考える。

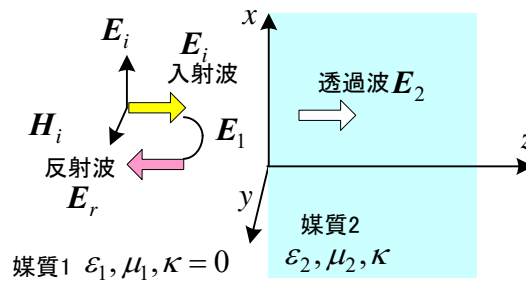


図 7-9 平面波の導電性媒質への入射

まず、電界について考える。(7-79)より、入射波は $\dot{E}_0 = E_i$  (正の定数とおいても一般性を失わない)として、次式で表せる。

$$\dot{E}_i(x, y, z) = E_i e^{-j\beta_1 z} \hat{x} \quad \text{ここで, } k = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = \beta_1 \quad (7-84)$$

導体面での反射波は、(7-72)で $A = C = D = E = F = 0$ とおいて、次式のように表せる。

$$\dot{E}_r(x, y, z) = \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{x} \quad (7-85)$$

媒質 1 の電界は、入射波と反射波を加えたものとなり、次式となる。

$$\dot{E}_1(x, y, z) = \dot{E}_i + \dot{E}_r = E_i e^{-j\beta_1 z} \hat{x} + \dot{E}_r e^{j\beta_1 z} \hat{x} \quad (7-86)$$

媒質 2 の透過波は、導電性の十分広い媒質であり境界条件と対称性より、次式で仮定する。

$e^{-jkz}$ で(7-53)より、 $k = \beta_2 - j\alpha_2$ とおく。

$$\dot{E}_2(x, y, z) = \dot{E}_2 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x} \quad (7-87)$$



一方、磁界に関し、進行波については(7-80)より、電界(7-84)を用いて次式で表せる。

$$\dot{\mathbf{H}}_i(x, y, z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{E}_i e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{y}} \quad (7-88)$$

反射波については、(7-74)と同様に計算すると、 $\partial/\partial x \rightarrow jk_x$ に注意し、(7-78)を用いて

$$\dot{\mathbf{H}}_r(x, y, z) = -\frac{1}{\omega\mu_1} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}}_r = -\frac{k}{\omega\mu_1} \dot{\mathbf{E}}_r e^{j\beta_1 z} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \dot{\mathbf{E}}_r e^{j\beta_1 z} \hat{\mathbf{y}} \quad (7-89)$$

従って、媒質1の磁界は、入射波(7-88)と反射波(7-89)を加えたものとなり、次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{H}}_1(x, y, z) = \dot{\mathbf{H}}_i + \dot{\mathbf{H}}_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{E}_i e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{y}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \dot{\mathbf{E}}_r e^{j\beta_1 z} \hat{\mathbf{y}} \quad (7-90)$$

媒質2の透過波で、磁界は(7-74)より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_2(x, y, z) &= \frac{1}{\omega\mu_2} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{E}}_2 = \frac{k}{\omega\mu_2} \dot{\mathbf{E}}_2 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - j\omega\mu_2 \kappa}}{\omega\mu_2} \dot{\mathbf{E}}_2 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{\mathbf{y}} \quad k \text{ は(7-53)より} \end{aligned} \quad (7-91)$$

境界条件を使って、未知パラメータを求めよう。

$$(a) \quad z=0 \quad \text{で} \quad \dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{E}}_2 \text{ の接線成分が等しい: } \mathbf{E}_i + \dot{\mathbf{E}}_r = \dot{\mathbf{E}}_2 \quad (7-92)$$

$$(b) \quad z=0 \quad \text{で} \quad \dot{\mathbf{H}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2 \text{ の接線成分が等しい: } \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{E}_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \dot{\mathbf{E}}_r = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_2 - j\kappa}{\omega\mu_2}} \dot{\mathbf{E}}_2 \quad (7-93)$$

ここで、次式の定義を行う。

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\kappa + j\omega\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\dot{\varepsilon}_2}} \quad (7-94)$$

$\dot{\varepsilon}_2$  は複素誘電率とよばれ、次式で表せる。

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + \frac{\kappa}{j\omega} \quad (7-95)$$

(7-93)より

$$\frac{1}{\eta_1} \mathbf{E}_i - \frac{1}{\eta_1} \dot{\mathbf{E}}_r = \frac{1}{\eta_2} \dot{\mathbf{E}}_2$$

上式と(7-92)より、

$$\dot{\mathbf{E}}_r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{E}_i \equiv R \mathbf{E}_i, \quad \dot{\mathbf{E}}_2 = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{E}_i \equiv T \mathbf{E}_i \quad (7-96)$$

となる。これらの係数は、 $R$ が反射係数、 $T$ が透過係数といわれる。

媒質2に流れる電流密度は、(7-87)より次式で求められる。

$$\dot{i}_2(x, y, z) = \kappa \dot{E}_2(x, y, z) = \frac{2\eta_2 \kappa}{\eta_2 + \eta_1} E_i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x} \quad (7-97)$$

ここで、導体の導電率が大きく

$$\frac{\kappa}{\omega \epsilon_2} \gg 1 \quad (7-98)$$

が成り立つとき、減衰定数  $\alpha_2$ 、位相定数  $\beta_2$  は、(7-55)、(7-56)より以下のように近似できる。

$$\alpha_2 \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \kappa}{2}}, \beta_2 \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \kappa}{2}} \quad (7-99)$$

導体に入った電界、磁界さらに流れる電流は、 $z$ の増加とともに減衰する。 $\delta = \sqrt{2/(\omega \mu_2 \kappa)}$ は表皮の厚さと呼ばれ、 $z = \delta$ で振幅が $1/e$ になる。

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega \mu_2}{\kappa + j\omega \epsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{j\omega \mu_2}{\kappa}} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{\kappa}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

よって、 $\left| \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| = \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \epsilon_1}{\kappa \mu_1}} \ll 1$  なので、(7-97)より

$$\dot{i}_2(x, y, z) \approx \frac{2\eta_2 \kappa}{\eta_1} E_i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{x} = 2 \sqrt{\frac{\omega \kappa \mu_2 \epsilon_1}{\mu_1}} E_i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{j\frac{\pi}{4}} \hat{x}$$

瞬時値は、 $x$ 成分のみで $e^{j\omega t}$ を掛けて実部をとればよいので

$$i_{2x} = 2 \sqrt{\frac{\omega \kappa \mu_2 \epsilon_1}{\mu_1}} E_i e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \frac{\pi}{4}) \quad (7-100)$$

となる。他の瞬時値も同様に求めることができる。

## ○ 線路で送る電磁波(TEM波)

通信を行うため信号を送る方法は、空間を利用した無線通信と伝送路を利用した通信に大別される。伝送路には、平行平板導波路、同軸ケーブル、導波管、光ファイバーなどがあるが、ここでは分布定数回路として解析ができる平行平板導波路、同軸ケーブルについて考える。電磁波を記述するマクスウェルの方程式と回路の式がどのように関係しているかを考えたい<sup>(25)</sup>。

まず、図7-10の平行平板導波路について導体板間の電磁波を解析する。以下の仮定を行う。

- (1) 導体板は完全導体とする。完全導体中の電流と磁界は  $0$  である。電流は導体表面に流れる。また導体板の間は  $\epsilon, \mu$ の絶縁物質とする。 $z$ 軸方向は無限の長さで、 $a$ は $b$ と比べて十分長いとする。すなわち縁端効果を見捨てる。
- (2) 平面波が進行方向の成分を持たないように電界と磁界の $z$ 方向成分は  $0$  すなわち  $E_z = 0, H_z = 0$ とする。これは **TEM波**(transverse electromagnetic wave) と呼ばれる。

- (3) 電界については  $y$  軸成分のみとする。よって、 $E_x = 0$  である。  
 (4) 回路で言うところの定常状態にあり、全ての量が時間的に角周波数  $\omega$  の正弦波であるとする。つまり電源のスイッチを入れた後の過渡現象は考えない。

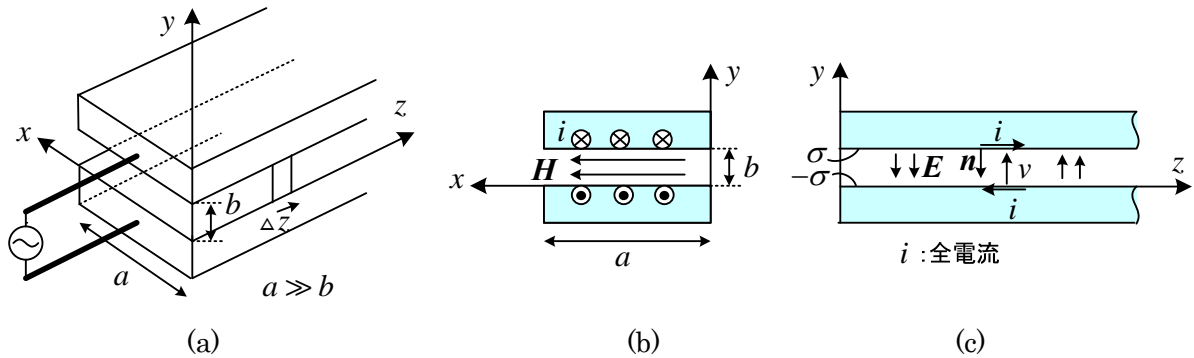


図 7-10 平行平板導波路

導体板の間では、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  であり、 $\kappa = 0$  で、電流や電荷はないとする。(7-59)~(7-62) からスタートしてもよいが、分布定数回路との対応も考えるので、マクスウェルの方程式からはじめよう。①~④は、仮定(2), (3)より、直角座標系で書くと以下のようなになる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (7-101)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (7-102)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \hat{y} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{y}$$

$$\therefore \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \quad (1), \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2), \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (3) \quad (7-103)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{x} - \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \hat{y}$$

$$\therefore \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (1), \quad 0 = \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2), \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (3) \quad (7-104)$$

(7-104)(2)で、仮定(4)より、交流の定常状態では、全ての電磁量は正弦波で変化すると考えられるから  $H_y = 0$  が得られる。この結果、(7-103)と(7-104)で意味のある式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2), \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (3) \quad (7-103)'$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (1), \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (3) \quad (7-104)'$$

(7-103)'(2)の両辺を  $y$  で偏微分すると(7-103)'(3)より、交流の場合には(7-101)が得られる。同様に(7-104)'(1)の両辺を  $x$  で偏微分すると、 $\partial H_x / \partial x = 0$  が得られる。これは、(7-102)で  $H_y = 0$  を考慮した式である。交流の場合には(7-101)、(7-102)は(7-103)、(7-104)から得られ独立な式ではないが、必要に応じて利用することは当然可能である。(7-101)、(7-102)( $\partial H_x / \partial x = 0$ ), (7-103)'(3), (7-104)'(3)より  $H_x$ 、 $E_y$  は  $z, t$  のみの関数と考えられる。

(7-103)', (7-104)'で  $\partial / \partial t \rightarrow j\omega$  とおいて得られるフェーザ表示で、 $\dot{E}_y, \dot{H}_x$  は  $z$  だけの関数でなければならない。(7-103)'(2), (7-104)'(1)より、 $\dot{E}_y$  が  $z$  のみの関数だから  $\partial / \partial z \rightarrow d / dz$  にかえて、次式の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0 \quad \text{ただし,} \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (7-105)$$

これは(7-62)からも得られる。 $z$  方向に進む進行波のみを考えた場合には、次式で表される。

$$\dot{E}_y(z) = \dot{E}_0 e^{-jkz} \quad (7-106)$$

よって、

$$E_y(z, t) = |\dot{E}_0| \cos(\omega t - kz + \theta_0) \quad \text{ただし,} \quad \theta_0 = \arg \dot{E}_0 \quad (7-107)$$

(7-104)'(1)をフェーザ表示して、次式が得られる。これは(7-60)からも得られる。

$$\frac{d \dot{E}_y}{dz} = j\omega \mu \dot{H}_x$$

故に、(7-106)より

$$\dot{H}_x(z) = -\frac{1}{j\omega \mu} jk \dot{E}_0 e^{-jkz} = -\sqrt{\varepsilon / \mu} \dot{E}_0 e^{-jkz} \quad (7-108)$$

瞬時値にもどすと（平面波の場合と比べ“ $-$ ”がつくのは座標軸の取り方が違うから）

$$H_x(z, t) = -|\dot{E}_0| \sqrt{\varepsilon / \mu} \cos(\omega t - kz + \theta_0)$$

ここで、図 7-10(c)の向きに  $z$  点の電位  $v(z, t)$  を次式で求めよう。電位はクーロン電界より求めるべきであるが、なぜこの式で良いかは後のベクトルポテンシャルの節で説明する。

$$v(z, t) = -\int_0^b \mathbf{E} \cdot \hat{y} dy = -\int_0^b E_y(z, t) dy = -E_y b = -b |\dot{E}_0| \cos(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-109)$$

導体板に流れる全電流を図 7-10(c)の向きに  $i(z, t)$  とすると、導体板は完全導体なので、(2-61)の境界条件より、 $H_x(z, t)$  が単位長当たりの面電流密度に等しいから全電流  $i(z, t)$  は

$$i(z, t) = a H_x(z, t) = -a |\dot{E}_0| \sqrt{\varepsilon / \mu} \cos(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-110)$$

特性インピーダンスは、 $v(z, t), i(z, t)$  の振幅をそれぞれ  $V_0, I_0$  とおいて次式より得られる。

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (7-111)$$

なお、上の導体板表面の電荷密度は、(2-67)の境界条件より次式となる。

$$\sigma(z, t) = -D_y = -\varepsilon \left| \dot{E}_0 \right| \cos(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-112)$$

分布定数回路の基本式との関係を明確にしよう。

(7-104)'(1)で、両辺を0から**b**まで線積分して次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^b E_y(z, t) dy = \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^b H_x(z, t) dy \quad (7-113)$$

**b**,  $\Delta z$  ( $z$  軸微小長さ)の長方形面の磁束を $\phi$ とすると、(7-110)を用いて

$$\phi = \Delta z \int_0^b \mu H_x dy = b \Delta z \mu H_x = \frac{b \Delta z \mu}{a} i = L \Delta z i \quad (7-114)$$

と書ける。 $L$  [H/m]は1m当りに換算したインダクタンスで、次式となる(付録参照)。

$$L = b \mu / a \quad [\text{H/m}] \quad (7-115)$$

導波路は $z$ 軸方向に無限に長い1巻のコイルであるが、そこに鎖交する磁束の一部を求めたものである。(7-113)に、(7-109), (7-114)を用いて

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (7-116)$$

となる。これは $R = 0$ とした場合の(7-3)に対応する。

(7-103)'(2)で、両辺を0から**b**まで線積分して次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^b H_x(z, t) dy = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^b E_y(z, t) dy \quad (7-117)$$

$C$  [F/m]を1m当りに換算した静電容量とすると、 $\Delta z$ の静電容量は次式となる。

$$C \Delta z = \frac{\varepsilon a \Delta z}{b} \quad \therefore \quad C = \frac{\varepsilon a}{b} \quad [\text{F/m}] \quad (7-118)$$

電荷密度が $x$ 方向に変化しないことが前提となっている。(7-115), (7-118)より、次式が得られる。

$$CL = \varepsilon \mu$$

(7-117)に(7-109), (7-114)を用いて次式が得られる。

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (7-119)$$

これは、 $G = 0$ とした場合の(7-5)に一致する。

(7-116), (7-119)の解は、(7-27)より以下のように求められていた。

$$v(z, t) = V_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{LC} z)$$

$$i(z, t) = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cos(\omega t - \omega \sqrt{LC} z)$$

(7-109), (7-110)で $\theta_0 = \pi$ とし

$$V_0 = b|\dot{E}_0|, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{b}{a}, \quad k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega\sqrt{CL}$$

の関係から、両者は一致する。このときの電界の様子を図 7-11 に示す。表面電荷の⊕は、実際には電子が動いている。図 3-10 の場合と比べて周波数が高くなると、場所  $z$  の関数として電荷、電界、電圧、電流が変化する。

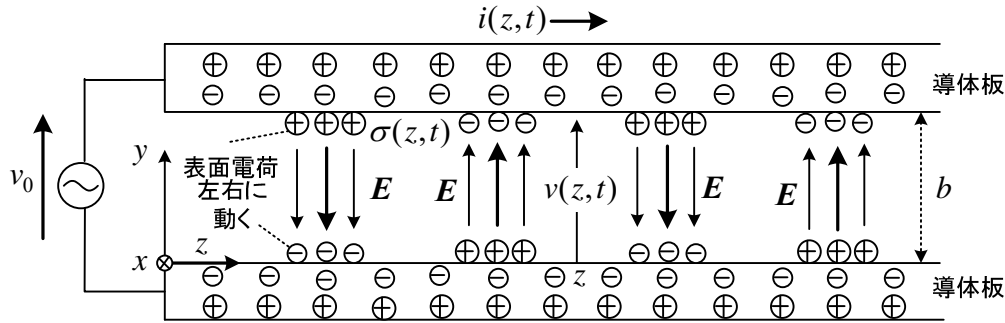


図 7-11 平行平板導波路の電界

ベクトルポテンシャルによる解法を考えてみよう。

電流が  $z$  方向成分のみだから、ベクトルポテンシャルも  $z$  成分のみと考える。また  $x$  方向に十分長いので、 $x$  の関数でないと考える。波動として伝わることから、 $\cos(\omega t - kz)$  の因子を持つと考えて、ベクトルポテンシャルのフェーザ表示を次式で仮定する。

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_z \hat{\mathbf{z}} = \dot{A}(y) e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} \quad (7-120)$$

(7-63)で、強制電流  $\dot{\mathbf{i}}_0 = \mathbf{0}$  とおくと

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (7-121)$$

(付 18)より、(7-120)を(7-121)に代入すると  $z$  成分のみで次式が得られる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} = \left( \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{z}} = \left( \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial y^2} e^{-jkz} - k^2 \dot{A} e^{-jkz} \right) \hat{\mathbf{z}} = -k^2 \dot{\mathbf{A}}$$

よって

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{A}}}{\partial y^2} = 0 \quad \therefore \frac{d^2 \dot{\mathbf{A}}}{dy^2} = 0$$

よって

$$\frac{d\dot{\mathbf{A}}}{dy} = k_1 \quad \therefore \dot{\mathbf{A}} = k_1 y + k_2$$

$$\therefore \dot{\mathbf{A}} = (k_1 y + k_2) e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

(7-65)のローレンツゲージで  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$  として、 $\dot{\mathbf{A}}$  は  $z$  成分のみだから

$$\dot{V} = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \text{div} \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\omega\mu\epsilon} k(k_1 y + k_2) e^{-jkz}$$

$y=0$ で電位を0とする基準を選ぶと、 $k_2=0$ となる。よって

$$\dot{\mathbf{A}} = k_1 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} \quad (7-122)$$

磁束密度、磁界は次式で求められる。

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot} \dot{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & k_1 y e^{-jkz} \end{vmatrix} = k_1 e^{-jkz} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} k_1 e^{-jkz} \hat{\mathbf{x}}$$

電界は(2-26)より、 $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ を用いて

$$\dot{\mathbf{E}} = -\text{grad} \dot{V} - j\omega \dot{\mathbf{A}} = -\frac{kk_1}{\omega\mu\varepsilon} e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}} + jk^2 \frac{k_1}{\omega\mu\varepsilon} y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} - j\omega k_1 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{k_1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}}$$

(7-106)と同様、 $\dot{\mathbf{E}}_y(z) = \dot{E}_0 e^{-jkz}$ と $\dot{E}_0$ を決めると

$$k_1 = -\sqrt{\varepsilon\mu} \dot{E}_0$$

従って、電位 $\dot{V}$ 、ベクトルポテンシャル $\dot{\mathbf{A}}$ 、クーロン電界 $\dot{\mathbf{E}}_c$ 、誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ は次式となる。

$$\dot{V} = -\dot{E}_0 y e^{-jkz}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\sqrt{\varepsilon\mu} \dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_c = -\text{grad} \dot{V} = \dot{E}_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}} - jk \dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_b = -j\omega \dot{\mathbf{A}} = jk \dot{E}_0 y e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_c + \dot{\mathbf{E}}_b = \dot{E}_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}}$$

以上の結果は先に得られた結果と一致している。 $\dot{V}$ は(7-109)で $b$ を $y$ と置き換え、フェーザ表示した式に一致する。電界 $\dot{\mathbf{E}}$ は $y$ 軸成分のみであるが、 $z$ によって値が異なるので、 $\text{rot} \dot{\mathbf{E}} \neq \mathbf{0}$ で、回転が0でない(渦がある)。一方クーロン電界 $\dot{\mathbf{E}}_c$ には $z$ 成分もあるが、この結果、 $\text{rot} \dot{\mathbf{E}}_c = \mathbf{0}$ となるのが容易に確かめられる。誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ でクーロン電界の $z$ 成分が打ち消されている。図7-11の電界 $\mathbf{E}$ はクーロン電界 $\mathbf{E}_c$ の $y$ 成分と等しい。電位はクーロン電界の任意の積分路で求められるが、 $x-y$ 平面上で線積分することにすれば、 $\mathbf{E}_c$ の $z$ 成分を考えなくて良いから、容易に電位が求められる。(7-109)はこのようにして電位が求められたのである。ガウスの法則①で求められるのは電界 $\mathbf{E}$ で、電荷が作る電界を求めているようだがクーロン電界 $\mathbf{E}_c$ とは限らない。

なお、電界 $\dot{\mathbf{E}}$ だけを求めるなら、(7-49)より $\dot{\mathbf{E}} = \text{rot} \dot{\mathbf{H}} / (j\omega\varepsilon)$ を用いて計算するのが簡単である。いろいろの解法で解くことで、理解が深まるであろう。

次に、同軸ケーブルの導体板間の電磁界を解析する。

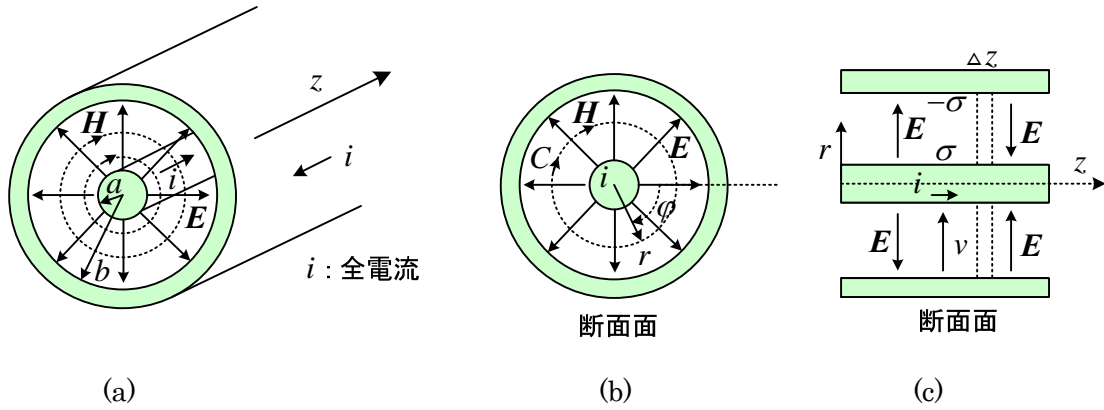


図 7-12 同軸ケーブル

同軸ケーブルの場合には、円柱座標系で解析するのが便利である。以下の仮定を行う。

- (1) 導体板は完全導体とする。また導体板の間は  $\epsilon, \mu$  の絶縁物質とする。
- (2) 電界と磁界の  $z$  方向成分は 0 すなわち  $E_z = 0, H_z = 0$  とする。
- (3) 対称性から電磁界は  $\phi$  に依存しない。すなわち、 $\partial/\partial\phi = 0$  である。
- (4) 定常状態にあり、全ての量が時間的に角周波数  $\omega$  の正弦波であるとする。

マクスウェルの方程式①～④を、 $r, \phi, z$  成分で書くと以下の様になる。(付 20), (付 21) 参照。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (7-123)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (7-124)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \epsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} + \epsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (7-125)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} - \mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}} - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (7-126)$$

仮定(2), (3)より、以下の式となる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 0 \quad (7-127)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) = 0 \quad (7-128)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial H_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) \hat{\mathbf{z}} = \epsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} + \epsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



$$\therefore -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (1), \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \quad (2), \quad \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = 0 \quad (3) \quad (7-129)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) \hat{\mathbf{z}} = -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \hat{\mathbf{r}} - \mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\therefore \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \quad (1), \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \quad (2), \quad \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) = 0 \quad (3) \quad (7-130)$$

(7-130)(3)より、仮定(3)であるから、 $rE_\varphi = f(z)$ と置ける。電界の境界条件より、 $r = a$ で $E_\varphi = 0$ だから、 $f(z) = 0$ となる。従って、全空間で $E_\varphi = 0$ が成立する。(7-130)(1)より交流では $H_r = 0$ となる。この結果、(7-129)(2)は満足される。(7-127)は(7-129)(1),(3)から得られ、必要なら使用してもよいが、以下では使用しない。(7-128)も同様である。

(7-129), (7-130)で $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ とにおいてフェーザ表示が得られる。(7-129)(3)より、 $r\dot{H}_\varphi$ は $r, \varphi$ についての偏微分が0だから $z$ だけの関数でなければならない。そこで $r\dot{H}_\varphi = \dot{F}(z)$ とおくと

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{F}(z)}{r} \quad (7-131)$$

である。(7-129)(1), (7-130)(2)より、次式の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\varphi}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_\varphi = 0 \quad \text{ただし,} \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

(7-131)を代入すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{F}(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{r} k^2 \dot{F}(z) = 0 \quad \therefore \frac{d^2 \dot{F}(z)}{dz^2} + k^2 \dot{F}(z) = 0$$

$\dot{F}(z)$ が $z$ のみの関数だから $\partial/\partial z \rightarrow d/dz$ にかえて、常微分方程式となっている。 $z$ 方向に進む進行波のみを考えた場合には、次式で表される。

$$\dot{F}(z) = \dot{F}_0 e^{-jkz}$$

(7-131)より

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{F}_0}{r} e^{-jkz}$$

(7-129)(1)より

$$\dot{E}_r = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial z} = \frac{\dot{F}_0}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} e^{-jkz} = \frac{\dot{E}_0}{r} e^{-jkz} \quad \text{ただし,} \quad \dot{E}_0 \equiv \dot{F}_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (7-132)$$

と表せる。よって瞬時値は

$$E_r = \frac{|\dot{E}_0|}{r} \cos(\omega t - kz + \theta_0) \quad \text{ただし,} \quad \theta_0 = \arg \dot{E}_0 \quad (7-133)$$

となる。磁界は $\dot{E}_0$ を用いて

$$H_\varphi = \frac{|\dot{E}_0|}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos(\omega t - kz + \theta_0) \quad (7-134)$$

電圧は、図 7-12(c)の向きに定義すると

$$\begin{aligned} v(z,t) &= -\int_b^a E_r dr = -\int_b^a \frac{|\dot{E}_0|}{r} \cos(\omega t - k z + \theta_0) dr \\ &= -|\dot{E}_0| \cos(\omega t - k z + \theta_0) \int_b^a \frac{1}{r} dr = |\dot{E}_0| \log \frac{b}{a} \cos(\omega t - k z + \theta_0) \end{aligned} \quad (7-135)$$

となる。  $z=0$  で、  $v=V_0 \cos \omega t$  とすると、

$$|\dot{E}_0| = \frac{V_0}{\log(b/a)}, \quad \theta_0 = 0$$

となり、

$$v(z,t) = V_0 \cos(\omega t - kz) \quad (7-136)$$

$$E_r = \frac{V_0}{r \log(b/a)} \cos(\omega t - kz) \quad (7-137)$$

$$H_\phi = \frac{V_0}{r \log(b/a)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos(\omega t - kz) \quad (7-138)$$

全電流  $i$  を図の向きに定義する。導体を完全導体と考えると、磁界が単位長の面電流だから  $r=a$  のときの境界条件(2-61)より、  $i(z,t) = 2\pi a H_\phi$  ( $H_\phi$  は  $r=a$  のときの値) だから、(7-138)より

$$i(z,t) = \frac{2\pi V_0}{\log(b/a)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos(\omega t - kz) \quad (7-139)$$

である。よって(7-138)、(7-139)より

$$i(z,t) = 2\pi r H_\phi \quad (7-140)$$

特性インピーダンス  $Z_0$  は次式となる。  $I_0$  は  $i(z,t)$  の振幅である。

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \log \frac{b}{a} \quad (7-141)$$

分布定数回路とのつながりを考えよう。

(7-130)(2)の両辺を  $r$  方向に線積分すると

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b E_r dr = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b H_\phi dr \quad (7-142)$$

電流が表面に流れるとして、導体内の内部インダクタンスを無視すると微小長さ  $\Delta z$  の長さ当たり、鎖交する磁束は(7-140)を用いて

$$\phi = \int_a^b \mu H_\phi \Delta z dr = \int_a^b \mu \frac{i(z,t)}{2\pi r} \Delta z dr = \frac{\mu}{2\pi} \Delta z i(z,t) \log \frac{b}{a} = L \Delta z i(z,t) \quad (7-143)$$

となる。1m 当りに換算したインダクタンスは次式となる。

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (7-144)$$

(7-135),(7-143)を (7-142)に代入して次式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

(7-129)(1)の両辺を  $r$  一定の円周上で周回線積分して次式が得られる。

$$-\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi r} H_\phi dl = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi r} E_r dl$$

ここで、 $\Delta z$  の長さ当たりの電荷は、ガウスの法則より  $\varepsilon E_r \Delta z$  が表面電荷に相当するので

$$Q = \int_0^{2\pi r} \varepsilon E_r \Delta z dl = C \Delta z v \quad \therefore \quad \varepsilon \int_0^{2\pi r} E_r dl = 2\pi r \varepsilon E_r = C v \quad (7-145)$$

となる。よって(7-136), (7-137)より

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\log(b/a)} \text{ [F/m]} \quad (7-146)$$

である。(7-140), (7-145)だから

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial v}{\partial t}$$

と書ける。これらは分布定数回路の基本式に一致する。分布定数回路より得られた(7-27)の結果に、(7-144), (7-146)を用いると、マクスウェルの方程式より得られた(7-139)に一致する。

ベクトルポテンシャルを使った解法を示す。

電流は  $z$  方向成分のみで、そのためベクトルポテンシャルも  $z$  成分のみと考える。また  $\phi$  方向に対称だから、 $\phi$  の関数でないとする。波動として伝わることから、 $\cos(\omega t - kz)$  の因子を持つと考えて、ベクトルポテンシャルのフェーザ表示を次式で仮定する。

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_z \hat{\mathbf{z}} = \dot{A}(r) e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} \quad (7-147)$$

(7-63)で、強制電流  $\dot{\mathbf{i}}_0 = \mathbf{0}$  とおくと

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (7-148)$$

上式に(7-147)を代入すると(付 23)より次式が得られる。

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} = \left( \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{z}} = \left( \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial r^2} e^{-jkz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}}{\partial r} e^{-jkz} - k^2 \dot{A} e^{-jkz} \right) \hat{\mathbf{z}} = -k^2 \dot{A} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

よって

$$\frac{\partial^2 \dot{A}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}(r)}{\partial r} = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\dot{A}}{dr} \right) = 0$$

解くと

$$r \frac{d\dot{A}}{dr} = k_1 \quad \therefore \quad \dot{A} = k_1 \log r + k_2 \quad \therefore \quad \dot{\mathbf{A}} = (k_1 \log r + k_2) e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$r = b$  でベクトルポテンシャルを 0 とすると、 $k_2 = -k_1 \log b$  となる。以上により

$$\dot{\mathbf{A}} = k_1 \log \frac{r}{b} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} \quad (7-149)$$

これで、(7-148)の解の1つが求まった。磁束密度，磁界は次式で求められる。

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{k_1}{r} e^{-jkz} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\mu r} k_1 e^{-jkz} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

(7-65)のローレンツゲージより

$$\dot{V} = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \text{div} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial z} = \frac{k k_1}{\omega\mu\epsilon} e^{-jkz} \log \frac{r}{b}$$

よって、 $r=b$ で $\dot{V}=0$ となる。先に、 $r=b$ で $\dot{V}=0$ として、 $r=b$ で $\dot{\mathbf{A}}=0$ を得ることもできる。

電界は(2-26)より、 $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ を用いて

$$\dot{\mathbf{E}} = -\text{grad} \dot{V} - j\omega \dot{\mathbf{A}} = -\frac{k k_1}{\omega\mu\epsilon r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{r}} + jk^2 \frac{k_1}{\omega\mu\epsilon} \log \frac{r}{b} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} - j\omega k_1 \log \frac{r}{b} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{k k_1}{\omega\mu\epsilon r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{r}}$$

(7-132)と同様に、 $\dot{E}_r(z) = (\dot{E}_0/r)e^{-jkz}$ と $\dot{E}_0$ を決めると

$$k_1 = -\sqrt{\epsilon\mu} \dot{E}_0$$

従って、電位 $\dot{V}$ ，ベクトルポテンシャル $\dot{\mathbf{A}}$ ，クーロン電界 $\dot{\mathbf{E}}_c$ ，誘導電界 $\dot{\mathbf{E}}_b$ は次式となる。

$$\dot{V} = \dot{E}_0 \log \frac{b}{r} e^{-jkz}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \sqrt{\epsilon\mu} \dot{E}_0 \log \frac{b}{r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_c = \frac{\dot{E}_0}{r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{r}} + jk \dot{E}_0 \log \frac{b}{r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_b = -jk \dot{E}_0 \log \frac{b}{r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_c + \dot{\mathbf{E}}_b = \frac{\dot{E}_0}{r} e^{-jkz} \hat{\mathbf{r}}$$

$\dot{V}$ は(7-135)で $a$ を $r$ とし、フェーザ表示した式に一致する。電界 $\dot{\mathbf{E}}$ は $r$ 軸成分のみであるが、 $\text{rot} \dot{\mathbf{E}} \neq 0$ で回転が0でない。一方クーロン電界 $\dot{\mathbf{E}}_c$ には $z$ 成分もあるが、 $\text{rot} \dot{\mathbf{E}}_c = 0$ が容易に確かめられる。図7-12の電界 $\mathbf{E}$ はクーロン電界 $\mathbf{E}_c$ の $r$ 軸成分と等しい。電位はクーロン電界の任意の積分路で求められるが、 $r-\phi$ 平面上で線積分すれば、 $\dot{\mathbf{E}}_c$ の $z$ 成分を考えなくて良いから、容易に電位が求められる。(7-135)はこのようにして電位が求められたのである。

なお、電界 $\dot{\mathbf{E}}$ だけを求めるなら、 $\dot{\mathbf{E}} = \text{rot} \dot{\mathbf{H}} / (j\omega\epsilon)$ を用いて計算するのが簡単である。

## ○ 導波管で送る電磁波(TE波, TM波)

導波管は、断面が長方形または円の中空のパイプ状の伝送路で、壁面は銅や銀などの導体で作られている。同軸ケーブルと比べて高価であるが、損失が少なく電力用に適している。電磁波は、

導波管の入口に設置した送信アンテナから送られ、出口の受信アンテナで受け取られる。導波管の場合には、中空導体内に静電界が存在しないのと同じように TEM 波は存在しない。利用されている電磁波は TE 波(transverse electric wave)(H 波,  $E_z = 0$ ) と TM 波(transverse magnetic wave)(E 波,  $H_z = 0$ ) である。TEM 波でないので単純な電気回路で考えることはできない。そこで、電磁波の基本式を使って解析しよう。

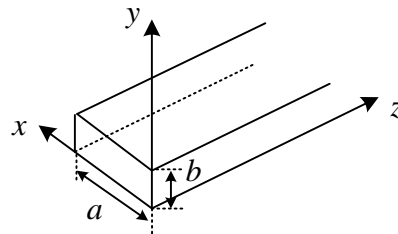


図 7-13 導波管

本テキストでは、TE 波 (H 波,  $E_z = 0$ ) を考える。そこで、(7-61)のヘルムホルツの方程式

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (7-150)$$

に注目しよう。この式で、 $\kappa = \mathbf{0}$  として、 $z$  成分は次式で表せる。

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y, z)}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \dot{H}_z(x, y, z) = 0 \quad (7-151)$$

$z$  方向に伝わる電磁波は、これまでの計算でもそうであったように、 $\cos(\omega t - \beta z)$  の因子をもつと考えられる。すなわち、フェーズ表示すれば、 $z$  を含む因子は  $e^{-j\beta z}$  をもつことになる。これは全ての変数に共通である。そこで、

$$\dot{H}_z(x, y, z) = \dot{H}_z(x, y) e^{-j\beta z} \quad (7-152)$$

と置く。これを代入して、

$$\left\{ \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial y^2} - \beta^2 \dot{H}_z(x, y) + \omega^2 \epsilon \mu \dot{H}_z(x, y) \right\} e^{-j\beta z} = 0$$

従って、

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial y^2} + k_H^2 \dot{H}_z(x, y) = 0 \quad (7-153)$$

$$\text{ただし、} k_H^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \beta^2 \quad (7-154)$$

を解けばよい。方形導波管は、 $x$  軸、 $y$  軸に平行な境界があるので

$$\dot{H}_z(x, y) = \dot{X}(x) \dot{Y}(y) \quad (7-155)$$

と仮定する。これを代入して

$$\dot{Y}(y) \frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \dot{X}(x) \frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + k_H^2 \dot{X}(x) \dot{Y}(y) = 0$$

両辺を  $\dot{X}(x)\dot{Y}(y)$  で割ると

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{\partial^2 \dot{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{\partial^2 \dot{Y}(y)}{\partial y^2} + k_H^2 = 0$$

各項はそれぞれ、 $x$  の関数、 $y$  の関数及び定数なので、それぞれが定数でなければならない。よって、次式の様における。

$$\frac{1}{\dot{X}(x)} \frac{d^2 \dot{X}(x)}{dx^2} = -k_x^2 \quad (7-156)$$

$$\frac{1}{\dot{Y}(y)} \frac{d^2 \dot{Y}(y)}{dy^2} = -k_y^2 \quad (7-157)$$

$$\text{ただし, } k_H^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (7-158)$$

(7-156)は、常微分方程式だから容易に解ける。特性方程式は  $s^2 + k_x^2 = 0 \therefore s = \pm jk_x$  より

$$\dot{X}(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

同様に(7-157)より

$$\dot{Y}(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

従って、

$$\dot{H}_z(x, y) = (A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x))(C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)) \quad (7-159)$$

$A, B, C, D$  は境界条件から決定できる。

波動方程式から全てが出てくる訳ではないので、境界条件から解を求める前に、マクスウェルの方程式から得られる電界と磁界の関係を示す。因子  $e^{-j\beta z}$  をもつとして

$$\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{E}}(x, y) e^{-j\beta z}, \quad \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = \dot{\mathbf{H}}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (7-160)$$

とおく。TE 波の条件、 $\dot{E}_z = 0$  を考慮すると④の  $\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$  より以下の式が得られる。

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x(x, y, z) & \dot{E}_y(x, y, z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \hat{y} + \left( \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$= -j\omega\mu\dot{H}_x(x, y, z)\hat{x} - j\omega\mu\dot{H}_y(x, y, z)\hat{y} - j\omega\mu\dot{H}_z(x, y, z)\hat{z}$$

(7-160)を代入して,  $e^{-j\beta z}$  で割り算して

$$\beta\dot{E}_y(x, y) = -\omega\mu\dot{H}_x(x, y) \quad (7-161)$$

$$\beta\dot{E}_x(x, y) = \omega\mu\dot{H}_y(x, y) \quad (7-162)$$

$$\frac{\partial\dot{E}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial\dot{E}_x(x, y)}{\partial y} = -j\omega\mu\dot{H}_z(x, y) \quad (7-163)$$

③の  $\text{rot}\dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}$  より以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{rot}\dot{\mathbf{H}}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{H}_x(x, y, z) & \dot{H}_y(x, y, z) & \dot{H}_z(x, y, z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}\right)\hat{z} \\ &= j\omega\varepsilon\dot{E}_x(x, y, z)\hat{x} + j\omega\varepsilon\dot{E}_y(x, y, z)\hat{y} \end{aligned}$$

(7-160)を代入して,  $e^{-j\beta z}$  で割り算して

$$\frac{\partial\dot{H}_z(x, y)}{\partial y} + j\beta\dot{H}_y(x, y) = j\omega\varepsilon\dot{E}_x(x, y) \quad (7-164)$$

$$-j\beta\dot{H}_x(x, y) - \frac{\partial\dot{H}_z(x, y)}{\partial x} = j\omega\varepsilon\dot{E}_y(x, y) \quad (7-165)$$

$$\frac{\partial\dot{H}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial\dot{H}_x(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7-166)$$

以上の式から, 電界と磁界を  $\dot{H}_z(x, y)$  で表そう。(7-162), (7-164)より

$$\dot{E}_x(x, y) = -\frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{\partial\dot{H}_z(x, y)}{\partial y} \quad (7-167)$$

(7-161), (7-165)より

$$\dot{E}_y(x, y) = \frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{\partial\dot{H}_z(x, y)}{\partial x} \quad (7-168)$$

(7-161)より

$$\dot{H}_x(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\mu} \dot{E}_y(x, y) = -\frac{j\beta}{k_H^2} \frac{\partial\dot{H}_z(x, y)}{\partial x} \quad (7-169)$$

(7-162)より

$$\dot{H}_y(x, y) = \frac{\beta}{\omega\mu} \dot{E}_x(x, y) = -\frac{j\beta}{k_H^2} \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial y} \quad (7-170)$$

が得られる。(7-163)は(7-167), (7-168)を代入すると波動方程式(7-153)に一致し, (7-166)は(7-169), (7-170)より満足している。また, (7-167), (7-168)より①の

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{\partial \dot{E}_x(x, y)}{\partial x} e^{-j\beta z} + \frac{\partial \dot{E}_y(x, y)}{\partial y} e^{-j\beta z} = 0$$

は成り立つ。また, ②も(7-163)より

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) &= e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_x(x, y)}{\partial x} + e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_y(x, y)}{\partial y} + \dot{H}_z(x, y) \frac{\partial}{\partial z} (e^{-j\beta z}) \\ &= e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_x(x, y)}{\partial x} + e^{-j\beta z} \frac{\partial \dot{H}_y(x, y)}{\partial y} - j\beta \dot{H}_z(x, y) e^{-j\beta z} = 0 \end{aligned}$$

となり, 満足する。

波動方程式を解いて  $\dot{H}_z(x, y)$  を求め, (7-167)~(7-170)より電磁界を計算すればよい。

境界条件は, 導体の表面で, 電界の接線成分が 0 となることから, (7-168), (7-167)を用い

$$(1) \quad x=0 \quad \text{で} \quad \dot{E}_y(x, y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial x} = 0$$

$$(2) \quad x=a \quad \text{で} \quad \dot{E}_y(x, y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial x} = 0$$

$$(3) \quad y=0 \quad \text{で} \quad \dot{E}_x(x, y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial y} = 0$$

$$(4) \quad y=b \quad \text{で} \quad \dot{E}_x(x, y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \dot{H}_z(x, y)}{\partial y} = 0$$

(7-159)より,  $\frac{\partial}{\partial x} \dot{H}_z(x, y) = (Ak_x \cos(k_x x) - Bk_x \sin(k_x x))(C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y))$  であり, (1)

を用いて

$$A = 0$$

$$(2) \text{より, } \sin(k_x a) = 0 \quad \therefore \quad k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$(3), (4) \text{より同様に, } C = 0, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

従って,  $BD = H_0$  において

$$\dot{H}_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$\therefore \quad \dot{H}_z(x, y, z) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7-171)$$

が得られる。実際の瞬時値は,



$$\begin{aligned}
H_z(x, y, z, t) &= \text{Re}\{\dot{H}_z(x, y, z)e^{j\omega t}\} \\
&= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - \beta z)
\end{aligned} \tag{7-172}$$

なお、 $H_0$ は正の実数と考えても一般性を失わない。他の値は $\dot{H}_z(x, y)$ を用いて計算できる。

$$\dot{E}_x(x, y, z) = \frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7-173}$$

$$\dot{E}_y(x, y, z) = -\frac{j\omega\mu}{k_H^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7-174}$$

$$\dot{H}_x(x, y, z) = \frac{j\beta}{k_H^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7-175}$$

$$\dot{H}_y(x, y, z) = \frac{j\beta}{k_H^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7-176}$$

となる。当然、 $\dot{E}_z = 0$ である。

$m = n = 0$ の場合には電界が0となり伝送に適さない。  
(7-154) , (7-158)より,

$$k_H^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{7-177}$$

電磁波が減衰なく伝送するためには

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > 0 \tag{7-178}$$

でなければならない。 $a > b$ とすると、 $m = 1, n = 0$ の場合、最も低い周波数から電磁波が伝送できる。これはTE<sub>10</sub>モードと呼ばれている。TE<sub>10</sub>モードの最低周波数（カットオフ周波数）は、(7-177)より次式のように求められる（ $\beta = 0, m = 1, n = 0$ として）。

$$\omega = \frac{\pi}{a\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \therefore f = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{2a} \tag{7-179}$$

TE<sub>10</sub>モードの電磁界は $m = 1, n = 0$ より、以下の様に得られる。

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_x(x, y, z, t) = -\frac{a\beta}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_y(x, y, z, t) = 0$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{a\omega\mu}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_x(x, y, z, t) = E_z(x, y, z, t) = 0$$

図 7-14 に TE<sub>10</sub>モードの電磁界を示す。 $b/a = 1/2$ のとき、TE<sub>20</sub>モードとTE<sub>01</sub>モード信号のカ

ットオフ周波数は等しく  $f = c/a$  である。従って、 $TE_{10}$  モードの電磁波として減衰することなく伝送できる周波数の範囲は以下の通りである。

$$\frac{c}{a} > f > \frac{c}{2a} \quad (f\lambda = c \text{ より波長では } 2a > \lambda > a)$$

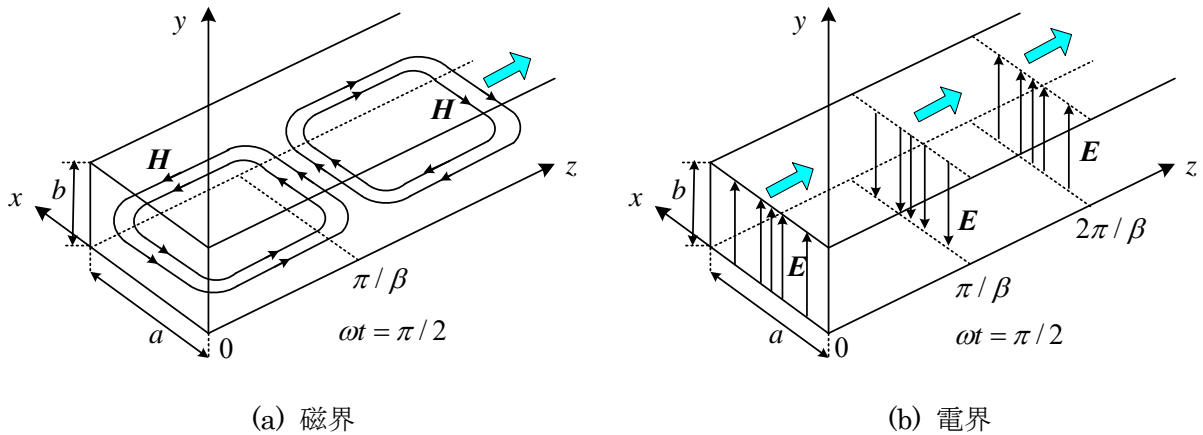


図 7-14 導波管の  $TE_{10}$  モードの電磁界

## ○ アンテナから送る電磁波

この節はアンテナの基礎となる話で、電磁波が空間に飛び出すことを考えよう。これまで学習したことがみごとに繋がってくる。点電荷の電荷が時間的に変化している場合が最も簡単に思えるが、その電荷がどこから供給されるかを考えると電流も必要である。また電荷保存の法則を考えると、増える方と減る方の 2 つの点電荷が必要である。ということで、電気双極子が最も簡単な場合ということになる。双極子は**ダイポール(dipole)**ということもある。

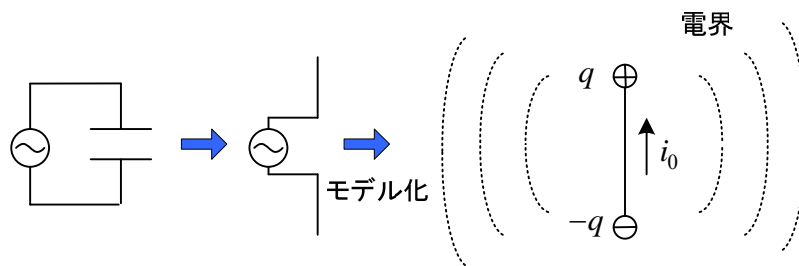


図 7-15 電気双極子

電磁波が飛び出す空間に電流の流れる物質がなければ、(2-35)、(2-36)より、次式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{i}_0(\mathbf{r}, t) \quad (7-180)$$

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon} \quad (7-181)$$

(7-181)で、時間によって電荷が変化しない場合には

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

となる。これはポアソンの方程式に他ならない。この解は、重ね合わせの理より、電荷が存在する空間  $V'$  全体で集めれば良く、P 点の電位  $V_p$  は次式で求められる。 $\mathbf{r}'$  を動かして集める。

$$V_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  は電荷のある所から、考えている点までの距離である。

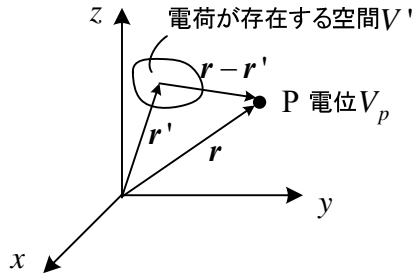


図 7-16 空間に分布した電荷が作る電位

それでは、(7-181)の場合はどうであろうか？つまり電荷が時間的に変化している場合である。実は、電荷の変化が伝わるのに時間がかかるのである。空気の光速は真空中の光速とほぼ等しいので、身近には体験しにくいのであるが。(7-181)の解は、次式となることが判っている<sup>(2),(27),(28)</sup>。

$$V_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (7-182)$$

ここで、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  [m/s] である。 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  [m/s] なら真空中の光速である。つまり、電荷から  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  離れた点では、電位は時間  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$  だけ前の電荷を使って求める必要があることを意味する。わかりやすい結果である。(7-180)のベクトルポテンシャルの場合には、

$$A_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{i}_0(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (7-183)$$

となる。(7-182), (7-183)は遅延ポテンシャル(retarded potential)と呼ばれている。

図 7-17 の電気双極子の場合で、電荷や電流が角周波数  $\omega$  で変化する場合を考えよう。(7-182), (7-183)のフェーザ表示は、 $k = \omega/c = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  として次式となる<sup>(10)</sup>。

$$\dot{V}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (7-184)$$

$$\dot{A}_p(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{i}}_0(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (7-185)$$

例えば、 $\mathbf{i}_0(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) = \text{Re}\{\dot{\mathbf{i}}_0(\mathbf{r}')e^{j\omega(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}\} = \text{Re}\{\dot{\mathbf{i}}_0(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}e^{j\omega t}\}$ である。

電荷は、 $q = q_0 \cos \omega t$  の点電荷について考え、電荷密度の体積分は電荷になるので

$$\dot{V}_P(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r_1} e^{-jk r_1} \quad (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r_1 \text{ だから}) \quad (7-186)$$

となる。同様に、 $-q$  の点電荷について考え、これらの和から

$$\dot{V}_P(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} e^{-jk r_1} - \frac{1}{r_2} e^{-jk r_2} \right), \quad \dot{q} = q_0 \quad (7-187)$$

ここで、第4章の例題10を参照して

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta, \quad \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{2r} \cos \theta \right), \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{l}{2r} \cos \theta \right)$$

$$e^{-jk r_1} \approx e^{-jk(r - \frac{l}{2} \cos \theta)} = e^{-jkr} e^{jk \frac{l}{2} \cos \theta} \approx e^{-jkr} \left( 1 + jk \frac{l}{2} \cos \theta \right)$$

$$e^{-jk r_2} \approx e^{-jkr} \left( 1 - jk \frac{l}{2} \cos \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_P(\mathbf{r}) &\approx \frac{q_0}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr} \left( 1 + \frac{l}{2r} \cos \theta + jk \frac{l}{2} \cos \theta - 1 + \frac{l}{2r} \cos \theta + jk \frac{l}{2} \cos \theta \right) \quad (l^2 \text{ 項無視}) \\ &= \frac{q_0 l \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} e^{-jkr} (1 + jkr) \end{aligned} \quad (7-188)$$

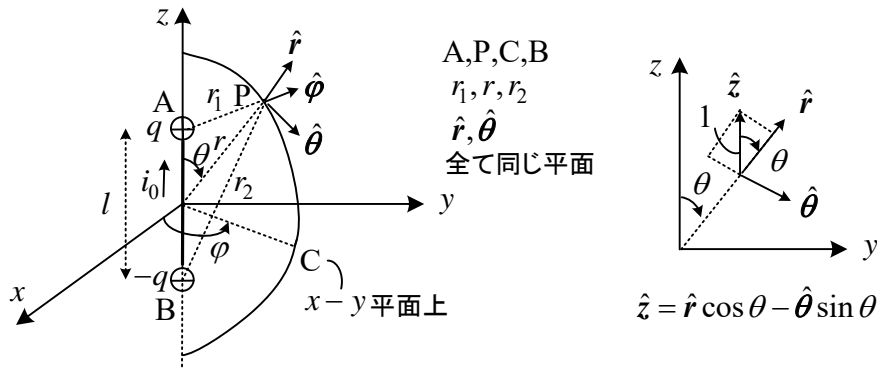


図 7-17 電気双極子と球座標系

電流密度も原点近傍にあると考え  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$  とする。電流密度の体積分は全電流  $i_0$  に長さ  $l$  を掛ければよいので

$$\dot{A}_P(\mathbf{r}) = \frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \hat{z} = \frac{\mu \dot{i}_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \quad (7-189)$$

電位とベクトルポテンシャルが求まったので、(2-26)より電界は次式から計算できる。

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \dot{V}_P - j\omega \dot{A}_P \quad (7-190)$$

ここで,  $\dot{\mathbf{E}}_c = -\text{grad}\dot{V}_p = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\dot{V}_p}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{V}_p}{\partial\theta}$  (付24) より

$$\begin{aligned}
&= -\hat{\mathbf{r}}\frac{q_0 l}{4\pi\epsilon}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left\{e^{-jkr}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)\right\} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{q_0 l}{4\pi\epsilon}e^{-jkr}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta) \\
&= \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon}e^{-jkr}\left\{\hat{\mathbf{r}}\left(\frac{2jk}{r^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{k^2}{r}\right)\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2}\right)\sin\theta\right\}
\end{aligned} \tag{7-191}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}}_b &= -j\omega\dot{\mathbf{A}}_p = -j\omega\frac{\mu i_0 l}{4\pi r}e^{-jkr}\hat{\mathbf{z}} \\
&= -j\omega\frac{\mu i_0 l}{4\pi r}e^{-jkr}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)
\end{aligned} \tag{7-192}$$

電流は  $i_0 = \frac{dq}{dt}$  だから, フェーザ表示は

$$\dot{i}_0 = j\omega\dot{q}, \dot{q} = q_0 \tag{7-193}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_c + \dot{\mathbf{E}}_b \\
&= \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon}e^{-jkr}\left\{\hat{\mathbf{r}}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2jk}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2}\right)\sin\theta\right\} \\
&\quad + \omega^2\frac{\mu q_0 l}{4\pi r}e^{-jkr}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta) \quad (k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \text{ より}) \\
&= \hat{\mathbf{r}}\frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2}\right)e^{-jkr} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{-jkr} \\
&= \hat{\mathbf{r}}\frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon}k^3\left(\frac{1}{(kr)^3} + \frac{j}{(kr)^2}\right)e^{-jkr} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon}k^3\left(\frac{1}{(kr)^3} + \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{kr}\right)e^{-jkr}
\end{aligned} \tag{7-194}$$

$1/(kr)^3, 1/(kr)^2$  の項はクーロン電界  $\dot{\mathbf{E}}_c$  のみで作られている。 $1/(kr)$  の項は, クーロン電界  $\dot{\mathbf{E}}_c$  と誘導電界  $\dot{\mathbf{E}}_b$  で打ち消す項があり, 誘導電界  $\dot{\mathbf{E}}_b$  の一部が残る。(7-83)より

$$kr = \omega r\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}r$$

であり,  $kr=1$  のとき, 各項は同程度の大きさになる。 $kr$  の値によって近似が可能となる。

一方, 磁界は  $\dot{\mathbf{A}}_p$  の  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  成分が 0 で,  $\varphi$  の関数でないから, (付26)より

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu}\text{rot}\dot{\mathbf{A}}_p = \frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\dot{A}_{p\theta})}{\partial r} - \frac{\partial(\dot{A}_{pr})}{\partial\theta}\right\}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&= \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\dot{i}_0 l \sin\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)e^{-jkr} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{j\omega q_0 l \sin\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)e^{-jkr} \\
&= \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\dot{i}_0 l \sin\theta}{4\pi}k^2\left(\frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{kr}\right)e^{-jkr} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{j\omega q_0 l \sin\theta}{4\pi}k^2\left(\frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{kr}\right)e^{-jkr}
\end{aligned} \tag{7-195}$$

$kr \ll 1$  の場合, すなわち双極子の近くで周波数も低い場合には

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}} &\simeq \hat{\mathbf{r}} \frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} e^{-jkr} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} e^{-jkr} \\
\therefore \mathbf{E}(t) &= \left( \hat{\mathbf{r}} \frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \right) \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r) \\
&\simeq \left( \hat{\mathbf{r}} \frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega t \quad (\omega r \text{ が小さい}) \\
&= \hat{\mathbf{r}} \frac{q(t)l \cos \theta}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{q(t)l \sin \theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \tag{7-196}
\end{aligned}$$

となる。よって電荷の時間変化があっても(4-29)の静電界の解をそのまま拡張して使用できることがわかる。(7-196)の近似した電界は  $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$  を満足するからクーロン電界である。

磁界については、 $kr \ll 1$  のとき、 $r$  が小さく周波数が低い場合には次式となる。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}} &= \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{i_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-jkr} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{j\omega q_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-jkr} \\
\therefore \mathbf{H}(t) &= \frac{\omega q_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \simeq -\frac{\omega q_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \omega t \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{i_0(t)l \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{7-197}
\end{aligned}$$

(5-11)で、 $I dl = i_0 l$ 、 $\mathbf{t} \times \mathbf{r} = r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$  と置くと、(7-197)と一致する。よって  $r$  が小さい領域で、周波数が高くない場合にはたとえ時間変化がある場合でもビオ-サバールの法則が適用できることが分る。

$kr \gg 1$  の場合すなわち  $r/\lambda \gg 1/(2\pi)$  の遠方領域では

$$\dot{\mathbf{E}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon r} k^2 e^{-jkr} \tag{7-198}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\omega q_0 l \sin \theta}{4\pi r} k e^{-jkr} \tag{7-199}$$

となる。 $\theta = \pi/2$  の場合、(7-198), (7-199)より、電界と磁界の瞬時値は以下のように求められる。

$$E_\theta(r, t) = -\frac{q_0 l}{4\pi\epsilon r} k^2 \cos(\omega t - kr) = E_0 \cos(\omega t - kr) \tag{7-200}$$

$$H_\phi(r, t) = -\frac{\omega q_0 l}{4\pi r} k \cos(\omega t - kr) = H_0 \cos(\omega t - kr) \tag{7-201}$$

これは振幅の減衰を除けば平面波と同じである。電界と磁界の振幅の比  $\eta$  は

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \frac{q_0 l k^2}{4\pi\epsilon r \omega q_0 l k} \frac{4\pi r}{\omega\epsilon} = \frac{k}{\omega\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{7-202}$$

となり、(7-81),(7-82)の場合と一致している。 $\eta$  は波動インピーダンス(wave impedance)とよばれている。

真空中では、次の値となる。

$$\eta = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \simeq 377 \Omega \tag{7-203}$$

本テキストでは、クーロン電界と誘導電界を明らかにするため、以上の理論展開としたが、まずベクトルポテンシャルより(7-195)の磁界を求め、次に  $\dot{\mathbf{E}} = (1/j\omega\epsilon)\text{rot}\dot{\mathbf{H}}$  から電界を求めることもできる<sup>(10)</sup>。この場合、 $\dot{\mathbf{V}}_p$  を求める必要はない。以下、このことの説明をしておこう。

ベクトルポテンシャルから， $\dot{V}_p$ を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_p &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{A}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial \varphi} \\
 &= \frac{\mu_0 \dot{i} l}{4\pi} \cos \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r e^{-jkr}) - \frac{\mu_0 \dot{i} l}{4\pi r} e^{-jkr} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \\
 &= \frac{\mu_0 \dot{i} l}{4\pi} \cos \theta \frac{1}{r^2} (e^{-jkr} - jkr e^{-jkr}) - \frac{\mu_0 \dot{i} l}{4\pi r} e^{-jkr} \frac{2}{r} \cos \theta \\
 &= -\frac{\mu_0 \dot{i} l}{4\pi r} e^{-jkr} \left( \frac{1}{r} + jk \right) \cos \theta
 \end{aligned} \tag{7-204}$$

である。よって，(7-65) のローレンツの条件より  $\kappa = 0$  とおいて電位  $\dot{V}_p$  は

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_p &= -\frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_p \\
 &= \frac{\dot{i} l \cos \theta}{j\omega\epsilon 4\pi r^2} e^{-jkr} (1 + jkr) \quad (\dot{i} = j\omega q_0 \text{ より}) \\
 &= \frac{q_0 l \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} e^{-jkr} (1 + jkr)
 \end{aligned} \tag{7-205}$$

となる。これは(7-188)に他ならない。

もともと(7-183)のベクトルポテンシャルにはローレンツの条件が加味されていた。従って，ベクトルポテンシャルが分かれば，ローレンツの条件から電位を計算できたのである。すなわち，(7-183)のベクトルポテンシャルには電位の情報も入っており，この結果電位の計算なしに電磁界が求められたと考えることができよう。

次に微小ループ電流が作る電磁界を求める。ここでは，電気双極子で得られた結果を利用する。まず，マクスウェルの方程式①～④において，永久磁石で得られた(5-22)を用いて

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0 \tag{7-206}$$

と置く<sup>(3),(15)</sup>。ここで，一般性をもたせるため  $\epsilon, \mu$  は場所で異なるとする。例えば永久磁石の中と外の  $\mu$  は異なる。永久磁化  $\mathbf{M}_0$  は永久磁石以外では  $\mathbf{0}$  である。①～④より以下の式が得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{より} \quad \operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = \rho \tag{7-207}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{より} \quad \operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{M}_0 = \rho_m \tag{7-208}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{より} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{7-209}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{より} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{7-210}$$

ここで，永久磁荷が時間とともに変化すると仮定して，**磁流**(magnetic current)を次式で定義している。

$$\mathbf{j}_m = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial t} \tag{7-211}$$

両辺の  $\operatorname{div}$  をとると次式が成立する。

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m + \frac{\partial \rho_{m0}}{\partial t} = 0 \quad (7-212)$$

これは磁流と永久磁荷に対する連続の式である<sup>(14)</sup>。

永久磁石の式を基に、マクスウェルの方程式から導出したので物理的イメージが得られると思う。このような導出については手持ちの文献ではっきりと書かれたものは見当たらない。双対(duality)の考え方から、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = \rho_m$  (磁荷) と仮定する文献もあるが、筆者は  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  を前提として考えたい。(7-207)~(7-210)より、次の表が得られる<sup>(14),(20)</sup>。

表 7-1 磁荷と磁流を考えた場合のマクスウェルの方程式

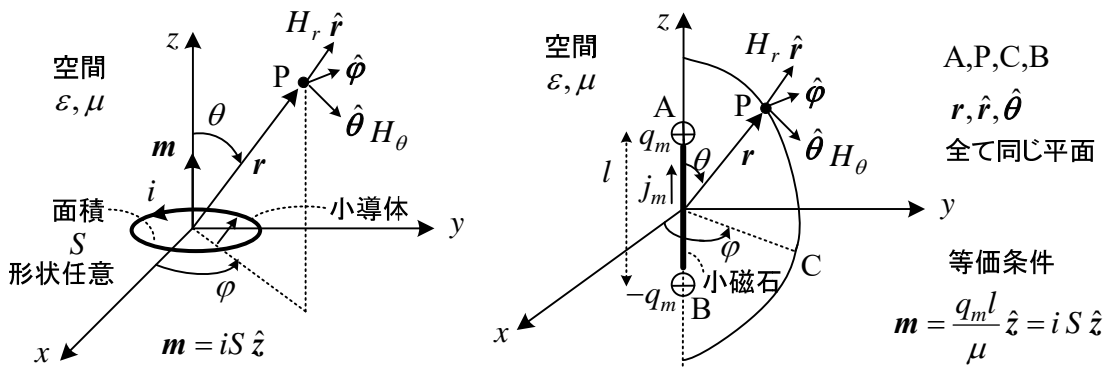
電荷と電流が作る電磁界	磁荷と磁流が作る電磁界 $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$	
$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{E}' = 0$
$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$	$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = \rho_{m0}$	$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = \rho_{m0}$
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = \mathbf{j}_m + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$

この表を見ると良く対応しており、電荷と電流が作る電磁界の  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \varepsilon, \mu, \mathbf{i}, \rho$  (左側) を

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \varepsilon \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \varepsilon, \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}_m, \rho \rightarrow \rho_{m0} \quad (7-213)$$

とすることで、磁荷と磁流が作る電磁界 (右側) が得られる。

電気双極子や磁気双極子から離れた  $\varepsilon, \mu$  が一定の空間における電磁界を考えると、電気双極子の電流が流れる微小導線部分の誘電率や透磁率が問題にならないように、磁気双極子で磁流が流れるとした微小磁性体部分の透磁率や誘電率は問題にならないと考えられる。この場合、表 7-1 で、 $\varepsilon, \mu$  は電気双極子や磁気双極子の置かれた空間の値として考えてよいであろう。



(a) 微小ループ電流

(b) 等価な磁気双極子

図 7-18 微小ループ電流が作る電磁界



以上の結果を基に、図 7-18(a)の微小ループ電流が作る電磁界を(b)等価な磁気双極子を使って求めよう。そこで、 $i = i_0 \cos \omega t$  とすると、そのフェーザ表示は  $\dot{i} = i_0$  とおける。このとき、(5-61)の等価条件がこの場合も成立すると仮定すると

$$q_m(t)l = \mu i(t)S = \mu i_0 S \cos \omega t \quad (7-214)$$

となる。よって、フェーザ表示は  $\dot{q}_m l = \mu i_0 S$  となる。(7-194), (7-195)のフェーザ表示で

$$\dot{q}l = q_0 l \rightarrow \dot{q}_m l = \mu i_0 S = \mu i_0 S \quad (7-215)$$

とおくことにより、(7-213)の対応から磁界と電界が以下のように得られる。

$$\dot{H} = \hat{r} \frac{i_0 S \cos \theta}{2\pi} k^3 \left( \frac{1}{(kr)^3} + \frac{j}{(kr)^2} \right) e^{-jkr} + \hat{\theta} \frac{i_0 S \sin \theta}{4\pi} k^3 \left( \frac{1}{(kr)^3} + \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right) e^{-jkr} \quad (7-216)$$

$$\dot{E} = -\hat{\phi} \frac{j\omega \mu i_0 S \sin \theta}{4\pi} k^2 \left( \frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{kr} \right) e^{-jkr} \quad (7-217)$$

このように電気双極子の解が分かっているならば、非常に簡単に解が得られるのは魅力的である。磁荷、磁流は実在しないが解析を容易に行うモデルとして役立つのである。

$kr \ll 1$  の場合、すなわち双極子の近くで周波数も低い場合には

$$\begin{aligned} \dot{H} &\approx \hat{r} \frac{i_0 S \cos \theta}{2\pi} \frac{1}{r^3} e^{-jkr} + \hat{\theta} \frac{i_0 S \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r^3} e^{-jkr} \\ \therefore H(t) &= \left( \hat{r} \frac{i_0 S \cos \theta}{2\pi} \frac{1}{r^3} + \hat{\theta} \frac{i_0 S \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r^3} \right) \cos(\omega t - kr) \\ &\approx \left( \hat{r} \frac{i_0 S \cos \theta}{2\pi} \frac{1}{r^3} + \hat{\theta} \frac{i_0 S \sin \theta}{4\pi \epsilon} \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega t \\ &= \hat{r} \frac{i(t)S \cos \theta}{2\pi r^3} + \hat{\theta} \frac{i(t)S \sin \theta}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (7-218)$$

となる。よって  $kr \ll 1$  の場合、電流の時間変化があってもビオ-サバルの法則より求めた(5-60)がそのまま使用できることがわかる。

# 文献

- (1) パノフスキー, フィリップス (林・西田訳): 新版電磁気学上, 丸善 (1967)
- (2) 平川浩正: 電磁気学, 培風館 (1968)
- (3) 竹山説三: 電磁気学現象理論, 丸善(1973)
- (4) H.H.ウッドソン, J.R.メルヒャー (大越, 二宮訳): 電気力学 I, II, 産業図書 (1974)
- (5) 飯田修一: 新電磁気学上, 下 丸善 (1975)
- (6) 関口利男: 電磁波, 朝倉書店 (1976)
- (7) 宮入庄太: 電気・機械エネルギー変換工学, 丸善(1976)
- (8) 細野敏夫: 電磁波工学の基礎, 昭晃堂 (1977)
- (9) L.ソリマー (中村, 河村訳): 電磁理論, 秀潤社 (1978)
- (10) 山下栄吉: 電磁波工学入門, 産業図書 (1980)
- (11) 砂川重信: 電磁気学演習, 岩波書店 (1982)
- (12) 宮副泰: 電磁気学 I, 朝倉書店 (1983)
- (13) 宮副泰: 電磁気学 II, 朝倉書店 (1983)
- (14) 安達三郎: 電磁波工学, コロナ社 (1983)
- (15) 松原正則: 最新電磁気学, 昭晃堂 (1983)
- (16) 難波江章・金東海・高橋勲・仲村節男・山田速敏: 基礎電気機器学, 電気学会 (1984)
- (17) 後藤憲一, 山崎修一郎共編: 詳解電磁気学演習, 共立出版 (1990)
- (18) 藤田広一: 電磁気学演習ノート, コロナ社 (1993)
- (19) 今井功: 電磁気学を考える, サイエンス社 (1995)
- (20) 細野敏夫: メタ電磁気学, 森北出版 (1999)
- (21) 後藤尚久: なっとくする電磁気学, 講談社 (2003)
- (22) 桂井誠: 基礎電気磁気学, オーム社 (2003)
- (23) 岡部洋一: 電磁気学の意味と考え方, 講談社 (2008)
- (24) 河野照哉・桂井誠: 電気磁気学演習, 電気学会 (2009)
- (25) 熊谷信昭: 改訂電磁理論, コロナ社 (2010)
- (26) 山本義隆: 新・物理入門, 駿台文庫 (2010)
- (27) 小宮山進, 竹川敦: マクスウェル方程式から始める電磁気学, 裳華房 (2016)
- (28) 砂川重信: 理論電磁気学第3版, 紀伊國屋書店 (2017)
- (29) 山田直平原著, 桂井誠著: 電気磁気学 (3版改訂), 電気学会 (2017)

\* 出版年は筆者の手元にある文献による。

# 付録

## ○ $10^n$ を表す記号

記号	T	G	M	k	m	$\mu$	n	p
	$10^{12}$	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
名称	テラ	ギガ	メガ	キロ	ミリ	マイクロ	ナノ	ピコ

## ○ よく使うギリシャ文字

頭字	小字	読み方	頭字	小字	読み方
$A$	$\alpha$	アルファ	$N$	$\nu$	ニュー
$B$	$\beta$	ベータ	$\Xi$	$\xi$	グサイ
$\Gamma$	$\gamma$	ガンマ	$\Pi$	$\pi$	パイ
$\Delta$	$\delta$	デルタ	$P$	$\rho$	ロー
$E$	$\varepsilon$	イプシロン	$\Sigma$	$\sigma$	シグマ
$Z$	$\zeta$	ゼータ	$T$	$\tau$	タウ
$H$	$\eta$	イータ	$\Phi$	$\phi, \varphi$	ファイ
$\Theta$	$\theta$	シータ	$\Upsilon$	$\upsilon$	ウプシロン
$K$	$\kappa$	カッパ	$X$	$\chi$	カイ
$\Lambda$	$\lambda$	ラムダ	$\Psi$	$\psi$	プサイ
$M$	$\mu$	ミュー	$\Omega$	$\omega$	オメガ

## ○ 国際単位系 (S I 単位系) : 一般にこの単位系に直して計算する。

単位は記号 (物理量) のときは [ ] を付け, 数値のときにつけない。数値と単位で

1つの物理量だから。例  $R [\Omega], 20 \Omega, R = 20 \Omega, R = 2r - 3 [\Omega]$

数値と単位の間空白を入れる。日本工業規格 規格番号 JISZ8203 参照

距離	メートル	m	電圧	ボルト	V
質量	キログラム	kg	磁束	ウェバー	Wb
時間	セカンド (秒)	s	磁束密度	テスラ	T
電流	アンペア	A	抵抗	オーム	$\Omega$
周波数	ヘルツ	Hz	コンダクタンス	ジーメンズ	S
力	ニュートン	N	静電容量	ファラド	F
エネルギー	ジュール	J	インダクタンス	ヘンリー	H
電力	ワット	W	電界		V/m
電荷量	クーロン	C	磁束		A/m

## ○ ベクトルの公式

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}f + \text{grad}g \quad (\text{付 1})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B} \quad (\text{付 2})$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot}\mathbf{B} \quad (\text{付 3})$$

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad}g + g \text{grad}f \quad (\text{付 4})$$

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = f \text{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}f \quad (\text{付 5})$$

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = (\text{grad}f) \times \mathbf{A} + f \text{rot}\mathbf{A} \quad (\text{付 6})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{B} \quad (\text{付 7})$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \text{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot}\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} \quad (\text{付 8})^*$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{div}\mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} \quad (\text{付 9})^*$$

$$\text{rot}(\text{grad}f) = \mathbf{0} \quad (\text{付 10})$$

$$\text{div}(\text{rot}\mathbf{A}) = 0 \quad (\text{付 11})$$

$$\nabla^2 f \equiv \text{div}(\text{grad}f) \quad (\text{定義}) \quad (\text{付 12})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) \quad (\text{定義}) \quad (\text{付 13})$$

$$* \quad (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} = (A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z})(B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

$$= (A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}) \hat{x} + (A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}) \hat{y} + (A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}) \hat{z}$$

と定義するとき、直角座標系で成立する。他の公式は直角座標系以外でも使用できる。

村上一郎：詳解演習電磁数学 [ I ]，廣川書店

## ○ 直角座標系

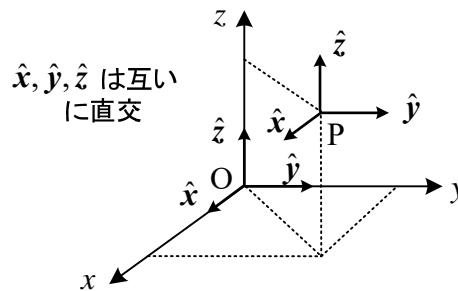
$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z},$$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$\text{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{付 14})$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{付 15})$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) \hat{x} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) \hat{y} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) \hat{z} \quad (\text{付 16})$$



$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  は場所によらず向きが同じ。

$\hat{x}$  から  $\hat{y}$  に回すと  $\hat{z}$  の向きに進む。(右手系)

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{付 17})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{付 18})$$

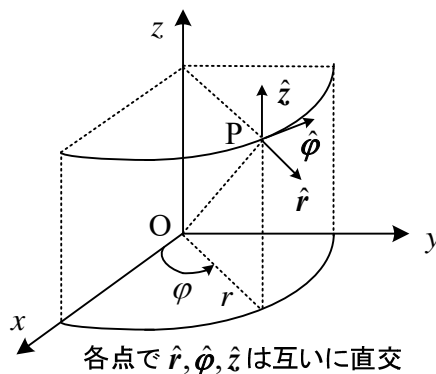
## ○ 円柱座標系(円筒座標系)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$|\hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\boldsymbol{\phi}}| = |\hat{\mathbf{z}}| = 1$$



$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$  は場所によって向きが違ふ。

$\hat{\mathbf{r}}$  から  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  に回すと  $\hat{\mathbf{z}}$  の向きに進む。

各点で  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}}$  は互いに直交

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \cos \varphi \hat{\mathbf{r}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{付 19})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{付 20})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right\} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{付 21})$$

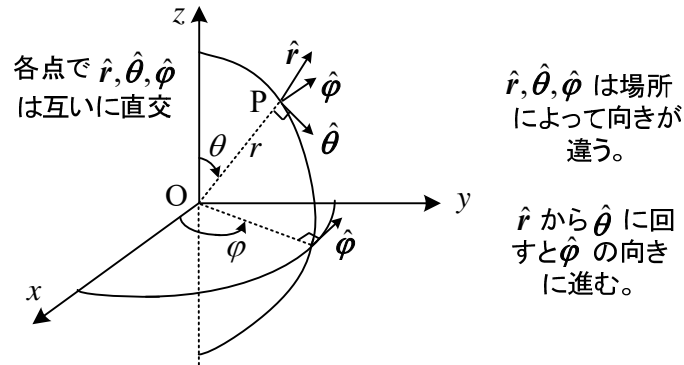
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{付 22})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A})$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left( \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &+ \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{付 23})$$

注意  $z$  成分のみが(付 22)を用いた  $\nabla^2 A_z$  になっている。

## ○ 球座標系(極座標系)



$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\phi}, \quad |\hat{r}| = |\hat{\theta}| = |\hat{\phi}| = 1, \quad \mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad \hat{x} = \sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\phi}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \quad \hat{y} = \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\phi}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \quad \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\phi} \quad (\text{付 24})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{付 25})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} \hat{r} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right\} \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (\text{付 26})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{付 27})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) \quad \text{より計算する。} \quad (\text{付 28})$$

## ○ ヘルムホルツの定理

電磁気学の教科書にはあまり載っていないが、大事な定理を紹介しよう。  
 任意のベクトル場  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が、無限遠点で零となる  $d(\mathbf{r}), \mathbf{R}(\mathbf{r})$  によって

$$\text{発散} \quad \text{div} \mathbf{F} = d(\mathbf{r}) \quad (\text{付 29})$$

$$\text{回転} \quad \text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{r}) \quad (\text{付 30})$$

として与えられると、 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  は一意に定まり、以下のように表せる<sup>(8)</sup>。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad} d_V(\mathbf{r}) + \text{rot} \mathbf{R}_V(\mathbf{r}) \quad (\text{付 31})$$

$$\text{ここで,} \quad d_V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{付 32})$$

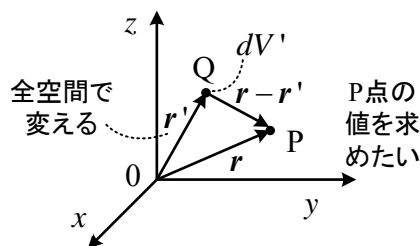
$$\mathbf{R}_V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{付 33})$$

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$  または  $d = 0$  なら、それぞれ  $\text{rot} \mathbf{R}_V = \mathbf{0}$  または  $\text{grad} d_V = 0$  とおいて計算できる。それが、静電界と静磁界である。 $d_V, \mathbf{R}_V$  はそれぞれ電位やベクトルポテンシャルに対応する。

付図 1 の P 点の  $d_V(\mathbf{r})$  と  $\mathbf{R}_V(\mathbf{r})$  の値を求めるため、体積分は Q 点を全空間で動かして ( $\mathbf{r}'$  を変化させて)  $d(\mathbf{r}')$  と  $\mathbf{R}(\mathbf{r}')$  を集める。なお、(付 33) のベクトル  $\mathbf{R}(\mathbf{r}')$  の体積分は、成分ごとに体積分する。 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  は、P 点と Q 点の距離を表すので、Q 点が遠いと体積分への影響は小さい。

この定理は、電界と磁界のベクトル場を表す電磁気学の世界で  $\text{div}$  と  $\text{rot}$  が何故必要なのか、そしてなぜそれだけわかっているだけでいいのか、その理由を教えてください。電気回路では、 $\text{div}$  の条件がキルヒホッフの**電流則**、 $\text{rot}$  の条件がキルヒホッフの**電圧則**に対応してくる。 $\text{div}$  で決まる放射するベクトルと  $\text{rot}$  で決まる回転するベクトルを組み合わせると、空間にどんなベクトルも作れるというイメージはどうだろうか。

なお、空間が幾つかの領域に分割されているときには、それぞれの領域内の(付 29)、(付 30)の他に境界条件によって解が一意に決まる<sup>(29)</sup>。



付図 1 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  の関係

## ○ 分布定数回路の過渡現象

付図 2 に示すように、電圧と電流の初期分布は 0 とした無限に長い無損失線路で、電源のスイッチを入れた後の電圧と電流を求める。(7-3)、(7-5)で、 $R = G = 0$  とおくと次式が得られる。

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad (\text{付 34})$$

これらをラプラス変換すると偏微分方程式が常微分方程式になり、次式が得られる。

$$-\frac{dV(z,s)}{dz} = LsI(z,s) - Li(z,0) \quad -\frac{dI(z,s)}{dz} = CsV(z,s) - Cv(z,0) \quad (\text{付 35})$$

ただし、 $L\{v(z,t)\} = V(z,s)$ ,  $L\{i(z,t)\} = I(z,s)$   $L\{\}$  : ラプラス変換

なお、ラプラス変換については、電気回路講義ノート(長崎大学リポジトリ)に述べている。  
電圧と電流の初期分布は 0 なので、 $v(z,0) = 0$ ,  $i(z,0) = 0$  である。両辺を  $z$  で微分して

$$\frac{d^2V(z,s)}{dz^2} = LCs^2V(z,s) \quad (\text{付 36})$$

が得られる。これを解くと次式となる。

$$V(z,s) = Ae^{-sz/c} + Be^{sz/c} \quad \text{ただし、} c = 1/\sqrt{LC} \quad (\text{付 37})$$

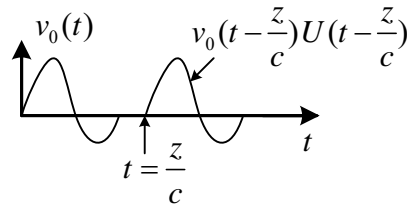
無限に長いので、 $B = 0$  とおける。よって、

$$V(z,s) = Ae^{-sz/c} \quad (\text{付 38})$$

付図 2 より  $z = 0$  で、 $A = V(0,s) = L\{v_0(t)\}$  である。**時間推移**の公式を用いると、 $z$  点の電圧は

$$v(z,t) = L^{-1}\{V(z,s)\} = L^{-1}\{L\{v_0(t)\}e^{-sz/c}\} = v_0(t - \frac{z}{c})U(t - \frac{z}{c}) \quad (\text{付 39})$$

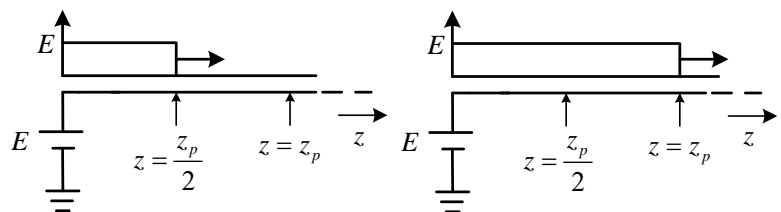
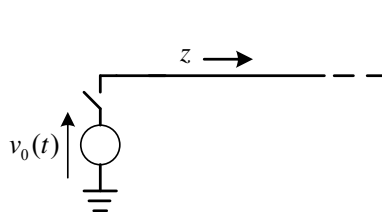
ここで、 $U(x)$  ( $x \geq 0$  のとき 1, 他は 0) は単位ステップ関数である。



(付 35)より、 $I(z,s) = -\frac{1}{Ls} \frac{d}{dz} V(z,s) = \frac{1}{Lc} V(z,s) = \sqrt{\frac{C}{L}} V(z,s)$  だから、

$$i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} v_0(t - \frac{z}{c})U(t - \frac{z}{c}) \quad (\text{付 40})$$

例えば、直流電源のスイッチを  $t = 0$  で入れた後の過渡現象は、付図 3 のようになる。電源電圧が速度  $c$  で進行する。 $t > z_p/c$  のとき、 $z < z_p$  の点は電圧が  $E$  となる。途中でスイッチを切っても、線路上の波形だけはそのまま右へ進む。電流も同じ波形である。



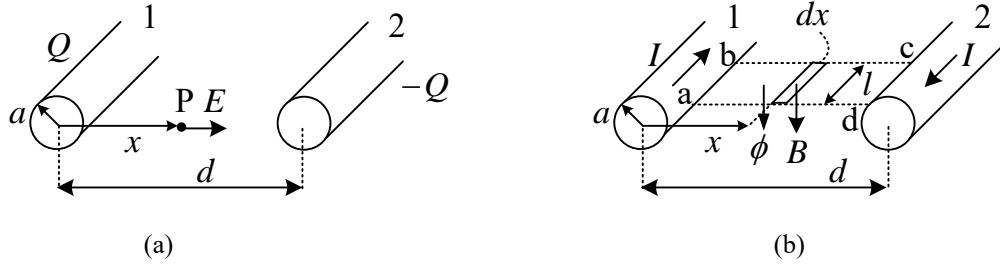
$t = z_p/(2c)$  のとき

$t = z_p/c$  のとき

付図 2 無限長線路

付図 3 直流電源スイッチ ON 時の  $v(z,t)$





付図4 平行往復線路

付図4に示す半径 $a$ [m], 中心間距離 $d$ [m]で十分長い平行往復線路について静電容量とインダクタンスを求めよう。図(a)で, 導線1, 2の単位長あたりの電荷をそれぞれ $Q, -Q$ [C/m]とすると,  $d \gg a$ により電荷の一樣分布を仮定すると第4章の例題5を参照してP点の電界は次式となる。

$$E \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(d-x)} \quad (\text{付41})$$

よって, 導体2から見た導体1の電圧は

$$\begin{aligned} V_{12} &= -\int_{d-a}^a E dx = -\int_{d-a}^a \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(d-x)} \right) dx \\ &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} [\log x - \log(d-x)]_{d-a}^a = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \log \frac{d-a}{a} \approx \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \log \frac{d}{a} \end{aligned} \quad (\text{付42})$$

従って, 導線間の単位長あたりの静電容量は次式のように求められる。

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\log(d/a)} \quad [\text{F/m}] \quad (\text{付43})$$

次に, 図(b)で, 長さ $l$ で幅 $dx$ の長方形部分の通る磁束 $d\phi$ は

$$d\phi = B l dx = \mu_0 H l dx = \mu_0 l \left\{ \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)} \right\} dx \quad (\text{付44})$$

よって導線1,2間(長方形abcda)を通る磁束 $\phi$ は

$$\phi = \int_a^{d-a} \mu_0 l \left\{ \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)} \right\} dx = \frac{\mu_0 l I}{\pi} \log \frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 l I}{\pi} \log \frac{d}{a} \quad (\text{付45})$$

従って, **往復線路の単位長あたりの自己インダクタンス(定義)**は

$$L = \frac{\phi}{lI} = \frac{\mu_0}{\pi} \log \frac{d}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (\text{付46})$$

となる。(付46)で $L$ を決めれば, 閉路abcdaについてキルヒホッフの法則を適用し, 図7-3の等価回路の

$V_{ad} - V_{bc} = L \frac{dI}{dt}$  が成立する(抵抗無視)。第7章で用いたインダクタンスは, 上記の定義に基づく

インダクタンスである。なお, インダクタンスについては文献(29)に詳しい。(付37)は

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad [\text{m/s}] \quad (\text{付47})$$

となる。 $c$ は真空中の光速と考えてよい。よって付図3の波は光速で進行する。

## ○ 電磁界の数値計算法

電磁界は簡単に計算できないので、コンピュータを利用して数値計算により解析することが多い。ここでは数値計算の考え方を簡単な例で説明しよう。2次元のラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{付 48})$$

を解くことを考える。付図 5 の格子点できざみ  $h$  を微小な量に選ぶとき、テイラーの定理より

$$v(x+h, y) \approx v(x, y) + h \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \quad (\text{付 49})$$

$$v(x-h, y) \approx v(x, y) - h \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \quad (\text{付 50})$$

これらの和より次式が得られる。(偏微分を差分に置き換え、さらにもう一回偏微分と一致)

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left\{ \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} - \frac{v(x, y) - v(x-h, y)}{h} \right\} \quad (\text{付 51})$$

同様に、 $v(x, y+h)$ 、 $v(x, y-h)$ にも適用し、(付 48)に代入して、次式が得られる。

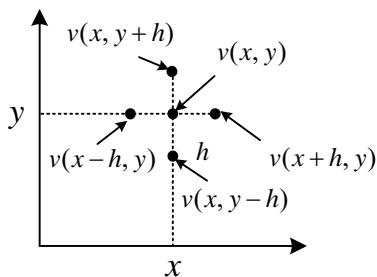
$$v(x, y) = \frac{1}{4} (v(x+h, y) + v(x-h, y) + v(x, y+h) + v(x, y-h)) \quad (\text{付 52})$$

ラプラスの方程式は周りの 4 点の平均値がその点の値になることを意味している。この式を基に付図 6 の格子点 a,b,c,d の電位を求めてみよう。対称性より b,c 点の電位は等しく  $V_2$  とする。

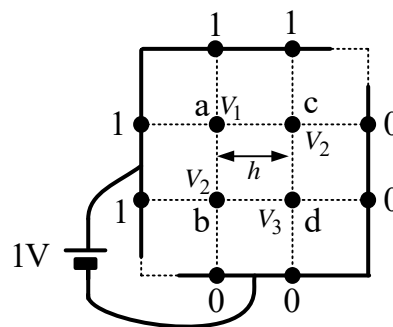
$$V_1 = \frac{1}{4} (1+1+V_2+V_2), \quad V_2 = \frac{1}{4} (1+V_1+V_3+0), \quad V_3 = \frac{1}{4} (V_2+V_2+0+0) \quad (\text{付 53})$$

これらの連立方程式を解くと電位が以下の様に得られる。

$$V_1 = \frac{3}{4}, \quad V_2 = \frac{1}{2}, \quad V_3 = \frac{1}{4} \quad (\text{付 54})$$



付図 5 格子点の値



付図 6 曲がった極板のコンデンサ

実際は複雑な形状に対し多くの格子点を選び、与えられた境界条件の基で連立方程式を解いて解を求める。きざみ  $h$  を小さく選ぶと計算時間は長くなるが電磁界の精度は向上する。一般には三角形の領域に分割して節点の値を求める**有限要素法**が広く利用されている。

## 謝辞

手元にあった記載の文献を参考にさせて頂きました。この場を借りて感謝申し上げます。文献の参照は“例えば”と解釈願います。数年前から書き始めましたが、次々に起こる疑問に苦勞しながら、なんとか書き上げました。不十分なところもあると思いますが、お役に立てて頂ければ幸いです。

大学生協のカフェテリアで食事しながらいろいろとご教授頂いた竹中隆名誉教授, 松田良信准教授, 森山敏文准教授に深謝致します。特に竹中先生には原稿を読んで頂きました。(平成 31 年 2 月)

数年過ぎて、読み返してみるとミスや不十分な点が目につきました。少しレベルが上がった所もありますが、更新を行いました。特に、マクスウェルの方程式を境界条件の下で解くことやベクトルポテンシャルの応用についても拡充しています。竹中先生には今回も特に第 7 章に関し貴重なご意見をいただきました。(令和 3 年 11 月)

### 著者紹介

辻 峰男 (Mineo Tsuji)

1953：長崎県西彼杵郡西海村黒口郷に生まれる。

父は農業を営む辻光男，母初江。

1972：面高小学校，面高中学校を経て，佐世保北高校卒業

1976：長崎大学工学部電気工学科卒業（恩師 山田英二教授）

1978：九州大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了

1981：九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程単位修得のうえ退学

長崎大学工学部電子工学科講師

1982：工学博士（恩師 野中作太郎教授）

1983：長崎大学工学部電子工学科助教授，結婚（妻葉子）

1998：電気学会学術振興賞論文賞受賞

2001：長崎大学工学部教授

2019：長崎大学名誉教授

専門は電動機制御学，趣味は子供のころからのアラカブ，キス釣り

メールアドレス：mineo@nagasaki-u.ac.jp または mineo@kaw.bbiq.jp



長崎大学学術研究成果リポジトリ (NAOSITE) 工学部・工学研究科 教材

- 電気回路講義ノート
- パワーエレクトロニクスと電動機制御入門
- 自動制御の理論と応用
- デジタル制御システム
- 現代制御理論ノート
- 電気回路から見た電磁気学

## 索引

EB 対応	115	残留磁気	112
EH 対応	115	磁位	123
TE 波	206	磁化	111
TEM 波	196	磁荷密度	114
アンテナ	212	磁気回路	117
アンペアの法則	25,104	磁気双極子	124
位相速度	185	磁気抵抗	116,118
位相定数	183,189	磁気分極	113
インダクタンス	149	磁気モーメント	112
うず電流	174	磁性体	111
永久磁化	113	磁束	105,146
永久磁石	113,121	磁束線	24,123
画像法	78	周回積分の法則	27,104
エネルギー	36	自由電荷	21
応力	38	自由電荷密度	21
オームの法則	57	準静的電磁界	46
外積	3	準定常電磁界	46
回転	6,12	磁流	217
解の一意性	48	磁路長	116
ガウスの定理	14	進行波	184
ガウスの法則	24,65	スカラ場	1
ガウス面	65	ストークスの定理	11
拡散方程式	171	静磁界	45,103
重ね合わせの理	48	静電界	45,64
緩慢に変化する現象	46	静電誘導	55
緩和時間	56	線形	48
起磁力	116,118	線積分	7
起電力	53	全微分	5
急速に変化する現象	47	相互誘導	150
境界条件	40	双対	218
境界値問題	69	速度起電力	27,156
強制電流	33	束縛電荷	21
キルヒホッフの法則	164	体積分	11
均質	48	単位接線ベクトル	8,9
近接作用	70	単位体積中	21
クーロン電界	34,50	単位ベクトル	1
クーロンの法則	69	単位法線ベクトル	10,19
減衰定数	183,189	単極誘導	164
光速	32,194	遅延ポテンシャル	213
勾配	6	力	96,137
鎖交	106	抵抗	56
鎖交磁束	149	定常	48
		テイラーの定理	5

電圧	52	表皮効果	167
電圧計	154	表皮の厚さ	171,196
電位	34,52	フェーザ	182
電界	34,49	フレミング左手則	31,157
電荷保存の法則	23	フレミング右手則	28,157
電気感受率	86	分極	86
電気双極子	79	分極電荷	86
電気双極子モーメント	80	分布定数回路	181
電気力線	70,82	平面波	190
電磁誘導の法則	25,145	ベクトル場	1
電束線	82	ベクトルポテンシャル	33,128
点電荷	67,69	ベッセルの微分方程式	170
伝搬定数	183,189	ヘルムホルツの方程式	190
電流密度	22	変圧器	150
電力	36,60	変圧器起電力	27
同軸ケーブル	116,202	偏微分	4
透磁率	32,113	ポアソンの方程式	68,90
導体	54	ポインティングベクトル	36,60
等電位面	53	保持力	112
導電率	32	保存場	51
導波管	206	マクスウェルの応力	37
等方	48	無損失線路	185
特殊相対性理論	33	面自由電荷密度	42,86
特性インピーダンス	183	面積分	10,73
内積	3	面伝導電流密度	40
入射波	194	誘電分極	86
波数	185	誘電率	32,86
波数ベクトル	193	誘導磁化	113
発散	6,16	誘導電界	34
発電機	161	誘導モータ	175
波動インピーダンス	216	ラプラスの方程式	69,83
波動方程式	187	力線	2,17
波面	193	立体角	132
反射波	194	ルジャンドルの多項式	83
ビオ-サバールの法則	108,129	連続の式	23
非クーロン電界	50	レンツの法則	146
ヒステリシス特性	111	ローレンツゲージ	35
ヒステリシス損	112	ローレンツ力	30
非分散性	48		