Bulletin of Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University
Vol. 2, No. 1

ON A CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS
単葉函数の或る部分族について

山口　国夫

(Sept. 11, 1961)

函数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

を $|z|<1$ において正則，単葉にして，且つ

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqq\frac{1}{2}$$

であるものとし，此等の函数族を S_t^* と略記することにする。一般の $|z|<1$ で正規化された正則単葉函数を S，その部分族の星型写像函数を S_t，更らにその部分族の凸型写像函数を C とする。良く知られておるように，$f(z)\in S_t$ なるための必要且つ十分条件は $\mathrm{Re}\{zf'(z)/f(z)\}\geqq 0$ にして，$f(z)\in C$ なるための必要且つ十分条件は $\mathrm{Re}\{zf''(z)/f'(z)\}\geqq -1$ であり，且つ $f(z)\in C$ ならば $\mathrm{Re}\{zf'(z)/f(z)\}\geqq 1/2$ であるが，その逆は必らずしも成立しない。従って此等の間には次のような関係が成立しておる。

$$S\supset S_t\supset S_t^*\supset C.$$

Schild [1] の得た成果を応用して，二三の定理を誘導しよう。

定理 1. $f(z)\in S_t^*$ ならば

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqq|f'(z)|\leqq\frac{1}{(1-|z|)^2}\qquad(|z|<1)$$

が成立する。且つこの不等式は改められない。

証明. $f(z)\in S_t^*$ ならば，Schild [1] の証明から

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<|z|\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\qquad(|z|<1)$$

が成立しておる。従って

$$|zf'(z)|\sim|f(z)|\leqq|zf'(z)-f(z)|<|z|^2|f'(z)|\,.$$

両端の不等関係から

$$|z|(1-|z|)|f'(z)|<|f(z)|<|z|(1+|z|)|f'(z)|$$

が得られる。Schild [1] が求めた歪曲定理

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqq|f(z)|\leqq\frac{|z|}{1-|z|}\qquad(|z|<1)$$

と組合せて

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}<|f'(z)|<\frac{1}{(1-|z|)^2}\qquad(|z|<1)\,.$$

特別な函数 $f(z)=z/(1+z)$ を考えれば，$f'(z)=1/(1+z)^2$, $zf'(z)/f(z)=1/(1+z)$ にして，$|z|<1$ に対しては

$$\left|\frac{1}{1+z}\right|>\left|\frac{1}{1+z}-1\right|=\left|\frac{z}{1+z}\right|$$

であることに注意すれば

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\frac{1}{2}\qquad(|z|<1)\,.$$

従って $f(z)=z/(1+z)\in S_i^*$ である。且つこの函数に対しては

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqq|f'(z)|\leqq\frac{1}{(1-|z|)^2}$$

にして，$z=\pm r$ $(r>0)$ に対して等号が成立するから，定理の不等関係は改められない。

定理 2. $f(z)\in S_i^*$ ならば，$|z|\leqq r<1$ において

$$\left|\arg z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqq\arcsin r$$

が成立する。且つこの不等式は改められれない。

証明. すべての $f(z)\in S_i^*$ に対して，$zf'(z)/f(z)$ の写像域は中心 $1/(1-|z|^2)$, 半径 $|z|/(1-|z|^2)$ の円である。従って

$$\left|\arg z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqq\arcsin\frac{r}{1-r^2}\Big/\frac{1}{1-r^2}=\arcsin r\,.$$

特別な函数 $f(z)=z/(1+z)$ に対しては，$zf'(z)/f(z)=1/(1+z)$ であるから，$|z|\leqq r$ に対する像が閉円となるから等号が成立する。

定理 3. $f(z)\in S_t^*$ ならば

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta<\frac{r^2}{1-r^2} \qquad (r<1)$$

が成立する。

証明. $f(z)$ は $|z|<1$ で正規化正則函数であるから

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad (a_1=1)$$

とおけば，Parseval の定理 [2] により

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \qquad (r<1)$$

となる。然るに Schild [1] の定理により $f(z)\in S_t^*$ に対しては

$$|a_n|\leqq 1 \qquad (n=2,3,\cdots)$$

であるから

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta\leqq\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}=\frac{r^2}{1-r^2} \qquad (r<1).$$

次の定理は Schild [1] が Schwarz の Lemma を中心として，幾何学的方法で証明したものであるが，これの右辺を異なる方法で証明しよう。

定理 4. (Schild) $g(z)\in S_t^*$ ならば

$$\frac{1}{1+|z|}\leqq\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right|\leqq\frac{1}{1-|z|} \qquad (|z|<1)$$

が成立する。この不等式は改められない。

証明. $g(z)=\sqrt{zf(z)}\in S_t^*$ とすれば

$$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{f(z)-zf'(z)}{f(z)}\right|\leqq\frac{1}{2}\left\{1+\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\right\}.$$

然るに Schild [1] の定理により $g(z)=\sqrt{zf(z)}\in S_t^*$ ならば $f(z)\in S_t\in S$ であるから，Nevanlinna の定理 [3] により

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqq\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

が成立する。故に

$$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \leqq \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1+|z|}{1-|z|}\right\} = \frac{1}{1-|z|}$$

となる。即ち定理の右辺が証明された。

文 献

[1] A. SCHILD: *On a class of univalent, star shaped mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958), p.p. 751–759.
[2] E. C. TITCHMARSH: *The theory of function*, p. 84.
[3] 小松勇作: 等角写像論, 上巻, p. 185.