Euclid 空間に適当な元を添加して閉区間と同相にすること

吉田誠一郎

(昭和39年9月30日受理)

函数論においては∞を一つの数と考え，その近傍や，その点からの距離を考えたり（所謂距離空間とは異なるが）することがある。実函数を考える場合にも之に倣って実数全体の集合に±∞に相等する元を添加し，これらに適当な近傍を与えることによって閉区間と同相にし，例えば数列の極限，定発散などが殆んど同じ取扱をされるようになるなどの便宜が得られることが考えられる。このようなことについて考えてみることにする。

実数全体の集合 Z に二つの元 u_1，u_2 を添加し，これらの元と任意の実数aとの間に次の順序を定める。

$$u_2< a <u_1$$

また実数同士の間の順序は普通の大小関係と同じにする。Z に u_1，u_2 を添加した集合を $<u_2, u_1>$ で表わし，Z 自身は (u_1, u_2) とも表わすことにする。更に $<-1, 1>$ を I_1，$<u_2, u_1>$を J_1 とも表わす。また $(-1, 1)$ を $I_1{}^0$，(u_1, u_2) 即ち Z を $J_1{}^0$ とも表わすことにする。以下 ε，δ などは正の実数とする。

$a\in I_1$ のとき a の ε 近傍は従来のように $\{x : a-\varepsilon <x<a+\varepsilon\}\cap I_1$ とし，また $a\in J_1{}^0$ のとき a の ε 近傍は従来のように $\{x : a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$ とし u_1，u_2 の ε 近傍はそれぞれ

$$U(u_1, \varepsilon)=\{x : \frac{1}{\varepsilon}<x\leqq u_1\}$$

$$U(u_2, \varepsilon)=\{x : u_2\leqq x<-\frac{1}{\varepsilon}\}$$

とする。かくして J_1 に位相が導入される。

(1) I_1 と J_1 とは同相である。

〔証明〕写像 f を $I_1{}^0$ から $J_1{}^0$ の上への狭義の増加連続写像とすると，f^{-1} は $J_1{}^0$ から $I_1{}^0$ の上への狭義の増加連続写像となり，従って f は $I_1{}^0$ から $J_1{}^0$ への位相写像となる。また $\lim\limits_{t\to 1} f(t)=\infty$，$\lim\limits_{t\to -1} f(t)=-\infty$とする。このような $f(t)$ の例は $f(t)=\tan\frac{\pi t}{2}$ $(-1<t<1)$ である。

$f(t)$ の I_1 への拡張 $\phi(t)$ を作り

$$\phi(t)=\begin{cases} f(t) & (t\in I_1{}^0) \\ u_1 & (t=1) \\ u_2 & (t=-1) \end{cases}$$

とすると ϕ^{-1} も J_1 において定義されて

$$\phi^{-1}(s)=\begin{cases} f^{-1}(s) & (s\in J_1^0) \\ 1 & (s=u_1) \\ -1 & (s=u_2) \end{cases}$$

とすることが出来る。

$\phi(t)$ が $t=1$ で連続なことは，任意の ε を与えたとき $\phi(1)=u_1\in U(u_1, \varepsilon)$ は明か。

次に $\phi^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})=\delta'$ とおき $1-\delta'=\delta$ とおく。

$0<1-t<\delta$ のとき $\delta'<t<1$

$\therefore\ \phi(t)>\phi(\delta')=\frac{1}{\varepsilon}$

故に $\delta'<t<1$ のとき即ち $x\in U(1, \delta)$ のとき $\phi(t)\in U(u_1, \varepsilon)$ となる。故に $\phi(t)$ は $t=1$ において連続である。同様にして $t=-1$ においても連続であることが云える。

次に $\phi^{-1}(s)$ が $s=u_1$, $s=u_2$ において連続であることも大体同じように云える。（終）

〔1〕二次元の場合への拡張。

$I_2=I_1\times I_1$, $J_2=J_1\times J_1$

$I_2^0=I_1^0\times I_1^0$, $J_2^0=J_1^0\times J_1^0$

とし $(a, b)\in I_2$ 又は $(a, b)\in J_2$ のとき (a, b) の ε 近傍とは $U(a, \varepsilon)\times U(b, \varepsilon)$ とする。例えば J_2 の点 (u_1, u_2) の ε 近傍は

$\{(x, y) : \frac{1}{\varepsilon}<x\leqq u_1,\ u_2\leqq y<-\frac{1}{\varepsilon}\}$

点 (a, u_1) の ε 近傍は

$\{(x, y) : a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,\ \frac{1}{\varepsilon}<y\leqq u_1\}$ となる。

（2）I_2とJ_2 とは同相である。

〔証明〕I_1 から J_1 への同相写像を $\phi(t)$ とする。之を用いて I_2 から J_2 の上への写像Fを $F((x, y))=(\phi(x), \phi(y))$ とすればよい。（終）

〔2〕n 次元への拡張。

$$I_n=\underbrace{I_1\times I_1\times\cdots\cdots\times I_1}_{n\text{ケ}},\quad J_n=\underbrace{J_1\times J_1\cdots\cdots\times J_1}_{n\text{ケ}}$$

$$I_n^0=I_1^0\times I_1^0\times\cdots\cdots\times I_1^0,\quad J_n^0=J_1^0\times J_1^0\times\cdots\cdots\times J_1^0$$

とし I_n, 又は J_n の点 $(x_1, x_2\cdots\cdots, x_n)$ の ε 近傍は

$U(x_1, \varepsilon)\times U(x_2, \varepsilon)\times\cdots\cdots\times U(x_n, \varepsilon)$ とすればよい。このとき次のことは容易に云える。

（3）I_n と J_n とは同相である。

〔3〕極限値の定義の統一。

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, などの定義は統一されて

$x_n \in J_1$, $p \in J_1$ のとき

$\lim_{n\to u_1} x_n = p$ とは

$\forall\varepsilon$, $\exists\delta : n \in U(u_1, \delta) \Rightarrow x_n \in U(p, \varepsilon)$ と定義される。

また $\lim_{x\to a} f(x)=b$, $\lim_{x\to a} f(x)\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ の定義も統一されて

x, $f(x)$, p, $q \in J_1$ とするとき

$\lim_{x\to p} f(x)=q$ とは

$\forall\varepsilon$, $\exists\delta : x \in U(p, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(q, \varepsilon)$

と定義される。

〔4〕閉区間における連続函数の性質の拡張。

中間値定理，最大値，最小値の存在，一様連続性などが J_1 においても大体成立つ。例えば

（4）$f(x) \in J_1^0$ $(x \in J_1)$ で $f(x)$ が J_1 において連続なら $f(x)$ は J_1 において有界で，最大値最小値をもつ。こゝに $f(x)$ が J_1 の点 x_0 で連続とは任意の ε に対して適当な δ をとれば

$x \in U(x_0, \delta)$ のとき $f(x) \in U(f(x_0, \varepsilon)$ が成立つこととする。尚条件から $f(x) \in J_1^0$ $(x \in J_1)$ を除くと最大値が u_1 となることもあり得る。

一様連続性などを考えるには二数の差或は区間の長さに当るものの拡張が必要になる。

〔5〕a, $b \in J_1$ のとき $m(a, b)$ を次のように定義する。

1^0) $m(a, b) = m(b, a)$

2^0) $a=b$ かつそのときに限り $m(a, b) = 0$

3^0) $u_2<a<b<u_1$ のとき $m(a, b) = b-a$

4^0) $0<a<u_1$ のとき $m(a, u_1) = \dfrac{1}{a}$, $m(a, u_2) = u_1$

5^0) $u_2<a<0$ のとき $m(u_2, a) = \dfrac{1}{|a|}$, $m(a, u_1) = u_1$

6^0) $a=0$ のとき $m(u_2, a) = m(a, u_1) = u_1$

7^0) $m(u_2, u_1) = u_1$

この $m(a, b)$ は普通の測度の性質はもたないが，之を用いて閉区間におけるいくつかの性質が J_1 において成立つ。

（5）助定理

$$\left.\begin{array}{l} x_0,\ x_n,\ y_n \in J_1 \\ x_n \to x_0 \ (n\to u_1) \\ m(x_n, y_n) \to 0 \ (n\to u_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y_n \to x_0$$

〔証明〕任意の ε を与えたとき適当な δ をとれば $n \in U(u_1, \delta)$ のとき

$$\begin{cases} x_n \in \mathrm{U}(x_0,\ \varepsilon) & (1) \\ m(x_n,\ y_n) < \varepsilon & (2) \end{cases}$$

が成立つ。

（イ） $x_0 \in \mathrm{J}_1{}^0$ のとき

（1）より $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ （3）

之より $x_n \in \mathrm{J}_1{}^0$ となる。もし無限に多くの n に対して $y_n \in \mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_1{}^0$ なら無限に多くの n に対して $y_n = u_1$ となるか $y_n = u_2$ となる。例えば始めの場合には

$y_n = u_1$ となるときは $m(x_n,\ y_n) < \varepsilon$ より $0 < x_n < u_1$ でなければならぬ。すると $m(x_n,\ y_n) = \dfrac{1}{x_n} < \varepsilon$ 即ち $\dfrac{1}{x_n} < \varepsilon$ となるような n が無限に多く在存する。このとき $\dfrac{1}{\varepsilon} < x_n < u_1$

所が（3）より $x_n < x_0 + \varepsilon$

$\therefore\ \dfrac{1}{\varepsilon} < x_0 + \varepsilon$

$x_0 \leqq 0$ なら $\dfrac{1}{\varepsilon} < \varepsilon$ となるから予め $\varepsilon < 1$ としておくと不合理になる。

また $x_0 > 0$ のときは予め $\varepsilon < min\left(x_0,\ \dfrac{1}{2x_0}\right)$ としておくと $\dfrac{1}{\varepsilon} < x_0 + \varepsilon < 2x_0$ より不合理になる。故に $y_n = u_1$ となるような n は高々有限個しかない。u_2 についても同様。よって殆んどすべての n に対して $y_n \in \mathrm{J}_1{}^0$ となる。よって適当な δ' $(\leqq \delta)$ をとれば $n \in \mathrm{U}(u_1,\ \delta')$ のとき常に $y_n \in \mathrm{J}_1{}^0$ となり（2）より

$m(x_n,\ y_n) = |x_n - y_n| < \varepsilon$

之より $-\varepsilon < x_n - y_n < \varepsilon$ （4）

（3）＋（4）より $x_0 - 2\varepsilon < y_n < x_0 + 2\varepsilon$

$\therefore\ y_n \in \mathrm{U}(x_0,\ 2\varepsilon)$

（ロ） $x_0 \in \mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_1{}^0$ のとき

例えば $x_0 = u_1$ のときを考える。

（1）より $\dfrac{1}{\varepsilon} < x_n \leqq u_1$ 之と（2）より $y_n \neq u_2$。$x_n = u_1$ のときは $0 < y_n \leqq u_1$ となる筈であるから $y_n = u_1$ なら $y_n \in \mathrm{U}(x_0,\ \varepsilon)$

$y_n < u_1$ なら $m(x_n,\ y_n) = \dfrac{1}{y_n} < \varepsilon$ より $y_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$\therefore\ y_n \in \mathrm{U}(x_0,\ \varepsilon)$

また $\dfrac{1}{\varepsilon} < x_n < u_1$ のときは

$y_n = u_1$ となることはない。それはもし $y_n = u_1$ なら $m(x_n,\ y_n) = \dfrac{1}{x_n} > \varepsilon$ となり不合理。

$u_2 < y_n < u_1$ より $m(x_n,\ y_n) = |x_n - y_n| < \varepsilon$ より $x_n - \varepsilon < y_n < x_n + \varepsilon$

$\therefore\ \dfrac{1}{\varepsilon} - \varepsilon < y_n < u_1$

予め $\varepsilon<1$ としておいたとして

$\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon'}$ とおくと $y_n\in U(u_1, \varepsilon')$ で $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ より $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon'=0$ 即ち ε が十分小さいときは ε' もまた十分小さくなる。

（イ）（ロ）より $y_n\to x_0$ $(n\to u_1)$ となる。（終）

（6） $f(x)\in J_1{}^0$ $(x\in J_1)$ で $f(x)$ が J_1 において連続なら，任意の ε を与えたとき適当な δ をとれば $p, q\in J_1$ で $m(p, q)<\delta$ のとき常に $m(f(p), f(q))<\varepsilon$ が成立つ。

〔証明〕この命題の結論が成立たないとすると，適当な ε_0 をとればどんな δ をとっても J_1 の適当な二つの元 p, q をとれば $m(p, q)<\delta$ であるのに $m(f(p), f(q))\geqq\varepsilon_0$ となる。今 δ として 0 に収斂する正数列 $\{\delta_n\}$ をとり，δ_n に対して上のような性質を持つ p, q に相当するものを p_n, q_n とする。即ち $p_n, q_n\in J_1$, $m(p_n, q_n)<\delta_n$ であるのに $m(f(p_n), f(q_n))\geqq\varepsilon_0$ である。J_1 は I_1 と同相であるから compact である。よって $\{p_n\}$ より適当な部分列 $\{p_{ni}\}$ を抜出して之が J_1 の或る元 p_0 を極限値としてもつように（収斂とは限らない。p_0 は u_1 と一致してもよい。）出来る。$\{p_{ni}\}$ に対応する $\{q_n\}$ の部分列を $\{q_{ni}\}$ とすると

$$\delta_{ni}\to 0\ (i\to u_1),\ m(p_{ni}, q_{ni})<\delta_{ni} \text{ より } m(p_{ni}, q_{ni})\to 0\ (i\to u_1) \text{ となる。}$$

そして $p_{ni}\to p_0$ $(i\to u_1)$ であったから助定理により $q_{ni}\to p_0$ $(i\to u_1)$ となる。

所が $f(x)$ の J_1 における連続性から $i\to u_1$ のとき $f(p_{ni})\to f(p_0)$, $f(q_{ni})\to f(p_0)$ となる。

所が $f(x)\in J_1{}^0$ $(x\in J_1)$ より $f(p_0)$, $f(p_{ni})$, $f(q_{ni})\in J_1{}^0$

よって上述の ε_0 に対しても適当な δ' をとれば

$i\in U(u_1, \delta')$ のとき $f(p_{ni})\in U\left(f(p_0), \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$

$f(q_{ni})\in U\left(f(p_0), \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ となる。

之より $f(p_0)-\frac{\varepsilon_0}{2}<f(p_{ni})<f(p_0)+\frac{\varepsilon^0}{2}$

$$f(p_0)-\frac{\varepsilon_0}{2}<f(q_{ni})<f(p_0)+\frac{\varepsilon_0}{2}$$

よって $|f(p_{ni})-f(q_{ni})|<\varepsilon_0$

$\therefore$ $m(f(p_{ni}), f(q_{ni}))<\varepsilon_0$ 之は n のいかんによらず $m(f(p_n), f(q_n))\geqq\varepsilon_0$ であることと矛盾する。（終）

（7） $f_n(x)\in J_1{}^0$ $(x\in J_1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ とし $f_n(x)$ が J_1 で連続で $\lim_{n\to u_1} f_n(x)=f(x)$ $(x\in J_1)$ でしかも一様に $f_n(x)\to f(x)$ となれば $f(x)$ は J_1 において連続である。

〔証明〕定理（4）より $f_n(x)$ の有界性を用いて $f(x)\in J_1{}^0$ $(x\in J_1)$ を云うとあとは普通の方法で出来る。（終）

文　　献

S. SAKS and A. ZYGMMND:

Analytic Functions.

H. J. KOWALSKY:

Topologische Räume