Bulletin of Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University
Vol. 3

T_1 空間の公理系の独立性の初等的証明と，或る位相空間の性質について

吉 田 誠 一 郎

自然数，整数，有理数，実数の全体の集合をそれぞれ N, I, R, Z で表わし，集合 X の濃度，閉包および補集合をそれぞれ $\overline{\overline{X}}$, X^a, X^c で表わすことにする。また一次元 Euclid 空間を E^1 で表わすことにする。

さて T_1 空間の公理系は次の様にも表わすことができる。

(I)　$(X \cup Y)^a = X^a \cup Y^a$

(II)　$\overline{\overline{X}} \leqq 1$　のとき　$X^a = X$

(III)　$X^{aa} = X^a$

この公理系の独立性の証明の中 $\left.\begin{matrix}(\mathrm{II})\\(\mathrm{III})\end{matrix}\right\}\to(\mathrm{I})$ が成立たないこと，および $\left.\begin{matrix}(\mathrm{I})\\(\mathrm{III})\end{matrix}\right\}\to(\mathrm{II})$ が成立たないことの証明は容易である。証明の核心は $\left.\begin{matrix}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\end{matrix}\right\}\to(\mathrm{III})$ が成立たないことを云うことであるが，Kuratowski; Topologie I に述べてある所謂 instructive な例は Dirichlet の函数 $\left(f(x)=\begin{cases}1 & (x\in R)\\0 & (x\in Z-R)\end{cases}\right)$ についての性質を用いるもので，その性質の説明には可成りの準備を必要とするので，ここではそれに代る初等的な証明を試み，次いでその際に用いた X^a の定義を少し modify して一つの位相空間を作り，その空間の持つ二三の性質を調べることにする。

$\left.\begin{matrix}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\end{matrix}\right\}\to(\mathrm{III})$ が成立たない証明。

まず集合 Z と半開区間 $I_i \equiv <i-1, i)$ $(i\in I)$ を考える。Z の部分集合 X に対して X^a を次の様に定義する。

$$X^a \equiv X \cup \{ \bigcup_{i:\ \overline{\overline{X\cap I_i}} \geqq \aleph_0} I_i \cup I_{i+1} \}$$

すると $\overline{\overline{X}} < \aleph_0$ のとき $X^a = X$ となるから (II) は勿論成立つ。

次に

$$X^a \cup Y^a = X \cup \{ \bigcup_{i:\ \overline{\overline{X\cap I_i}} \geqq \aleph_0} I_i \cup I_{i+1} \} \cup Y \cup \{ \bigcup_{j:\ \overline{\overline{Y\cap I_j}} \geqq \aleph_0} I_j \cup I_{j+1} \} \qquad (i, j \in I)$$

$$=X\cup Y\cup\{\bigcup_{i:\ \overline{\overline{X\cap I_i}}\geqq\aleph_0} I_i\cup I_{i+1}\}\cup\{\bigcup_{i:\ \overline{\overline{Y\cap I_i}}\geqq\aleph_0} I_i\cup I_{i+1}\}$$

$$=X\cup Y\cup\{\bigcup_{i:\ \overline{\overline{X\cap I_i}}\geqq\aleph_0\ \text{or}\ \overline{\overline{Y\cap I_i}}\geqq\aleph_0} I_i\cup I_{i+1}\}$$

$$=X\cup Y\cup\{\bigcup_{i:\ \overline{\overline{(X\cup Y)\cap I_i}}\geqq\aleph_0} I_i\cup I_{i+1}\}$$

$$=(X\cup Y)^a$$

即ち（I）は成立つ。

特に $X=I_1$ と考えると

$$X^a=I_1\cup I_2,\qquad X^{aa}=I_1\cup I_2\cup I_2$$

$$\therefore\quad X^{aa}\neq X^a$$

故に $\left.\begin{matrix}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\end{matrix}\right\}\to(\mathrm{III})$ は成立たない。（終）

次に上の X^a を X の閉包と考えても Z には位相が導入できないので，之を少し modify して

(A) $$X^a\equiv X\cup\{\bigcup_{i:\ \overline{\overline{X\cap I_i}}\geqq\aleph_0} I_i\}$$

とすると之は T_1 空間の公理を満足する。Z に（A）による位相を導入した空間を Z_A と書くことにし，この空間の性質を調べることにする。

（1） Z_A における閉集合は

$$(\bigcup_{i\in P} I_i)\cup M\qquad\left(P\subset I;\ \forall_i\in I,\ \overline{\overline{M\cap I_i}}<\aleph_0;\ (\bigcup_{i\in P} I_i)\cap M=\phi\right)$$

の形となり，開集合は

$$\bigcup_{i\in S}(I_i-M_i)\qquad(S\subset I;\ M_i\subset I_i;\ \overline{\overline{M_i}}<\aleph_0)$$

の形となる。

［証明］ $X\subset Z$, $X^a=X$ とする。

$$\{i|\overline{\overline{X\cap I_i}}\geqq\aleph_0,\ i\in I\}=P;\qquad\{i|\overline{\overline{X\cap I_i}}<\aleph_0,\ i\in I\}=Q$$

とおけば，$P, Q\subset I$; $P\cap Q=\phi$ である。そして $X=(\bigcup_{i\in P} X\cap I_i)\cup(\bigcup_{i\in Q} X\cap I_i)$ となる。ここで P 又は Q は空集合であってもよい。

$P\neq\phi$ のとき $i_0\in P$ なら $\overline{\overline{X\cap I_{i_0}}}\geqq\aleph_0\quad\therefore\ I_{i_0}\subset X^a$

もし $I_{i_0}-X\neq\phi$ なら $x_0\in I_{i_0}-X$ とすれば

$$x_0\in I_{i_0}\subset X^a,\qquad x_0\notin X\ \text{より}\quad X^a\neq X$$

となり不合理である。故に $I_{i_0}-X=\phi$ 従って $I_{i_0}\subset X$, 即ち $I_{i_0}\cap X=I_{i_0}$

$$\therefore\quad \bigcup_{i\in P} X\cap I_i=\bigcup_{i\in P} I_i$$

また $\bigcup_{i\in Q} X\cap I_i=M$ とおけば

$$(\bigcup_{i\in P} I_i)\cap M\subset(\bigcup_{i\in P} I_i)\cap(\bigcup_{i\in Q} I_i)=\phi \qquad (\because\quad P\cap Q=\phi)$$

そして $\forall i\in I$, $\overline{\overline{M\cap I_i}}<\aleph_0$ となる。

即ち閉集合は

$$(\bigcup_{i\in P} I_i)\cup M \qquad (P\subset I;\ \forall i\in I,\ \overline{\overline{M\cap I_i}}<\aleph_0;\ (\bigcup_{i\in P} I_i)\cap M=\phi)$$

の形になる。逆にこの形の集合が閉集合であることは明かである。

次に集合 Y が開集合である条件は上の様な $(\bigcup_{i\in P} I_i)\cup M$ に対して

$$Y=Z-\{(\bigcup_{i\in P} I_i)\cup M\}$$

の形となることである。之を変形すれば

$$Y=(Z-\bigcup_{i\in P} I_i)\cap(Z-M)$$

$I-P=S$ とすれば

$$Z-\bigcup_{i\in P} I_i=\bigcup_{i\in S} I_i$$

$$\therefore\quad Y=(\bigcup_{i\in S} I_i)\cap(Z-M)=\bigcup_{i\in S} I_i-M$$

$(\bigcup_{i\in P} I_i)\cap M=\phi$ より

$$M\subset Z-\bigcup_{i\in P} I_i=\bigcup_{i\in S} I_i$$

$$\therefore\quad M=M\cap(\bigcup_{i\in S} I_i)=\bigcup_{i\in S} M\cap I_i$$

今 $M\cap I_i=M_i$ $(i\in S)$ とおけば $\overline{\overline{M_i}}<\aleph_0$ で $I_i\supset M_i$, 従って $I_i\cap M_j=\phi$ $(i\neq j)$ よって $I_i\subset M_j^c$, 即ち $I_i\cap M_j^c=I_i$ $(i\neq j)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad Y&=\bigcup_{i\in S} I_i-\bigcup_{j\in S} M\cap I_j\\ &=(\bigcup_{i\in S} I_i)\cap(\bigcup_{j\in S} M_j)^c\\ &=\bigcup_{i\in S}\{I_i\cap(\bigcup_{j\in S} M_j)^c\}\end{aligned}$$

所が
$$I_i\cap(\bigcup_{j\in S}M_j)^c=I_i\cap(\bigcap_{j\in S}M_j^c)$$
$$=\bigcap_{j\in S}(I_i\cap M_j^c)$$
$$=I_i\cap M_i^c \qquad (\because\ I_i\cap M_j^c=I_i\ (i\neq j))$$
$$=I_i-M_i$$
$$\therefore\ Y=\bigcup_{i\in S}(I_i-M_i) \qquad (S\subset I;\ M_i\subset I_i;\ \overline{\overline{M_i}}<\aleph_0)$$

そしてこの形の集合が開集合であることは明らかである。(終)

(2) Z_A は不連結な separable な空間である。

[証明] Z_A の真部分集合 I_1 を考えると之は閉集合であって同時に開集合であるから Z_A は不連結である。(終)

また $\overline{\overline{R}}=\aleph_0$ で $\forall\, i\in I$, $\overline{\overline{R\cap I_i}}=\aleph_0$ より $R^a=Z$, 故に Z_A は separable である。

(3) Z_A は T_1 空間であるが T_2 (Hausdorff) 空間ではない。

[証明] I_1 の異なる二点 a, b をとると a を含む開集合 $V(a)$ は
$$\bigcup_{i\in S}(I_i-M_i) \qquad (1\in S\subset I;\ a\notin M_1;\ M_i\subset I_i;\ \overline{\overline{M_i}}<\aleph_0)$$
の形になり, b を含む開集合 $V(b)$ は
$$\bigcup_{i\in S'}(I_i-M_i') \qquad (1\in S'\subset I;\ b\notin M_1';\ M_i'\subset I_i;\ \overline{\overline{M_i'}}<\aleph_0)$$
の形になる。
$$\therefore\ V(a)\cap V(b)\supset(I_1-M_1)\cap(I_1\cap M_1')$$
もし $V(a)\cap V(b)=\phi$ なら
$$(I_1-M_1)\cap(I_1-M_1')=\phi$$
$$\therefore\ I_1-M_1\subset I_1-(I_1-M_1')=M_1'$$
所が $\overline{\overline{I_1-M_1}}>\aleph_0$, $\overline{\overline{M_1'}}<\aleph_0$ これは不合理である。故に $V(a)\cap V(b)\neq\phi$ となり Z_A は T_2 空間ではないことになる。(終)

Z_A は T_2 空間でないから Z_A における点列は異なる点へ収斂し得るが, 直接に容易に次の事を証明できる。

(4) Z_A において I_1 に属する異なる点より成る点列 $\{x_n\}$ をとれば, I_1 の各点はその極限点となる。

[証明] $$x_n\in I_1 \qquad (n\in N),$$

$$x_i \neq x_j \qquad (i, j \in \mathrm{N};\ i \neq j) \qquad とする。$$

I_1 の任意の点 x をとればこれを含む開集合 $\mathrm{V}(x)$ は

$$\bigcup_{i\in \mathrm{S}} (\mathrm{I}_i - \mathrm{M}_i) \qquad (1 \in \mathrm{S} \subset \mathrm{I};\ x \notin \mathrm{M}_1;\ \mathrm{M}_i \subset \mathrm{I}_i;\ \overline{\overline{\mathrm{M}_i}} < \aleph_0)$$

の形になる。このとき $\mathrm{V}(x) \supset \mathrm{I}_1 - \mathrm{M}_1$ 所が $\overline{\overline{\mathrm{M}_1}} < \aleph_0$ よって $\mathrm{I}_1 - \mathrm{M}_1$ は $\{x_n\}$ の殆んどすべての点を含む。故に x は $\{x_n\}$ の極限点となる。（終）

以上の事から I_1 に含まれる点より成る点列が E^1 において発散しても，$\mathrm{Z_A}$ では収斂し得る。また $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ とすると $\{x_n\}$ は E^1 では 0 に収斂するが $\mathrm{Z_A}$ では収斂しない。よって点列が E^1 において収斂するという命題と，$\mathrm{Z_A}$ において収斂するという命題との間には論理的な包含関係はない。同様なことが集合列の極限，函数の連続性についてもいえる。

（5） Z の部分集合の列 $\{\mathrm{X}_n\}$ があるとき

1） 位相がない場合に $\{\mathrm{X}_n\}$ が収斂する。

2） E^1 において $\{\mathrm{X}_n\}$ が収斂する。

3） $\mathrm{Z_A}$ において $\{\mathrm{X}_n\}$ が収斂する。

という三つの命題の間には論理的包含関係はない。

［証明］（i） $\begin{cases} \mathrm{X}_{2n-1} \equiv \left\langle 0, \dfrac{1}{2} \right) \\ \mathrm{X}_{2n} \quad \equiv \left\langle \dfrac{1}{2}, 1 \right) \end{cases}$ とすると，

Z に位相がないときは

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathrm{X}_n = \langle 0, 1); \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathrm{X}_n = \phi$$

E^1 においては

$$\overline{\lim} \mathrm{X}_n = \langle 0, 1\rangle; \qquad \underline{\lim} \mathrm{X}_n = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$\mathrm{Z_A}$ においては

$$\overline{\lim} \mathrm{X}_n = \mathrm{I}_1; \quad \underline{\lim} \mathrm{X}_n = \mathrm{I}_1 \qquad \therefore \quad \lim \mathrm{X}_n = \mathrm{I}_1$$

即ち集合列 $\{\mathrm{X}_n\}$ は位相のない場合と E^1 においては収斂しないで，$\mathrm{Z_A}$ においては収斂する。

(ii) $\begin{cases} X_{2n-1}\equiv\left\langle 1-\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{3}{2}\right) \\ X_{2n}\equiv\ \left\langle 1,\ \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{n+1}\right) \end{cases}$ とすると,

位相がないときは

$$\overline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle;\qquad \underline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right)$$

E^1 においては

$$\overline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle;\qquad \underline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\therefore\ \lim X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle$$

ZA においては

$$\overline{\lim}\,X_n=<0,2)\,;\qquad \underline{\lim}\,X_n=<1,2)$$

即ち集合列 $\{X_n\}$ は位相がない場合と ZA においては収斂しないで, E^1 においては収斂する。

(iii) $\begin{cases} X_{2n-1}\equiv\left\langle 1-\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{3}{2}\right\rangle\cup\left\{2+\dfrac{1}{n}\right\} \\ X_{2n}\ \ \equiv\left\langle 1,\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{n+1}\right) \end{cases}$ とすると,

位相がないときは

$$\overline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle;\qquad \underline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\therefore\ \lim X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle$$

E^1 においては

$$\overline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle\cup\{2\}\,;\qquad \underline{\lim}\,X_n=\left\langle 1,\frac{3}{2}\right\rangle$$

ZA においては

$$\overline{\lim}\,X_n=<0,3)\,;\qquad \underline{\lim}\,X_n=<1,2)$$

即ち集合列 $\{X_n\}$ は E^1 と ZA においては収斂しないで, 位相がない場合に収斂する。

(終)

(6) Z から Z への函数 $f(x)$ があるとき,

1) $f(x)$ が E^1 から E^1 への函数と見て連続である。

2) $f(x)$ が Z_A から Z_A への函数を見て連続である。

という二つの命題の間には論理的包含関係はない。

[証明] (i) $f(x)=\frac{2}{3}x$ を考える。

これは E^1 から E^1 への函数として連続である。これを Z_A から Z_A への函数と考えると，Z の部分集合 $X\equiv\left\langle\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right\rangle$ をとると

$$f(X)=\left\langle\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right\rangle$$

以下では $\{f(X)\}^a$ を $f(X)^a$ と略記すると

$$f(X)^a=I_1,\qquad X^a=\langle 0,2)$$

$$\therefore\quad f(X^a)=\left\langle 0,\frac{4}{3}\right)$$

故に $f(X^a)\subset f(X)^a$ は成立たない。即ち $f(x)$ は Z_A から Z_A への函数と考えると連続ではない。

(ii) $f(x)=x-[x]$ ([ ] は Gauss の記号) を考える。

$i\in I$ のとき　$f(x+i)=f(x)$　となり，

$x\in I_1$ のとき　$f(x)=x$　となる。

故に $f(x)$ は E^1 から E^1 への函数と考えると点 $x=i$ $(i\in I)$ において不連続になる。

次に $f(Z)=\langle 0,1)=I_1$ であるから任意の $X\subset Z$ をとると

$$f(X)\subset I_1\qquad\therefore\quad f(X)^a\subset I_1\qquad(*)$$

a) $\forall i,\ \overline{\overline{X\cap I_i}}<\aleph_0$ のとき　$X^a=X$

このとき　$f(X^a)=f(X)\subset f(X)^a$

b) $\exists i:\ \overline{\overline{X\cap I_i}}\geqq\aleph_0$ のとき

$X\cap I_i$ に含まれる異なる点より成る点列 $\{x_n\}$ をとる事が出来る。すると

$f(x_n)\in I_1$ で $n\neq m$ のとき　$f(x_n)\neq f(x_m)$

よって $\{f(x_n)\}$ は I_1 に含まれる集合で $\overline{\overline{\{f(x_n)\}}}=\aleph_0$ となる。

よって　$f(X)^a\supset\{f(x_n)\}^a=I_1$　(**)

(*), (**) より $f(X)^a=I_1$ となる。また $f(X^a)\subset f(Z)=I_1$

よって　$f(X^a)\subset f(X)^a$

故に $f(x)$ は ZA から ZA への函数と考えると連続である。（終）

文　　献

KURATOWSKI: *Topologie I.*
NATASON: *Theory of functions of a real variable.*
KELLEY: *General topology.*
WHYBURN: *Analytic topology.*
WHYBURN: *Topological analysis.*