Bulletin of Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University
Vol. 3

ON A CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS (II)
単葉函数の或る部分族について (II)

山 口 国 夫

J. Clunie および F. R. Keogh [1] は $|z|<1$ を星型領域に写像する函数

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

の係数と，$|z|<1$ の $f(z)$ による写像領域の面積との関係について興味ある結果を導いておる。筆者は彼等の方法に従って，前論文 [2] で取扱った函数族 S_i^* について評価を試みたが，次のような結果が得られた。

定理 1. $|z|<1$ において正則単葉である函数族

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

の中で，特に条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqq\frac{1}{2}$$

を満足する部分族を S_i^* [3] と略記することにすれば，$f(z)\in S_i^*$ による $|z|<1$ の写像領域の面積を $\varDelta$ とするとき

$$|a_n|\leqq\frac{\sqrt{2}}{n-1}\left(\frac{\varDelta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(n\geqq 2)$$

が成立する。

証明.

$$g(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}-\frac{1}{2}\tag{1}$$

とおく。更らに

$$g(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+h(z)}{1-h(z)},\qquad h(z)=\frac{2g(z)-1}{2g(z)+1}\tag{2}$$

と仮定すれば，$f(z)\in S_i^*$ であるから $\mathrm{Re}\,g(z)>0$ が成立して $|h(z)|<1$ ($|z|<1$) を得る。但し

$$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n z^n$$

とする。(1) と (2) から

$$zf'(z)h(z)=zf'(z)-f(z)$$

となるから

$$\left\{z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_nz^n=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_nz^n\,. \tag{3}$$

両辺の z^n の係数を比較することにより

$$\beta_{n-1}+2a_2\beta_{n-2}+3a_3\beta_{n-3}+\cdots+(n-1)a_{n-1}\beta_1=(n-1)a_n \qquad (n\geqq 2) \tag{4}$$

即ち (3) の右辺における a_n は，左辺における $a_2, \cdots, a_{n-1}$ のみに依存する。従って $n\geqq 2$ に対しては

$$\left\{z+\sum_{k=2}^{n-1}ka_kz^k\right\}h(z)=\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_kz^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kz^k \tag{5}$$

とおくことができる。(5) の両辺の絶対値を自乗したものを $|z|=r<1$ の周りに積分すれば，$|z|<1$ においては $|h(x)|<1$ であるから

$$\int_C\left(\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_kz^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kz^k\right)\left(\sum_{k=2}^{n}(k-1)\bar{a}_k\bar{z}^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\bar{b}_k\bar{z}^k\right)dz$$
$$\leqq\int_C\left(z+\sum_{k=2}^{n-1}ka_kz^k\right)\left(\bar{z}+\sum_{k=2}^{n-1}k\bar{a}_k\bar{z}^k\right)dz\,.$$

これから

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2|a_k|^2r^{2k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^2r^{2k}\leqq r^2+\sum_{k=2}^{n-1}k^2|a_k|^2r^{2k}$$

となる。$r\to 1$ ならしむれば

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2|a_k|^2\leqq 1+\sum_{k=2}^{n-1}k^2|a_k|^2$$

即ち $n\geqq 2$ なるときは

$$(n-1)^2|a_n|^2\leqq 1+\sum_{k=2}^{n-1}(2k-1)|a_k|^2 \tag{6}$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)|a_k|^2\right\}<2\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k|^2\right)\,.$$

今 $f(z)$ による $|z|<1$ の写像領域の面積を $\varDelta$ とすれば，次式で与えられる。

$$\Delta=\int_0^1\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2 rdrd\theta$$

これから

$$\Delta=2\pi\int_0^1\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k-2}\right)rdr=\pi\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k|^2\right). \tag{7}$$

従って (6) と (7) から

$$|a_n|\leqq\frac{\sqrt{2}}{n-1}\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (n\geqq 2)$$

が得られる。

次に (6) および (7), 又はこの定理の結果から直ちに次の性質が得られる。

定理 2.

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S_i^*$$

が $|z|<1$ において有界ならば

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。

文　　献

[1] J. Clunie and F. R. Keogh: *On starlike and convex schlicht functions*, Jour. London Math. Soc. Vol. 351 (1960), p.p. 229-233.
[2] 山口国夫: 単葉函数の或る部分族について, 長崎大学教養部紀要第2巻第1号 (1961).
[3] Albert Schild: *On a class of univalent, star shaped mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), p.p. 751-757.