外部経済と動学ゲームの均衡

村　　田　　省　　三

Abstract

In this paper we consider the equilibrium of super duopoly game with external economy only yielding in second period production cost which stems from first period production levels of rivals firm. If second period production cost is decrease because of studying from rivals firm, It is equivalent to the fact that there may be a some external economy in production cost of second period. In this case, location and the curvature of isoprofit curve of second period would shift, and there may be a second mover advantage to this firm.

Keywords: repeated games, external economy, best reply, second mover advantage
JEL:L13,C72,D43

1　はじめに

複占ゲームの均衡は，外部経済による影響を受けることがある。このとき，外部経済がない場合と比較して，たんに外部経済効果に相当する数量的な差分影響にとどまらないことがある。たとえば，数量戦略複占ゲームでは，外部経済がない場合，同時手番ナッシュ均衡が唯一のゲーム均衡になるのが通例である。ところが，外部経済効果があるときには，数量戦略複占ゲームであっても，同時手番ナッシュ均衡に比してパレート優位となる領域（パレー

ト優位集合）が，両企業の最適反応曲線をともに含む場合があり，ゲーム均衡はシュタッケルベルグ（先手・後手）均衡となる可能性がある。このとき，たとえ外部経済効果が一方の企業のみに働くとしても，結果的に両方の企業にとって，（同時手番ナッシュ均衡に比して）生産拡大が支配戦略となる状況が起こっているという指摘が，最近の研究で指摘された。

このような外部経済効果は，繰り返しゲームのなかであってもある程度まで類似の効果をもつと予想される。本稿では，線形需要関数をもつ数量戦略複占ゲームにおいて，外部経済効果が一方の企業の費用逓減をもたらす場合を，とくに，その費用逓減が最終期のみに生じる場合に，外部経済効果はどのようになるかを検討する。このとき，主要な論点は二つある。ひとつの論点は，どちらの企業にとって，生産拡大効果が大きいかということである。本稿での外部経済効果は，数学形式的には，外部経済がない場合に比べると，自企業生産量と相手企業生産量との積に比例する項を利潤関数に追加する効果をもっている。そのため，この追加項については，外部経済効果を受ける企業にとっても相手企業生産量水準が高いことが望まれるからである。もちろん，どちらの企業にとっても生産量水準が大きくなれば，外部経済効果は大きくなるにせよ，価格水準下落というマイナス効果があるから，この場合，ゲーム均衡はどのあたりの生産量水準に落着くかというのはひとつの興味ある問題である。もうひとつの論点はどの期間に効果が集中するかということである。本稿では，外部経済効果が発揮されるのは最終期のみと仮定するが，その効果水準は第１期の生産量水準に依存するから，当然，第１期ゲーム均衡生産量に効果は波及するとみてよいが，このとき，第１期ないし最終期のどちらが，より大きな影響を受けるかという論点である。これは，繰り返しにおける各期間について均等に効果が出現するのか，あるいはそうではないのかという論点といってもよい。

このような論点をもった先行研究は，上述のものを除けば，見当たらない。

2　モデルと分析

2.1　ゲームと均衡

線形需要関数をもつ数量戦略複占ゲームの２回繰り返しゲームを考える[*1]。完全情報を仮定する[*2]。２期間ゲームを通じての，企業 A,B の利潤関数 π^A および π^B は，それぞれ，以下の(1)，(2)である。

$$\pi^A = \pi_1^A + \pi_2^A \tag{1}$$

$$\pi^B = \pi_1^B + \pi_2^B \tag{2}$$

ここで，π_1^A は企業 A の第１期利潤，π_2^A は企業 A の第２期利潤であり，π_1^B は企業 B の第１期利潤，π_2^B は企業 B の第２期利潤である。時間に関する割引率ゼロと仮定する。

第２期における，具体的な利潤関数は，以下の(3)，(4)で与えられるものとする。ここでは，需要切片 a および，外部経済係数 e は正定値である。また，外部経済がない場合の限界費用 c は一定（正値）とする。この(3)における最終項（ey_1x_2）が外部経済効果部分になる。この項の存在は，第１期ゲームと第２期ゲームをリンクさせる効果をもつ。

$$\pi_2^A(x_2, y_2 : y_1) = (a - c - (x_2 + y_2))x_2 + ey_1x_2 \tag{3}$$

$$\pi_2^B(x_2, y_2 : y_1) = (a - c - (x_2 + y_2))y_2 \tag{4}$$

第２期では，この利潤関数をもとにして，数量戦略の同時手番ゲームがおこなわれることがルールとして決定されているものとする。このときの戦略

---

*1　第１期ゲームと第２期ゲームは完全同一ではないから，厳密にいえば，繰り返しゲームではなく，スーパーゲームである。ただし，本稿では，この用語法については混同を許すものとする。

*2　補助金政策を導入する場合などにおいては，情報構造が重要なこともある。戦略を，事実上のゲーム開始以前にことごとく（同時）決定しなければならない場合と，相手戦略の実施後に（逐次）決定できる場合とでは，ゲーム構造が異なるからである。

変数は，企業 A については x_2 であり，企業 B については y_2 である。本稿では，たんなるナッシュ均衡戦略は排除して，サブゲーム完全均衡のみを分析対象とする[*3]。第２期のゲーム均衡戦略は，標準的には(5)，(6)になるが，(7)，(8)になることもある。第２期のゲーム均衡戦略が(5)，(6)になる場合は，解析的な意味での利潤最大化条件が，第１象限内部にあるような第２期ゲームの均衡戦略を導出する場合であり，また，第２期ゲームの均衡戦略が第２期における非負価格水準をもたらす場合である。これ以外の場合における第２期ゲームの均衡戦略（生産量）は，(7)，(8)であたえられる。

これらの解釈は次節であたえられる。

第２期ゲームの均衡戦略 (1) －（$y_1<\dfrac{a-c}{e}$）の場合－

$$x_2=\frac{a-c+2ey_1}{3} \tag{5}$$

$$y_2=\frac{a-c-ey_1}{3} \tag{6}$$

第２期ゲームの均衡戦略 (1) －（$y_1\geqq\dfrac{a-c}{e}$）の場合－

$$x_2=a-c \tag{7}$$

$$y_2=0 \tag{8}$$

第１期では，第２期の同時手番ゲームの均衡生産量（パラメータ（y_1）を含む形式になる）を計算したうえで，第１期および第２期の合計利潤の最大化をはかるゲームがおこなわれる。ここでは，かならずしも，同時手番ゲームである必要はなく，先手後手ゲームが選択されることをも許容するものとする。利潤関数は，以下のようになる。

---

*3 外部経済係数がゼロであれば，この２期間ゲームは，固定係数の線形需要関数をもつ。単純な２回繰り返し（利潤最大化）数量戦略クールノーゲームとなる。したがって，サブゲーム完全均衡であることを要請すれば，ゲーム均衡は，通常，一意に存在する。このときの均衡生産量はいうまでもなく正値になる。

企業 A,B の２期通算の利潤関数（1)－（$y_1<\dfrac{a-c}{e}$）の場合－

$$\pi^A=(a-c-(x_1+y_1))x_1+\frac{1}{9}(a-c+2ey_1)^2 \tag{9}$$

$$\pi^B=(a-c-(x_1+y_1))y_1+\frac{1}{9}(a-c-ey_1)^2 \tag{10}$$

企業 A,B の２期通算の利潤関数（1)－（$y_1\geqq\dfrac{a-c}{e}$）の場合－

$$\pi^A=(a-c-(x_1+y_1))x_1+(a-c)ey_1 \tag{11}$$

$$\pi^B=(a-c-(x_1+y_1))y_1 \tag{12}$$

これから，企業 A,B の均衡生産量は，以下のような場合分けを行うことによって得られる。

(1)($y_1<\dfrac{a-c}{e}$）の場合：第２期のゲーム均衡戦略(5)，(6)を，その均衡戦略を想定した場合の通算利潤関数(9)，(10)に代入して極値条件をもとめれば，以下の均衡生産量が得られる。外部経済係数がゼロの場合には，各期における各企業の均衡生産量はことごとく$\dfrac{a-c}{3}$になる。ただし，外部経済係数(e)が大きくなると，あらゆる均衡数量の正値性は，保障されなくなる。

$$x_1^*=\frac{9+2e-2e^2}{27-4e^2}(a-c) \tag{13}$$

$$y_1^*=\frac{9-4e}{27-4e^2}(a-c) \tag{14}$$

$$x_2^*=\frac{9+6e-4e^2}{27-4e^2}(a-c) \tag{15}$$

$$y_2^*=\frac{9-3e}{27-4e^2}(a-c) \tag{16}$$

(2)（$y_1\geqq\dfrac{a-c}{e}$）の場合：第２期のゲーム均衡戦略(7)，(8)を，その均衡戦略を想定した場合の通算利潤関数(11)，(12)に代入して極値条件をもとめれば，以下の均衡生産量が得られる。この場合，外部経済係数（e）は，数式上は完全に消滅するが，第２期における生産は企業 A の完全独占生産と

なることと，それが前もって分かっているために，第１期の均衡生産量が，あたかも外部経済効果がないかのような水準に落着くという形式のなかに反映されているとみるべきである。

$$x_1^* = \frac{a-c}{3} \tag{17}$$

$$y_1^* = \frac{a-c}{3} \tag{18}$$

$$x_2^* = a-c \tag{19}$$

$$y_2^* = 0 \tag{20}$$

2.2　最終期の最適反応

第２期における各企業の利潤最大化についての解析的な条件は，以下である。ただし，これは無制約最大化問題の解（内点解）が満たすべき条件であることに注意が必要である。仮に生産量や価格水準の非負性を条件とするのであれば，数学的には制約条件下の利潤最大化問題となる。たしかに，１回かぎりの複占ゲーム（one shot game）の場合，このことに留意することはほとんどない。それは，正値需要切片と正値限界費用を仮定する固定係数の線形複占ゲームであれば，均衡生産量が第１象限内部に存在することは自明であって，誰もこれを非負制約条件付きの最大化問題として定式化しようとはしない。ただし，２回繰り返しゲームの場合，とくに第１期の均衡数量（y_1）が第２期の生産に影響を及ぼすゲーム構造である場合には，この非負条件ないし正値条件は，かならずしも自明に保障されるわけではないことに注意しなければならない。

$$\frac{\partial \pi_2^A(x_2, y_2;\ y_1)}{\partial x_2} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \pi_2^B(x_2, y_2;\ y_1)}{\partial y_2} = 0 \tag{22}$$

第２期における利潤最大化問題は，第１期における変数（y_1）を含む反応式の体裁をとるから，変数の非負性を保障しなければならない場合，上記の連立方程式が第１象限内部に解をもつための変数（y_1）の範囲を指定する必要がある。また，それを保障しないような変数（y_1）の範囲については，上記の連立方程式（両企業の解析的反応関数）から離れて，より一般な反応関数を検討しなければならない。上記の連立方程式が第１象限内部に解をもたないような変数（y_1）の水準にたいしては，これら連立方程式の解は第４象限にあるとみてよいが，このときには，本来，ナッシュ均衡点が保有するべき性質によって均衡点を模索しなければならない。ところで，ナッシュ均衡点とは，ゲームの定義域において，両企業の相互的な利潤最大化が達成されている点（逸脱が起こりえない点）である。だから，ナッシュ均衡の有力な候補となるのは，与えられた需要関数において価格ゼロとなる線分上であると予想される。これより原点寄りであれば，価格正値性は満たされるが，少なくとも一方の企業が逸脱を開始することは自明だからである。

したがって，上記の連立方程式の解が第４象限にあるとき，価格ゼロとなる線分上において，どちらの企業も逸脱しない点を探すこととなる。この条

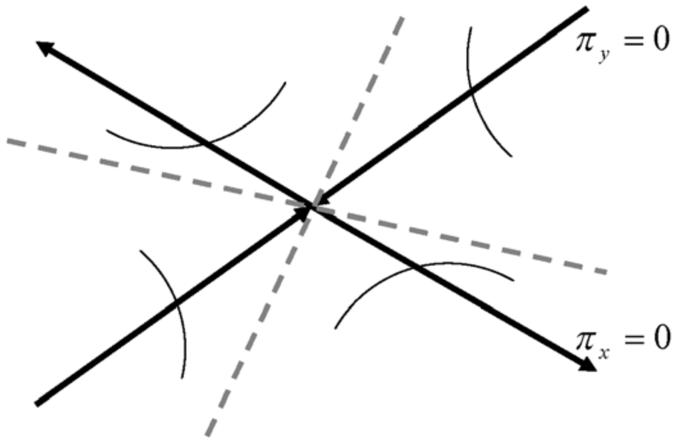

図１：等利潤線の配置

件を満たす点はただ１点であり，それは$(x_2^*, y_2^*) = ((a-c),\ 0)$になる。

このように，本稿のゲームモデルにおいては，第２期における両企業による相互（利潤）最大化行動の結果を予想して，第１期のゲームがおこなわれ，また，第１期における均衡生産量y_1がパラメータとして第２期ゲームの利潤関数に影響を与えるから,両期間におけるゲームは相互にリンクしており，しばしば，均衡分析が微分極値条件のみであることを許さない状況を作り出す。特殊な数学技法によらず，通常の極値条件のみに依拠する場合，第１期における極値条件は第２期における均衡数値の経済学的特性（非負条件）を考慮せず，第２期における極値条件は第１期における均衡数値の経済学的特性（非負条件）を考慮しないから，２期間を通じて，あらゆる条件をことごとく満足するゲーム均衡を導出するには注意が必要になるといってもよい。

確認されるべき非負条件は次のようになる。まず，第１期の均衡生産量x_1^*およびy_1^*が正値であることが必要である。また，これら均衡生産量によって成立するところの第１期市場価格（$P = a-(x_1^*+y_1^*)$）および各企業の利潤（$\pi_1^A = (a-(x_1^*+y_1^*))x_1^* - cx_1^*$.., $\pi_1^B = (a-(x_1^*+y_1^*))y_1^* - cy_1^*$）が正値であることが必要である。同様に，第２期の均衡生産量x_2^*およびy_2^*が正値であることが必要である。また，これら均衡生産量によって成立する第２期市場価格（$P = a-(x_2^*+y_2^*)$）および各企業の利潤（$\pi_2^A = (a-(x_2^*+y_2^*))x_2^* - cx_2^* + ey_1^*x_2^*$,.. $\pi_2^B = (a-(x_2^*+y_2^*))y_2^* - cy_2^*$）が正値であることが必要である。このため，少なくとも，以下の４不等式を満たさなければならない。

$$x_1^* > 0$$

$$x_2^* > 0$$

$$y_1^* > 0$$

$$y_2^* > 0$$

$$x_1^* + y_1^* < a-c$$

$$x_2^* + y_2^* < a-c$$

もちろん，以上の不等式条件をことごとく満足するような外部経済係数（e）の範囲は明らかに存在する。外部経済係数が $e=0$ であれば，すべての経済変数は正値であるから，線形モデルの（解析的な手法によって得られた）解の連続性によって，外部経済係数が十分に小さい範囲では，やはり正値性は保障されていることが分かる。

3　外部経済の効果

本節では，外部経済効果があるとき，それがない場合にくらべて均衡生産量水準がどの程度の影響を受けるか，また，ゲームの繰返しによって，（最終期のみに働く）外部経済効果が，強められるかどうかについて，いくつかの具体的な外部経済係数を想定することによって数値的に概観する。

3.1　第１期生産量が小さい場合（$y_1<\frac{a-c}{e}$）

まず，解析的な極値条件による最適反応曲線の交点が，第１象限内部にある場合を検討する。この場合，極値条件によって導出されている(13)，(14)，(15)，(16)がゲーム均衡生産量を与えている。これにいくつかの特徴的な外部経済係数を代入して得られた数値例が以下である。均衡解をもつ外部経済係数が大きくなると，第２期における企業Ａの生産量のみが，大きくなっていくことがみてとれる。ところが同じく外部経済効果を受ける企業Aについては，第１期生産量の推移は単調ではない。外部経済係数がある水準まで大きくなると，逆に第１期生産量が低下していることが分かる。一方，外部経済効果を受けない企業Ｂについては，均衡生産量は，第１期および第２期ともに，外部経済係数の増大にともない単調な縮小になっている。

（$e=0$ の場合）

$$x_1^*=\frac{9}{27}(a-c)\quad 0.333(a-c)$$

$$y_1^*=\frac{9}{27}(a-c) \quad 0.333(a-c)$$

$$x_2^*=\frac{9}{27}(a-c) \quad 0.333(a-c)$$

$$y_2^*=\frac{9}{27}(a-c) \quad 0.333(a-c)$$

（e ＝0.25 の場合）

$$x_1^*=\frac{37.5}{107}(a-c) \quad 0.350(a-c)$$

$$y_1^*=\frac{32}{107}(a-c) \quad 0.299(a-c)$$

$$x_2^*=\frac{41}{107}(a-c) \quad 0.383(a-c)$$

$$y_2^*=\frac{33}{107}(a-c) \quad 0.308(a-c)$$

（e ＝0.5 の場合）

$$x_1^*=\frac{9.5}{26}(a-c) \quad 0.365(a-c)$$

$$y_1^*=\frac{7}{26}(a-c) \quad 0.269(a-c)$$

$$x_2^*=\frac{11}{26}(a-c) \quad 0.423(a-c)$$

$$y_2^*=\frac{7.5}{26}(a-c) \quad 0.288(a-c)$$

（e ＝1 の場合）

$$x_1^*=\frac{7}{23}(a-c) \quad 0.304(a-c)$$

$$y_1^*=\frac{5}{23}(a-c) \quad 0.217(a-c)$$

$$x_2^*=\frac{11}{23}(a-c) \quad 0.478(a-c)$$

$$y_2^*=\frac{6}{23}(a-c) \quad 0.260(a-c)$$

3.2　第１期生産量が大きい場合（$y_1 \geqq \frac{a-c}{e}$）

この場合は，各期における企業 A，B の均衡生産量は（外部経済係数が表面的には出てこないから）外部経済係数の変動による均衡生産量の推移を展望することはできない。すなわち，通常のゲーム均衡を分析するには，企業Bによる第１期の生産があまりに多すぎるのである。このことは，境界的な水準である $y_1 (=\frac{a-c}{e})$ を検討することによって明らかになる。この第１期生産量水準では，企業 B の最適反応曲線の縦軸切片は，$2(a-c)$ になるが，この最適反応曲線の傾きは（外部経済効果がない場合と同様に）$\frac{1}{2}$ であり続けるから，横軸（x_2 軸）を通過するのは $a-c$ のときになる。ところが，すでにその点において価格水準はゼロである。企業 B の最適反応曲線上のその他の第１象限内の点は，ことごとく価格が負となる領域を通過している。

$$x_1^* = \frac{a-c}{3}$$

$$y_1^* = \frac{a-c}{3}$$

$$x_2^* = a-c$$

$$y_2^* = 0$$

4　おわりに

本稿では，最終期に第１期のゲーム均衡からの外部経済効果を受けることが，共有知識の意味で分かっている複占ゲームの均衡を，とくに，第１期の相手生産量から受ける外部経済効果の場合について分析した。外部経済を受ける企業は１企業のみと想定したが，その結果，外部経済効果は，すべての期間を通じて拡散されることが明らかとなった。このとき，外部経済効果がない場合に対比して，平均的には均衡生産量を縮減させる効果（外部不経済効果）をもちうることが分かった。これは，外部経済効果を受けない企業の

みならず，外部経済を受ける企業にとっても，同様であった。ただし，第1期では外部経済効果を受けない企業の生産量の相対的な低さが目立ち，最終期ではむしろ外部経済効果を受ける企業の相対的な生産量の低さがきわだっているという特徴がある。

　このようなゲーム均衡生産量の特徴が何によるものかについては，完全な解明には，まだ幾分の研究を俟たなければならないように思う。

参 考 文 献

[1] Amir, R. (1995). " Endogenous Timing Two-Player Games: A Counter Example " *Games and Economic Behavior*.

[2] Hamilton, J. and S. Slutsky. (1990). " Endogenious Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria, " *Games and Economic Behavior*. 2. 29-46.

[3] 村田省三(2008).「外部経済と複占ゲームの均衡」応用経済学研究第2巻. 30-43.