

歯車系の歯打ちにおける歯形誤差の影響 (第2報, 多段歯車系の場合)

濱野 崇*¹・吉武 裕*²・田村 尋徳*³
新川 紘司*⁴・原田 晃*⁵・小林 敦*⁶

Influence of tooth profile error in gear rattle (2nd report; In the case of multi-step gear system)

by

Takashi HAMANO*¹, Yutaka YOSHITAKE*², Hironori TAMURA*³,
Kozi SHINKAWA*⁴, Akira HARADA*⁵ and Atushi KOBAYASHI*⁶

Gear rattle of multi-step helical gear system is treated. Mesh stiffness variations and tooth profile errors are considered within the system. The effects of mesh stiffness variations, the ratio of static torque to dynamic one and tooth profile errors on the rattle are studied by a highly accurate numerical analysis called the shooting method. As a result, the followings were made clear. (1) Because of the tooth profile errors, the amplitude of resonances like gear noise becomes large and the vibration becomes chaos. These resonances are confirmed in some regions. (2) The phenomena which generate when the constant torque is smaller than the amplitude of variational torque in some extent are similar to those of single step gear system, the displacement amplitude of one-sided impact rattle is affected by tooth profile error, but that of both sides impact rattle is not affected so much.

Key words: Gear Rattle, Nonlinear Vibration, Parametric Excitation, Forced Vibration, Chaos

1. 緒言

車の変速機に発生する振動として、走行中に発生する歯車のかみ合い振動 (Gear Noise) ^{(1) (2)} やアイドルリング時に発生する歯打ち振動 (Rattle) ^{(3)~(7)} がある。

著者らは変速機の歯打ち現象の基礎的研究として、一對のはすば歯車系と多段歯車系についてかみ合い剛性変動を考慮した数値解析を行ない、変動トルクとかみ合い剛性変動の相互作用の結果、低振動数域に共振ピークが発生すること、一定トルクに対する変動トルク振幅の比が、歯打ち振動の発生に影響を及ぼすことを明らかにした⁽⁸⁾⁽⁹⁾。また前報⁽¹⁰⁾では一對のはすば歯車について、従来考慮されることのなかった歯形誤差

の影響を考慮し、歯形誤差が大きくなると振幅が大きく

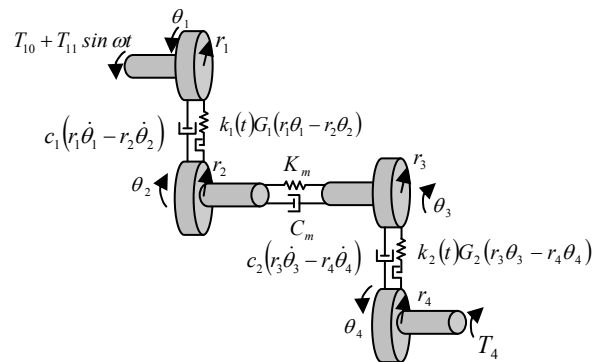


Fig.1 Two-stage gear system

平成20年12月15日受理

*¹ 生産科学研究科博士後期課程 (Graduate Student, Graduate School of Science and Technology)

*² 生産科学研究科 (Graduate School of Science and Technology)

*³ 生産科学研究科博士前期課程 (Graduate Student, Graduate School of Science and Technology)

*⁴ キャタピラージャパン株式会社 (Caterpillar Japan Ltd.)

*⁵ 構造工学科 (Department of Structural Engineering)

*⁶ 日産自動車株式会社 (Nissan Motor Co., Ltd.)

なるとともに、カオス化することなどを明らかにした。

本研究では、多段はすば歯車系の歯打ち現象において、従来考慮されていなかった歯形誤差を考慮した数値解析を行い、その影響を明らかにする。

2. 理論解析

2.1 運動方程式の導出と無次元化

自動車の変速機の基本的モデルとして図1に示す三軸二段はすば歯車系を扱う。中間軸の質量を一段目の被動歯車と二段目の駆動歯車に振り分け、その剛性と減衰のみ考慮すると、この系のかみ合い時の角変位に関する運動方程式は次式となる。

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + \{k_1(r_1\theta_1 - r_2\theta_2) + c_1(r_1\dot{\theta}_1 - r_2\dot{\theta}_2)\}r_1 = T_{10} + T_{11} \sin \omega t \quad (1)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 - \{k_1(r_1\theta_1 - r_2\theta_2) + c_1(r_1\dot{\theta}_1 - r_2\dot{\theta}_2)\}r_2 + K_m(\theta_2 - \theta_3) + C_m(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) = 0 \quad (2)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 + \{k_2(r_3\theta_3 - r_4\theta_4) + c_2(r_3\dot{\theta}_3 - r_4\dot{\theta}_4)\}r_3 - K_m(\theta_2 - \theta_3) - C_m(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) = 0 \quad (3)$$

$$I_4 \ddot{\theta}_4 - \{k_2(r_3\theta_3 - r_4\theta_4) + c_2(r_3\dot{\theta}_3 - r_4\dot{\theta}_4)\}r_4 = -T_4 \quad (4)$$

ここに、入力的一定トルクは最終段の負荷トルクで受けるとし、また、以下のように定義している。

I_1, I_2 : 一段目の駆動歯車, 被動歯車の慣性モーメント

I_3, I_4 : 二段目の駆動歯車, 被動歯車の慣性モーメント

θ_1, θ_2 : 一段目の駆動歯車, 被動歯車の角変位

θ_3, θ_4 : 二段目の駆動歯車, 被動歯車の角変位

r_1, r_2 : 一段目の駆動歯車, 被動歯車の基礎円半径

r_3, r_4 : 二段目の駆動歯車, 被動歯車の基礎円半径

k_1, k_2 : 一段目, 二段目歯車対のかみ合い剛性

c_1, c_2 : 一段目, 二段目歯車対の粘性減衰係数

K_m, C_m : 中間軸のねじり剛性, 粘性減衰係数

$T_{10} + T_{11} \sin \omega t$: 入力トルク

$T_4 = T_{10} r_2 / r_1 \cdot r_4 / r_3$: 負荷トルク

式(1)~(4)の角変位に関する運動方程式を並進座標系に関する運動方程式に変換し、さらに相対変位の運動方程式に変形する。ただし、復元力については、かみ合い剛性 k_1, k_2 をかみ合い周期で変動する関数とするとともに次のがた関数 $G_1(y_1), G_2(y_3)$ を導入するが、粘性減衰係数 c_1, c_2 は時間の関数としてもその影響はほとんどなく、また、がた区間での値も定かではないので、ここでは文献^{(3)~(7)}に倣い一定値とするともにがた関数も導入しない。

$$G_1(\xi_1) = \begin{cases} y_1 - d_1 + e_1(t) & y_1 \geq d_1 - e_1(t) \\ 0 & |y_1| \leq d_1 - e_1(t) \\ y_1 + d_1 - e_1(t) & y_1 \leq -d_1 + e_1(t) \end{cases} \quad (5)$$

$$G_2(\xi_3) = \begin{cases} y_3 - d_2 + e_2(t) & y_3 \geq d_2 - e_2(t) \\ 0 & |y_3| \leq d_2 - e_2(t) \\ y_3 + d_2 - e_2(t) & y_3 \leq -d_2 + e_2(t) \end{cases}$$

ここに、

$$x_i = r_i \theta_i (i=1 \sim 4), \quad \alpha = r_2 / r_3$$

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_2 - \alpha x_3, \quad y_3 = x_3 - x_4$$

$$e_i(t) : i \text{ 段目歯形誤差関数 } (i=1,2)$$

さらに、一段目のバックラッシュの半分の値 d_1 を用いて式(1)~(4)を無次元化すると、以下の無次元運動方程式が得られる。

$$\xi_1'' + 2\gamma_1 \xi_1' + \kappa_1(\tau) F_1(\xi_1) - \mu_{12} \eta_2 (2\gamma_m \xi_2' + \eta_2 \xi_2) = p_1(\tau) \quad (6)$$

$$\xi_2'' - \mu_{m1} (2\gamma_1 \xi_1' + \kappa_1(\tau) F_1(\xi_1)) - \alpha \eta_1 \mu_{m2} (2\gamma_2 \xi_3' + \eta_1 \kappa_2(\tau) F_2(\xi_3)) + \eta_2 (2\gamma_m \xi_2' + \eta_2 \xi_2) = 0 \quad (7)$$

$$\xi_3'' + \eta_1 (2\gamma_2 \xi_3' + \eta_1 \kappa_2(\tau) F_2(\xi_3)) - \frac{\mu_{11}}{\alpha} \eta_2 (2\gamma_m \xi_2' + \eta_2 \xi_2) = p_4(\tau) \quad (8)$$

$$F_1(\xi_1) = \begin{cases} \xi_1 - 1 + \varepsilon_1(\tau) & \xi_1 \geq 1 - \varepsilon_1(\tau) \\ 0 & |\xi_1| \leq 1 - \varepsilon_1(\tau) \\ \xi_1 + 1 - \varepsilon_1(\tau) & \xi_1 \leq -1 + \varepsilon_1(\tau) \end{cases} \quad (9)$$

$$F_2(\xi_3) = \begin{cases} \xi_3 - \delta + \varepsilon_2(\tau) & \xi_3 \geq \delta - \varepsilon_2(\tau) \\ 0 & |\xi_3| \leq \delta - \varepsilon_2(\tau) \\ \xi_3 + \delta - \varepsilon_2(\tau) & \xi_3 \leq -\delta + \varepsilon_2(\tau) \end{cases}$$

ここに、

$$\delta = \frac{d_2}{d_1}, \quad \varepsilon_1(\tau) = \frac{e_1(t)}{d_1}, \quad \varepsilon_2(\tau) = \frac{e_2(t)}{d_1}$$

$$\xi_i = \frac{y_i}{d_1} (i=1 \sim 3), \quad \tau = \omega_{01} t$$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{M_1}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{M_2}}, \quad \kappa_1 = \frac{k_1}{\bar{k}_1}, \quad \kappa_2 = \frac{k_2}{\bar{k}_2}$$

$$\omega_{03} = \sqrt{\frac{K_m}{I_s}}, \quad \cdot = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \cdot \times \omega_{01}$$

$$M_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M_2 = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}$$

$$I_s = \frac{I_2 I_3}{I_2 + I_3}, \quad \eta_1 = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}, \quad \eta_2 = \frac{\omega_{03}}{\omega_{01}}$$

$$\mu_{11} = \frac{I_2}{I_2 + I_3}, \quad \mu_{12} = \frac{I_3}{I_2 + I_3}$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{2M_1 \omega_{01}}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{2M_2 \omega_{02}}, \quad \gamma_m = \frac{C_m}{2I_s \omega_{03}}$$

$$\mu_{m1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_{m2} = \frac{m_4}{m_3 + m_4}$$

$$W_1(t) = \frac{1}{r_1}(T_{10} + T_{11} \sin \omega t)$$

$$p_1(\tau) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{k_1 d_1} \cdot W_1(t), \quad W_4(t) = \frac{1}{r_4} T_4$$

$$p_4(\tau) = \frac{m_1 m_2}{m_4(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{k_1 d_1} \cdot W_4(t)$$

\bar{k}_i : i 段目のかみ合い剛性変動の平均値($i=1,2$)

2.2 はすば歯車のかみ合い剛性

本研究では次式の梅澤ら⁽¹¹⁾のはすば歯車のかみ合い剛性の近似式を用いる。1 対の歯のかみ合い時の剛性は次式で表される。

$$K(X) = K_p \exp(C_a |X|^3) \quad (10)$$

ここに,

$$X = \frac{t - (\varepsilon t_z)/2}{(\varepsilon_\alpha t_z / 2m_n) \times H} = \frac{t - (\varepsilon t_z)/2}{1.125 \times \varepsilon_\alpha t_z} \quad (11)$$

$$C_a = 0.322 \times (\beta_0 - 5) + [0.23 \times (b/H) - 23.26] \quad (12)$$

$$K_p = \frac{[-0.166 \times (b/H) + 0.08](\beta_0 - 5) + 44.5}{H/b \cdot 1/m_n} \times 10^6 \quad (13)$$

であり, 上式の変数は次のように定義されている。

X : 図 2 に示す等価作用線 $A'E'$ 上のかみ合い位置の座標

C_a : 係数

K_p : はすばラック対のピッチ点でのばね剛性 (N/ μm)

$\varepsilon_\alpha t_z$: 正面かみ合い長さに相当する時間(s)

ε_α : 正面かみ合い率

ε_β : 重なりかみ合い率

ε : はすば歯車の全かみ合い率

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

m_n : 歯直角モジュール(mm)

t : 等価作用線上のかみ合い始めから終わりまでの任意の時間(s)

εt_z : はすば歯車対の全かみ合い長さに相当する時間(s)

β_0 : 基準ピッチ円筒上のねじれ角(deg)

b/H : 歯幅と標準歯丈の比

ここで, かみ合い率 ε を $I < \varepsilon \leq I+1$ (I : 整数) とすれば, かみ合い 1 周期中の i 段目のかみ合い剛性は次式で表される。

$$k_i(t) = K_i(t) + \dots + K_i(t + It_z) \quad (14)$$

$(0 \leq t \leq t_z)$

また, トルク変動の角振動数 ω と一段目と二段目の歯車のかみ合い剛性変動の角振動数 Ω_1, Ω_2 の関係は, 一段目の駆動, 被動, 二段目の駆動, 被動の各歯車の

歯数をこの順に $Z_1 \sim Z_4$ で定義すると, 次のようになる。

$$\Omega_1 = \omega Z_1 / 2 \quad (15)$$

$$\Omega_2 = \omega Z_1 Z_3 / (2Z_2) \quad (16)$$

2.3 歯形誤差の近似式

ここでは, 蔡・林⁽¹²⁾が実測によって求めた歯形誤差級数近似式を用いる。蔡らは, モジュール $m = 3$ [mm], 歯数 $Z = 38$, 基礎円直径 $d_g = 107.12$ [mm], 歯車本体の厚さ $b_0 = 15$ [mm] の試験歯車を用いており, 一歯の歯形誤差を実測し, それを級数近似している。その駆動側の一歯の歯形誤差の級数近似式は次式となる。

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \cos\left(\frac{j \cdot 2\pi}{T_C} t - \theta_j - j\pi\right) \quad (17)$$

各パラメータは

E_j : j 次成分の振幅 [μm]

θ_j : j 次成分の位相 [rad]

T_C : かみ合い長さに相当する時間 [s]

両歯の歯面が同じ形状だとするならば, 一組の歯対の歯形誤差は以下のように書くことができる⁽¹⁰⁾。

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \cos\left(\frac{j \cdot 2\pi}{T_C} t - \theta_j - j\pi\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \cos\left(\frac{j \cdot 2\pi}{T_C} t + \theta_j - j\pi\right) \quad (18)$$

さらに, かみ合い率に応じて歯形誤差を合成することにより, かみ合い周期が一周期となった歯形誤差関数が得られる。

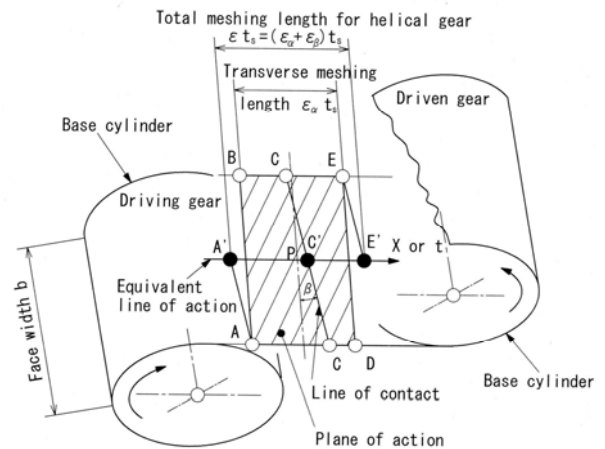


Fig.2 The plane and equivalent line of action for helical gears^{(1) (11)}

3. 数値解析手法

本研究でも、前報⁽¹⁰⁾同様、数値積分とニュートン法を組み合わせて周期解を効率よく求める手法であるシューティング法を用いて周期解を求める。また、非周期解はルングクッタギル法を用いて長時間数値積分することにより解を求める。歯形誤差がある場合の振幅は128周期の平均振幅を用いることにする。

4. 数値解析結果と考察

計算に用いた歯車系の各パラメータを表1に示している。この歯車の歯剛性変動は図3のようになる。また、かみ合い剛性変動の平均値を用いて求めた固有モードを図4に示している。図の横軸は1段目の振幅 a_1 に対する1段目、中間軸、2段目に対する振幅比 $a_i/a_1 (i=1\sim 3)$ であり、縦軸は下から順に1段目、中間軸、2段目を意味する。ここに無次元固有角振動数 $\nu_i = \omega_i/\omega_{01} (i=1\sim 3)$ は $\nu_1=0.645$, $\nu_2=1.011$, $\nu_3=4.597$ である。各要素の減衰比は $\gamma_1=0.05$, $\gamma_2=0.05$, $\gamma_m=0.002$ とした。

4.1 歯形誤差がない場合

参考のため、まず歯形誤差がないときの歯打ち振動の概略を以下に示す⁽⁹⁾。

歯打ちではトルクが小さいことを考慮して一定トルク T_{10} を10 Nm, 変動トルク振幅 T_{11} を8 Nm, 負荷トルク T_4 を11.142 Nmとし、一段目歯車対、二段目歯車対に対する共振曲線をそれぞれ図5と図6に示す。横軸は変動トルクの無次元角振動数 $\nu = \omega/\omega_{01}$, 縦軸は無次元加速度振幅 A_{1a} , A_{3a} である。安定解を実線, 不安定解を破線で示している。

Table.1 Parameters of helical gears with intermediate shaft

	1st gear		2nd gear	
	Driving	Driven	Driving	Driven
Number of teeth	36	38	36	38
Module(mm)	2			
Helix angle(deg)	30			
Pressure angle(deg)	20			
Pitch diameter	83.14	87.76	83.14	87.76
Face width(mm)	15			
Whole depth(mm)	4.5			
Total contact ratio	2.579			
Average of mesh stiffness(N/m)	2.496×10^8			
Inertia moment (kg·mm ²)	623.7	727.5	457.4	958
Damping ratio	0.05		0.05	
Stiffness of intermediate shaft(Nm/rad)	6.872×10^6			

著者らは、さらに詳細な数値計算を行うことにより、各固有角振動数付近に共振ピークが存在しており、左に大きく傾き、漸軟バネ特性を示していること、多くの不安定振動の解が存在しており、カオスが発生していること、変動トルクとかみ合い剛性変動の相互作用の結果、ギャノイズの振動数の条件で共振ピークが発生し、それらは固有振動数の数と変速機の段数の積の数だけ存在することを明らかにしている⁽⁹⁾。

4.2 歯形誤差の歯打ちへの影響

ここでは歯形誤差の影響を調べる。まず、横軸を変動トルクの角振動数と固有角振動数の比 ν , 縦軸を無次元加速度振幅 A_a とした一段目歯車対、二段目歯車対

Table 2 Parameters of tooth profile error

	1	2	3	4	5	6
E_j [μm]	2	1.36	0.2	0.2	0.12	0.16
θ_j [$^\circ$]	-198	-184.5	-261	189	-22.5	225

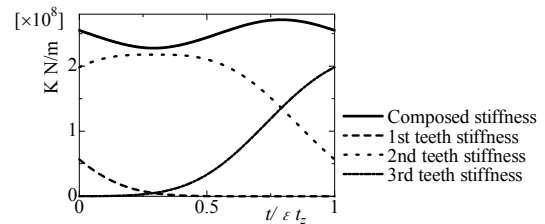


Fig.3 Composition of mesh stiffness

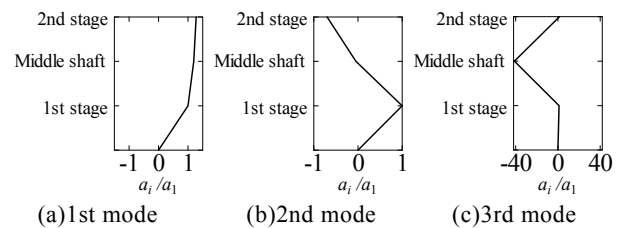


Fig.4 Natural modes

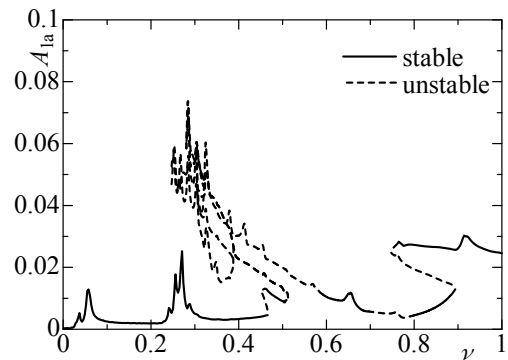


Fig.5 Resonance curve (Amp. of acceleration, 1st stage)

に対する共振曲線を図7に示す。計算に用いた歯車対の各パラメータは表1のとおりである。また、歯形誤差の大きさを表2に示す。各図において、灰色の点は歯形誤差を考慮したときの共振曲線、黒の実線は歯形誤差を考慮していないときの共振曲線の安定周期解を示している。入力トルクの値は、一定トルク T_{10} を 10 Nm, 変動トルク振幅 T_{11} を 8 Nm としており、二段目の被動歯車に作用する負荷トルク T_4 は 11.142 Nm としている。図から、歯形誤差が存在すると $\nu=0.01\sim 0.09$ で振幅がかなり大きくなっていることがわかる。

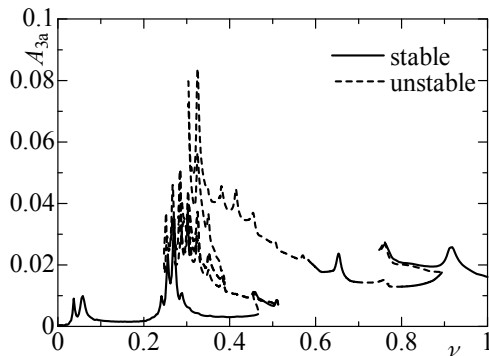
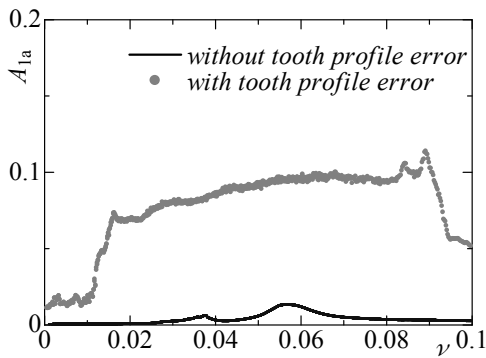
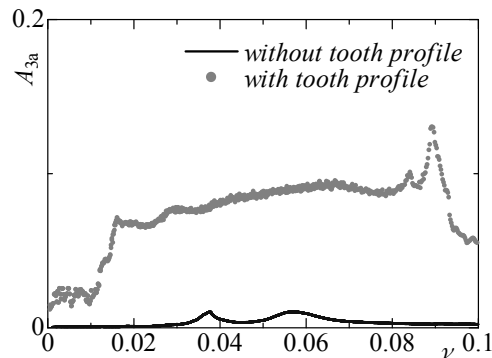


Fig.6 Resonance curve
(Amp. of acceleration, 2nd stage)



(a) 1st stage ($\nu=0\sim 0.1$)



(b) 2nd stage ($\nu=0\sim 0.1$)

Fig.7 Resonance curve (Amp. of acceleration)

特に振幅の増加が激しい $\nu=0.03$ における変位振動波形を図8に示す。比較のため歯形誤差を考慮していないときの振動波形を図9に示している。横軸を無次元時間 τ , 縦軸を無次元変位 ξ_1, ξ_3 としている。また、各図の(a)が一段目歯車対, (b)が二段目歯車対を示している。図8, 9から、歯形誤差を考慮すると、歯形誤差を考慮していないときには歯打ちが発生していなかった $\nu=0.03$ で、一段目歯車対, 二段目歯車対両方で歯打ちが発生していることがわかる。このように歯形誤差が歯打ちに対して不利に働くことがわかったので、歯打ちに関しても歯面形状を考える対策が必要であると言える。なお、このときの振動状態はカオスであり、歯形誤差の存在によりカオス化するの是一对の歯車の歯打ち⁽¹⁰⁾と同様である。

4.3 歯形誤差を考慮した場合の一定トルクの影響

一定トルクを 5Nm, 変動トルク振幅を 8Nm とし、歯形誤差を考慮した場合について考える。横軸を無次元振動数 ν , 縦軸を無次元振幅 A_i としたときの共振曲線

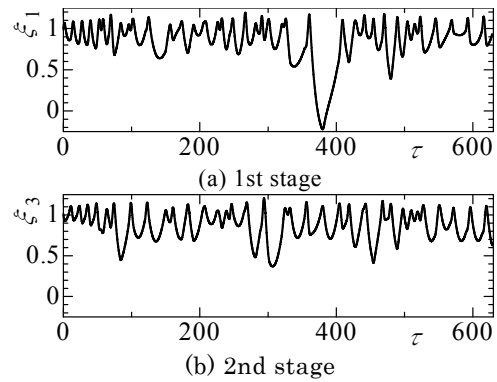


Fig.8 Waveforms

(Amp. of displacement with tooth profile error)

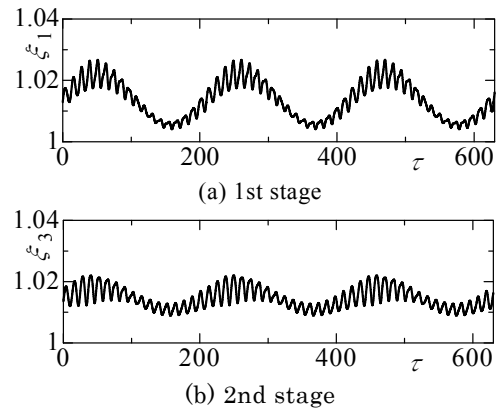


Fig.9 Waveforms

(Amp. of displacement without tooth profile error)

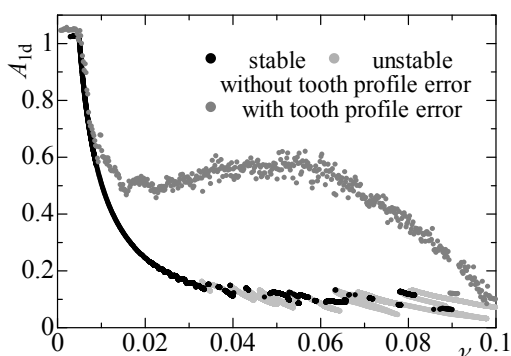


Fig.10 Resonance curve (Amp. of amplitude)

を図 10 に示す。黒の点は歯形誤差を考慮していないときの安定解で、薄灰色はその時の不安定解、濃灰色の点は歯形誤差がある場合の平均振幅である。この図からわかるように $\nu=0\sim 0.1$ の超低振動数の領域では歯形誤差がある場合とない場合の変位振幅の差はほとんどない。しかし、 $\nu=0.01$ を越えたあたりから歯形誤差がある場合の共振曲線の振幅が大きくなっていることがわかる。 $\nu=0.04\sim 0.06$ にかけて少し右上がりとなっている。これは $\nu=0.03$ と 0.057 の歯形誤差とかみ合い剛性変動の相互作用によるピークであるためと考えられる。

5. 結言

- (1) かみ合い剛性変動と歯形誤差の相互作用により発生するいわゆるギャノイズの条件で発生する歯打ちでは、歯形誤差により振幅が大きくなることがわかった。
- (2) 歯形誤差の存在により、カオス化することなど歯打ち振動の特徴は一对の歯車の場合の歯打ちと同様である。

参考文献

- (1) 蔡玉榮, はすば歯車対の歯面分離を考慮した回転方向振動解析(第 1 報, 歯数の影響を取り入れたは

すば歯対のばね剛性の近似式), 機論, 62-594, C(1996), 705-712.

- (2) Ma, Q. and Kahraman, A., Period-one motions of a mechanical oscillator with periodically time-varying piecewise- nonlinear stiffness, *J. Sound and Vib.*, Vol.284(2005), pp. 893-914.
- (3) Singh, R., Xie, H. and Comparin, R. J., Analysis of automotive neutral gear rattle, *J. Sound and Vib.*, Vol.131(2) (1989), pp.177-196.
- (4) Kahraman, A. and Singh, R., Non-linear dynamics of a spur gear pair, *J. Sound and Vib.*, Vol.142(1) (1990), pp.49-75.
- (5) Padmanabhan, C. and Singh, R., Spectral coupling issues in a two-degree-of-freedom system with clearance nonlinearities, *J. Sound and Vib.*, Vol.155(2) (1992), pp.209-230.
- (6) Chikatani, Y. and Suehiro, A., Reduction of idling rattle noise in trucks, SAE911044, pp.49-56.
- (7) 八幡重太郎, 梅本修, 手動変速機のアイドル騒音と分数調波振動, 自動車技術会講演論文集, 35(1)(2004), 153-158.
- (8) 吉武裕・ほか5名, 歯打ちの基礎的研究(かみ合い剛性変動と駆動トルクの高次成分の影響), 機論, 74-745, C(2008), 2137-2144.
- (9) 吉武裕・ほか5名, 多段歯車系の歯打ち現象, 機論, C(2009), 掲載巻号未定.
- (10) 濱野崇・ほか5名, 歯車系の歯打ちにおける歯形誤差の影響(第1報, 1対の歯車の場合), 長崎大学工学部研究報告, 39-72 (2009), 同時投稿中.
- (11) 梅澤清彦・他2名, 動力伝達用はすば歯車の振動特性(ばねこわさの近似式), 機論51-469(1985), 2316-2323.
- (12) 蔡玉榮・林輝, 歯形誤差に起因する平歯車の振動特性の予測(第1報) - 歯形誤差の各次調波成分と各次共振点全振幅の間の線形近似式について -, 精密工学会誌, 56-8, (1990), 1424-1430.