

歯車系の歯打ちにおける歯形誤差の影響 (第1報, 1対の歯車の場合)

濱野 崇^{*1}・吉武 裕^{*2}・田村 尋 徳^{*3}
濱田 知 宏^{*3}・原田 晃^{*4}・小林 敦^{*5}

Influence of tooth profile error in gear rattle (1st report; In the case of one pair of gears)

by

Takashi HAMANO^{*1}, Yutaka YOSHITAKE^{*2}, Hironori TAMURA^{*3},
Tomohiro HAMADA^{*3}, Akira HARADA^{*4} and Atushi KOBAYASHI^{*5}

Introducing the mesh stiffness variation and tooth profile error into the equation of motion of one pair of helical gear system, the effects of the mesh stiffness variation, the ratio of static torque to dynamic one and tooth profile error on the rattle are studied by numerical analysis. As a result, the followings were made clear. (1) Because of the interaction of mesh stiffness variation and tooth profile error, resonance occurs in low frequency region. The resonance amplitude becomes large and the vibration becomes more complicated like chaos. (2) When the constant torque is smaller than the amplitude of variational torque in some extent, the amplitude of both sides impact rattle in extremely low frequency region is not much affected but that of one-sided impact rattle in low frequency region becomes large.

Key words : Gear Rattle ,Nonlinear Vibration, Parametric Excitation, Forced Vibration, Chaos

1. 緒言

車の変速機に発生する振動として、走行中に発生する歯車のかみ合い振動 (Gear Noise)^{(1)~(3)}やアイドリグ時に発生する歯打ち振動 (Rattle)^{(4)~(8)}がある。著者らは、その歯打ち現象においてかみ合い剛性変動の影響を調べ、変動トルクとかみ合い剛性変動の相互作用の結果、低振動数域に共振ピークが発生すること、一定トルクに対する変動トルク振幅の比が歯打ち振動の発生に影響を及ぼすことを明らかにした⁽⁹⁾。

また、過去の歯車振動の研究では、歯形誤差と一定トルクが原因で発生するギアノイズの研究は多く行なわれているが、歯打ち現象の研究において歯形誤差を

考慮したものはない。そこで、本研究では運動方程式に歯形誤差を取り入れ、歯形誤差が歯打ち現象に与える影響について調べる。

2. 歯打ち振動系の基礎モデル

2.1 基礎モデル

本研究ではかみ合い剛性変動として、梅澤ら⁽¹⁰⁾が提案しているはずば歯車の歯剛性の式を用いることにより、はずば歯車を対象とする。よって、基礎モデルとして、図1に示す一定トルクと変動トルクが作用する1対のはずば歯車系を扱う。また、歯形誤差を導入する。

平成20年12月15日受理

*1 生産科学研究科博士後期課程 (Graduate Student, Graduate School of Science and Technology)

*2 生産科学研究科 (Graduate School of Science and Technology)

*3 生産科学研究科博士前期課程 (Graduate Student, Graduate School of Science and Technology)

*4 構造工学科 (Department of Structural Engineering)

*5 日産自動車株式会社 (Nissan Motor Co., Ltd.)

2・2 運動方程式の導出

図1に示す1対のはずば歯車系について、回転方向の運動のみを考慮すると運動方程式は次式ようになる。

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - M_1 \quad (1)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = M_2 - T_2 \quad (2)$$

ここに、添字 $i=1$ と $i=2$ をそれぞれ駆動歯車と被動歯車として、

I_i : 歯車の慣性モーメント

θ_i : 歯車の角変位

M_i : 歯車の歯面に働く力によるモーメント

T_1 : 駆動トルク

T_2 : 負荷トルク

である。モーメント M_1 、 M_2 は次式のようになる。

$$M_1 = K(t) \{ r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2 - \delta - e(t) \} r_{g1} \quad (3)$$

$$M_2 = K(t) \{ r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2 - \delta - e(t) \} r_{g2} \quad (4)$$

ここに、 $i=1, 2$ として

$K(t)$: 歯車のかみ合い剛性

r_{gi} : 歯車の基礎円半径

$e(t)$: 歯形誤差

したがって式(1)~(4)から次式を得る。

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - K(t) g_0(\theta_1, \theta_2) r_{g1} \quad (5)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = -T_2 + K(t) g_0(\theta_1, \theta_2) r_{g2} \quad (6)$$

$$g_0(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2 - \delta + e(t), & (r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2 \geq \delta - e(t)) \\ 0, & (|r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2| \leq \delta - e(t)) \\ r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2 + \delta - e(t), & (r_{g1} \theta_1 - r_{g2} \theta_2 \leq -\delta + e(t)) \end{cases} \quad (7)$$

$g_0(\theta_1, \theta_2)$: バックラッシによるがた関数

さらに次のように置く。

$$x_i = r_{gi} \theta_i, \quad m_i = I_i / r_{gi}^2, \quad W(t) = T_i / r_{gi} \quad (i=1,2) \quad (8)$$

ここに、 m_i は歯車の等価質量である。

以上から、角変位に関する運動方程式(6)、(7)を並進

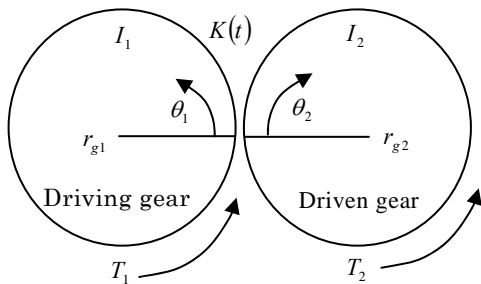


Fig.1 Helical gear system

座標系に変換することにより次式を得る。

$$m_1 \ddot{x} + K(t) G_0(x) = W(t) \quad (9)$$

$$m_2 \ddot{x} - K(t) G_0(x) = -W(t) \quad (10)$$

ここに、 $G_0(x)$ はバックラッシによるがた関数を相対変位 $x = x_1 - x_2$ とがた (バックラッシの半分の値) δ で表したものであり、次式のように定義される。

$$G_0(x) = \begin{cases} x - \delta + e(t), & (x \geq \delta - e(t)) \\ 0, & (|x| \leq \delta - e(t)) \\ x + \delta - e(t), & (x \leq -\delta + e(t)) \end{cases} \quad (11)$$

次に、歯車対の作用線上に換算した等価質量 m を次式のように定義する。

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

式(9)、(10)から相対変位 x に関する次の運動方程式を得る。

$$m \ddot{x} + K(t) G_0(x) = W(t) \quad (13)$$

さらに粘性減衰を考慮すると次式となる。

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + K(t) G_0(x) = W(t) \quad (14)$$

$$c = 2\gamma \sqrt{m \bar{K}}, \quad \bar{K} = \frac{1}{t_z} \int_0^{t_z} K(t) dt \quad (15)$$

ここに、 t_z をかみ合い周期として、 \bar{K} はかみ合い剛性変動の平均値であり、 γ は減衰比である。

式(14)をがた δ で無次元化すると無次元の運動方程式は次式となる。

$$\xi'' + 2\gamma \xi' + k(\tau) F(\xi) = P(\tau) \quad (16)$$

$$F(\xi) = \begin{cases} \xi - 1 + \varepsilon(\tau), & (\xi \geq 1 - \varepsilon(\tau)) \\ 0, & (|\xi| \leq 1 - \varepsilon(\tau)) \\ \xi + 1 - \varepsilon(\tau), & (\xi \leq -1 + \varepsilon(\tau)) \end{cases} \quad (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\delta}, \quad \tau = \omega_n t, \quad ' = \frac{d}{d\tau} \\ \omega_n^2 &= \frac{\bar{K}}{m}, \quad P(\tau) = \frac{W(t)}{K\delta}, \quad \varepsilon = \frac{e}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

また、平均値を1とした無次元かみ合い剛性 $k(\tau)$ は、

$$k(\tau) = \frac{K(t)}{\bar{K}} = \frac{\sum_{i=1}^l K_i(t)}{\frac{1}{t_z} \int_0^{t_z} \sum_{i=1}^l K_i(t) dt} \quad (19)$$

と表される。

2・3 はずば歯車のかみ合い剛性

はずば歯車のかみ合い剛性として梅澤ら⁽¹⁰⁾が提案した次式を用いる。

$$K(X) = K_p \exp(C_a |X|^3) \quad (20)$$

ここに,

$$X = \frac{t - (\varepsilon t_z)/2}{(\varepsilon_\alpha t_z / 2m_n) \times H} = \frac{t - (\varepsilon t_z)/2}{1.125 \times \varepsilon_\alpha t_z} \quad (21)$$

$$C_a = 0.322 \times (\beta_0 - 5) + [0.23 \times (b/H) - 23.26] \quad (22)$$

$$K_p = \frac{[-0.166 \times (b/H) + 0.08][\beta_0 - 5] + 44.5}{H/b \cdot 1/m_n} \times 10^6 \quad (23)$$

であり, 上式の各変数は以下のように定義されている.

X : 図2に示す等価作用線 $A'E'$ 上のかみ合い位置の座標

C_a : 係数

K_p : はすばラック対のピッチ点でのばね剛性 ($\text{N}/\mu\text{m}$)

$\varepsilon_\alpha t_z$: 正面かみ合い長さに相当する時間(s)

ε_α : 正面かみ合い率

ε_β : 重なりかみ合い率

m_n : 歯直角モジュール(mm)

t : 等価作用線上のかみ合い始めからかみ合い終わりまでの任意の時間(s)

εt_z : はすば歯車対の全かみ合い長さに相当する時間(s)

ε : はすば歯車の全かみ合い率 $\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$

β_0 : 基準ピッチ円筒上のねじれ角(deg)

b/H : 歯幅と標準歯丈の比

図3は隣り合う3対の歯のかみ合い1周期中のかみ合い剛性とそれらを合成したものの一例である. ここに, 用いた歯車の諸元を表1に示している. 全かみ合い率 ε を2.583としている. 図中の破線, 点線, 細実線がそれぞれ1枚目, 2枚目, 3枚目の歯のかみ合い剛性を表しており, 実太線が隣り合う3対の歯のかみ合い剛性を合成したものとなる.

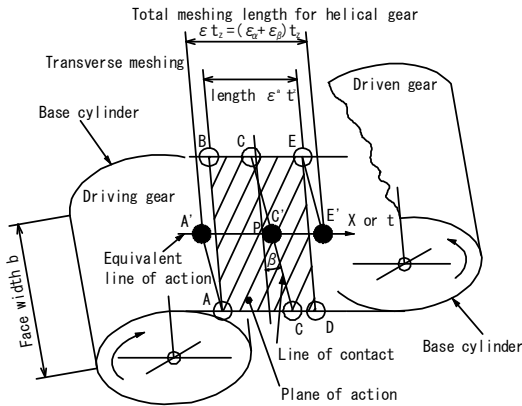


Fig.2 The plane and equivalent line of action for helical gears⁽²⁾⁽¹⁰⁾

2.4 トルク変動について

4気筒エンジンの場合, トルク変動はクランクシャフト 1/2 回転の成分が支配的であるので, クランクシャフト 1/2 回転の成分のみを考慮し, 次式で仮定する.

$$T_1(t) = T_0 + T_a \sin \omega t \quad (24)$$

ここに, T_0 は静的トルクである.

また, 歯車の剛性変動の角振動数 Ω とトルク変動の角振動数 ω の関係は, 歯数を Z として次式のようになる.

$$\Omega = \omega Z / 2 \quad (25)$$

2.5 歯形誤差の近似式について

ここでは, 蔡・林⁽¹¹⁾が実測によって求めた歯形誤差近似式を用いる. 蔡・林は, モジュール $m = 3$ [mm], 歯数 $Z = 38$, 基礎円直径 $d_g = 107.12$ [mm], 歯車本体の厚さ $b_0 = 15$ [mm]の試験歯車を用いており, 一歯の歯形誤差を実測し, それを級数近似している. その駆動側の一歯の歯形誤差の級数近似式は次式となる.

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \cos\left(\frac{j \cdot 2\pi}{T_C} t - \theta_j - j\pi\right) \quad (26)$$

各パラメータは次のとおりである.

E_j : j 次成分の全振幅 [μm]

θ_j : j 次成分の位相 [rad]

T_C : かみ合い長さに相当する時間 [s]

駆動側の歯は歯元からかみ合いが始まり, 歯先でかみ合いが終わる. 逆に被動側の歯は, 歯先からかみ合いが始まり歯元でかみ合いが終わる. そのため, 両方の歯面が同じ形状だとするならば, 一組の歯対としての歯形誤差は, 駆動側の歯形誤差と駆動側の歯形誤差の位相を逆転させたものの和である. よって, 一組の歯対の歯形誤差は以下のように書くことができる.

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \cos\left(\frac{j \cdot 2\pi}{T_C} t - \theta_j - j\pi\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \cos\left(\frac{j \cdot 2\pi}{T_C} t + \theta_j - j\pi\right) \quad (27)$$

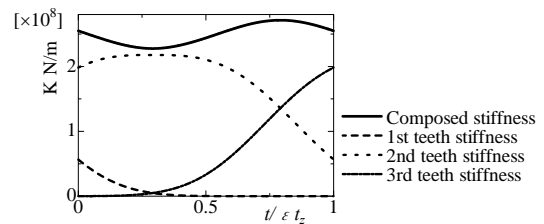


Fig.3 Composition of mesh stiffness

かみあっている歯車において、かみ合い長さ(T_c)内にかみ合い周期(一周期= T_2)ごとにかみ合いが終わり、次の歯車がかみ合い始める。このように、ずれて入ってくる歯形誤差を合成することで、かみ合い周期が一周期となった歯形誤差関数が得られる。

3. 数値解析手法

本研究では数値積分とニュートン法を組み合わせることで周期解を効率よく求める手法であるシューティング法を用いて共振曲線を求める。

3.1 状態方程式

一般に運動方程式を1階の連立常微分方程式に変形すると、1自由度系の場合、次式のような状態方程式で表される。

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y = {}^t(y_1, y_2) \quad (28)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = A(y)\eta, \quad \eta = {}^t(\eta_1, \eta_2) \quad (29)$$

$$A(y) = \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (30)$$

ここに、 η_1, η_2 はそれぞれ y_1, y_2 に対する変分である。

3.2 周期解の導出

解の周期条件は次式となる。

$$y_1 - y_0 = \mathbf{0} \quad (31)$$

$t=0$ で仮定した初期値 y_0 から、一周期数値積分を行うことにより y_1 が求まることを考えれば、 y_1 は y_0 の関数である。したがって、 $y_1(y_0)$ とおけば、式(31)は次式となる。

$$y_1(y_0) - y_0 = \mathbf{0} \quad (32)$$

式(32)にニュートン法を適用すると次式を得る。

$$(B - I_n)\tilde{y}_0 = -(y_1 - y_0) \quad (33)$$

ここに、 B は状態遷移行列と呼ばれ、単位マトリクスを形成する各列を初期値として、変分方程式を1周期数値積分した解を列方向に並べることにより求まる。

式(33)を解くことにより、補正量 \tilde{y}_0 を求め、 $y_0 + \tilde{y}_0$ を新しい初期値として $|y_1 - y_0|$ が収束条件より小さくなるまで繰り返す。周期解に収束したときの状態遷移行列 B の固有値を求めることにより、解の安定判別を行う。すなわち、求めたすべての固有値の絶対値が1よりも小ならば得られた周期解は安定となる。

4. 数値解析結果

現在まで、歯打ちの研究において歯形誤差の影響を明らかにしたものはない。

そこで本節では、1対のはずば歯車系を対象に、数値解析により、歯形誤差が歯打ち現象に及ぼす影響を明らかにする。本論文では、減衰比として $\gamma=0.05$ を用いる。

図4の(a), (b), (c)に予め歯打ち振動のタイプを示しておく。図4(a)は歯が常に接触しながら回転している状態、図4(b)は片面での歯打ち現象、図4(c)は歯の両面での歯打ち現象を示している。

4.1 歯形誤差がない場合

本論文では、歯形誤差がある場合の歯打ち現象を取扱うが、比較のために歯形誤差がない場合⁽⁹⁾の概略を以下に示す。数値計算に用いた歯車の各パラメータを表1に示している。

歯形誤差を零としたときの共振曲線を図5に示す⁽⁹⁾。横軸は変動トルクの角振動数 ω と固有角振動数 ω_n の比 ν 、縦軸は図5(a)では無次元変位振幅 A_d 、図5(b)では無次元加速度振幅 A_a である。両図共に一定トルク T_0 と変動トルク振幅 T_a をそれぞれ10Nm, 10Nmとしている。(それらの無次元値は $P_0 = P_1 = 0.012958$)ここに、振幅は $(\xi_{\max} - \xi_{\min})/2$ で計算し、実線は安定解を、破線は不安定解を示している。

図5では左へ大きく傾く主共振だけでなく、 $\nu \approx 1/2, 1/3, 1/4$ から立ち上がり、同様に左に傾く高調波共振が見られる。一般的に歯車振動においては、歯面分離が発生するとこのような高調波共振が発生する⁽³⁾⁽⁹⁾。

図5(a)では $\nu \approx 0.052$ で小さなピークが存在しているが、この振動はかみ合い剛性変動の影響により発生

Table 1 Parameters of helical gear

	Driven	Driving
Number of teeth	38	38
Module	2(mm)	
Helix angle	30(deg)	
Base circle diameter	82.465(mm)	
Pitch diameter	87.757(mm)	
Pressure angle	20(deg)	
Face width	15(mm)	
Whole depth	4.5(mm)	
Total contact ratio	2.583	
Average of mesh stiffness	2.4955×10^8 (N/m)	
Backlash	0.15(mm)	

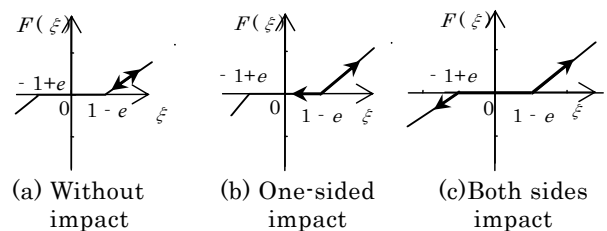


Fig.4 Types of rattle

したことを前報⁽⁹⁾で明らかにした。また、変位としては主共振や高調波共振に比較してかなり小さな値であった $\nu \approx 0.052$ のピークが、図 5(b)のように加速度振幅では比較できるくらいに大きくなっており、これはかみ合い角振動数 Ω が固有角振動数 ω_n にほぼ等しいということ、このピークは振動数間の関係としてギヤノイズの条件で発生しているものの、変動トルクとかみ合い剛性変動の相互作用の結果、発生していることも明らかにした⁽⁹⁾。

4.2 歯形誤差の影響

横軸を変動トルクの角振動数と固有角振動数の比 ν 、縦軸を無次元変位振幅 A_d とした歯形誤差を考慮した低振動数域の共振曲線を図 6 に示す。数値計算に用いた歯車対の各パラメータは表 1、歯形誤差のパラメータは表 2 のとおりである。図において、濃灰色の点は歯形誤差を考慮したときの 128 周期間の平均振幅、薄い灰色の点は歯形誤差の大きさを 5 分の 1 にしたときの 128 周期間の平均振幅、黒の線は歯形誤差を考慮していないときの共振曲線の安定周期解を示している。入力トルクの値は、一定トルク T_{10} を 10 Nm、変動トルク振幅 T_{11} を 10 Nm としている。図から、歯形誤差が存在すると低振動数域で極めて大きな振幅となっている。特に振幅の増加が激しく、かみ合い剛性変動の

影響が大きい $\nu=0.052$ において、横軸を無次元時間 τ 、縦軸を無次元変位 ξ とした変位の振動波形を図 7 に示す。図 7(a)には、参考のために歯形誤差がないときの波形を示している。図 7(b), (c)は歯形誤差があるときの波形である。図 7(b)は表 2 の蔡・林⁽¹¹⁾ が測定した歯形誤差の 5 分の 1 の値を入力し、(c)は表 2 の歯形誤差をそのまま入力して計算している。これらの波形からも、歯形誤差が大きくなると、振幅が増大することがわかる。また、(b), (c)を比較すると、同じ振動数で

Table 2 Parameters of tooth profile error

	1	2	3	4	5	6
$E_j [\mu m]$	2	1.36	0.2	0.2	0.12	0.16
$\theta_j [^\circ]$	-198	-184.5	-261	189	-22.5	225

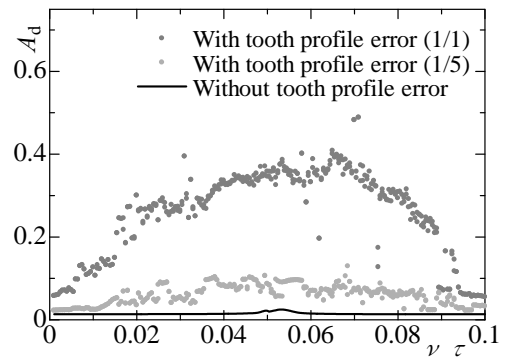
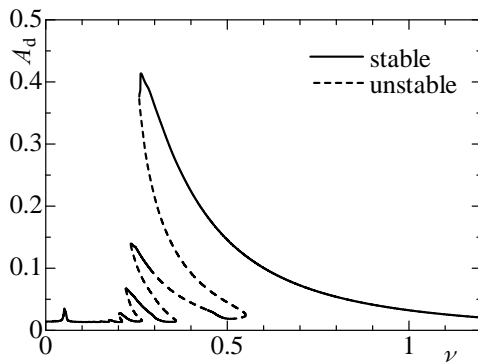
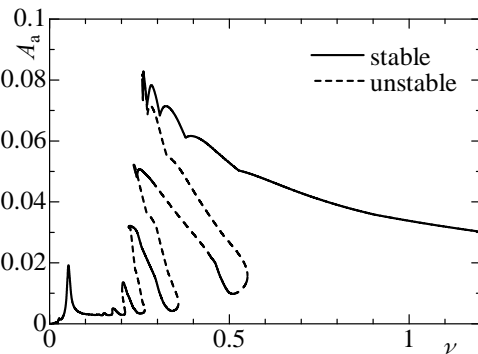


Fig.6 Resonance curve (Amplitude of displacement)
(With tooth profile error)

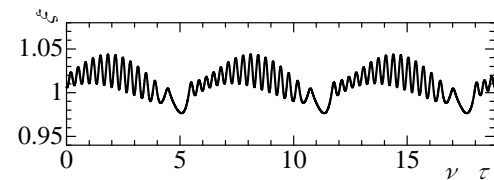


(a) Amplitude of displacement

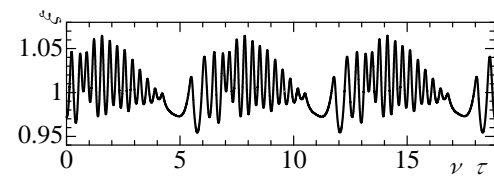


(b) Amplitude of acceleration

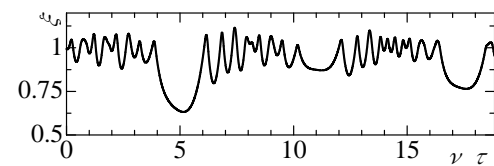
Fig.5 Resonance curve



(a) Without tooth profile error



(b) With tooth profile error(1/5)



(c) With tooth profile error(1/1)

Fig.7 Waveforms ($\nu=0.052$)

も歯形誤差が大きくなることで振動がカオスとなっていることがわかる。このように、歯形誤差により振幅が増大するとともに、歯打ち現象はカオス化する。

歯形誤差がギャノイズに影響を与えることを調べた研究は多くあるが、このような結果から、歯形誤差は歯打ちに対しても不利であると言える。よって歯打ちの解析においてもギャノイズの解析同様、歯形誤差を考慮して解析する必要がある。

4.3 歯形誤差を考慮した場合の一定トルクの影響

一定トルクを 6Nm, 変動トルクを 8Nm としたときの歯形誤差の影響について考察する。横軸を無次元振動数 ν , 縦軸を無次元振幅 A_d としたときの共振曲線を図 8 に示す。黒の実線は歯形誤差を考慮していないときの共振曲線で、灰色の点は歯形誤差を考慮したときの、32 周期間の平均振幅である。

この図からわかるようにほぼ $\nu=0.01$ 付近までは図 4(c) のような歯の両面での歯打ち現象となっている。この両歯打ち区間では歯形誤差がある場合とない場合の変位振幅の差は少ないことがわかる。しかし、片歯打ちでは違いが見られる。すなわち、歯形誤差を考慮した方が、なだらかに振幅が減少し、 $\nu \approx 0.04 \sim 0.05$ では横ばいの振幅となり、 $\nu \approx 0.052$ のピークらしきものも見られる。これらのピークは前項で説明したように、かみ合い剛性変動と歯形誤差の相互作用によるピークである。

5. 結言

1 対のはずば歯車系について、歯形誤差、および、一定トルクと変動トルク振幅の比が歯打ちに及ぼす影響について数値解析より調べた結果は次のようにまとめられる。

- (1) 歯形誤差とかみ合い剛性変動の影響により、低振動数域に共振ピークが発生し、歯形誤差が大きい

とその振動は平均振幅が大きくなるとともにカオス化することがわかった。

- (2) 一定トルクが変動トルク振幅よりある程度小さいとき、極低振動数域の両歯打ちの変位振幅は歯形誤差の影響が少ないものの、低振動域の片歯打ちの変位振幅は大きくなり、歯形誤差がない時には見られなかった緩やかなピークが発生する。

参考文献

- (1) 会田俊夫・他4名, 歯車の振動, 騒音に関する基礎的研究(第5報, 円周方向振動の特徴), 機論, 35-278 (1969), 2113-2119.
- (2) 蔡玉榮, はずば歯車対の歯面分離を考慮した回転方向振動解析(第1報, 歯数の影響を取り入れたはずば歯対のばね剛性の近似式), 機論, 62-594, C(1996), 705-712.
- (3) Ma, Q. and Kahraman, A., Period-one Motions of a Mechanical Oscillator with Periodically Time-varying Piecewise-nonlinear Stiffness, *Journal of Sound and Vibration*, 284(2005), pp.893-914.
- (4) Singh, R., Xie, H. and Comparin, R. J., Analysis of Automotive Neutral Gear Rattle, *Journal of Sound and Vibration*, 131(2) (1989), pp.177-196.
- (5) Kahraman, A. and Singh, R., Non-linear Dynamics of a Spur Gear Pair, *J. Sound and Vib.* 142(1) (1990), pp.49-75.
- (6) Padmanabhan, C. and Singh, R., Spectral Coupling Issues in a Two-degree-of-freedom System with Clearance Nonlinearities, *Journal of Sound and Vibration*, 155(2) (1992), pp.209-230.
- (7) Chikatani, Y. and Suehiro, A., Reduction of Idling Rattle Noise in Trucks, SAE911044, (1991), pp.49-56.
- (8) 八幡重太郎・梅本修, 手動変速機のアイドル騒音と分数調波振動, 自動車技術会講演論文集, 35(1) (2004), 153-158.
- (9) 吉武裕・ほか5名, 歯打ちの基礎的研究(かみ合い剛性変動と駆動トルクの高次成分の影響), 機論, 74-745, C(2008), 2137-2144.
- (10) 梅澤清彦・他2名, 動力伝達用はずば歯車の振動特性(ばねこわさの近似式), 機論, 51-469(1985), 2316-2323.
- (11) 蔡玉榮・林輝, 歯形誤差に起因する平歯車の振動特性の予測(第1報) - 歯形誤差の各次調波成分と各次共振点全振幅の間の線形近似式について -, 精密工学会誌, 56-8, (1990), 1424-1430.

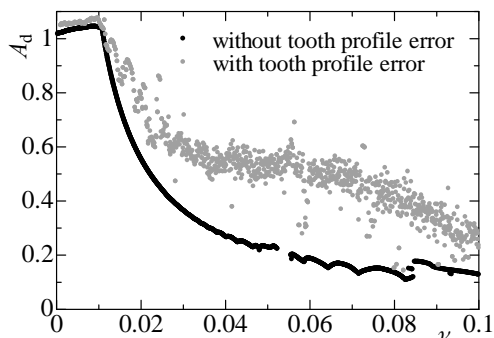


Fig.8 Resonance curve (Amplitude of displacement) (With tooth profile error)