Bulletin of Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University
Natural Science Vol. 6

手動式計算機で平方根の近似値を求めるための Multiplying factor について

吉　田　誠　一　郎

（昭和40年9月30日受理）

1．問題点としては次の三つがある。

（イ）　近似値の誤差と Multiplying factor（以下之を m.f. と略記）の最後の部分の丸め方に関すること。

（ロ）　m.f. の作る数列の表の歩みに関すること。

（ハ）　適当な近似式を用いて計算を容易にすること。

今正数Aを与えて $\sqrt{A}$ の近似値を求めるのに，

$A \fallingdotseq a$　とすると　$\dfrac{A+a}{2\sqrt{a}} \fallingdotseq \sqrt{A}$

$E_1 = \dfrac{A+a}{2\sqrt{a}} - \sqrt{A}$ とすれば

$$E_1 = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{A})^2}{2\sqrt{a}} \qquad (1)$$

$\dfrac{1}{2\sqrt{a}} \fallingdotseq c$ とし

$$E_2 = (A+a)c - \frac{A+a}{2\sqrt{a}} \qquad (2)$$

$$E = (A+a)c - \sqrt{A} \qquad (3)$$

とおけば

$$E = E_1 + E_2 \qquad (4)$$ となる。

$\sqrt{A}$ の近似値として $(A+a)c$ を用いたときの誤差 E の限界をきめて，それに適するように a の値の列 a_1，a_2，……，a_i，……，a_n を作るとき $a_i - a_{i-1}$ $(i=2, 3, \cdots, n)$ を出来るだけ大きくし，数列 $\{a_i\}$ の項数 n を出来るだけ小さくすることが望ましい。

（1）より $E_1 \geqq 0$ であるが，E の評価に対して E_2 の影響をどのように考えるかが問題になる。まず常に $E \geqq 0$ であることを望む場合には $E_2 \geqq 0$ となるようにし，E_2 を E_1 に比べて小さくする方がよい。また $E_2 \leqq 0$ となるようにすれば $E_1 \geqq 0$ であることと相俟って数列 $\{a_i\}$ の項数 n を小さくすることに役立つであろうが，そのときは $|E_2|$ を E_1 に比べてあまり小さくしない方がよいと考えられる。普通に用いられているものは E の限界としては $\sqrt{A}$ の値の有効数字の第6位目における5とし，$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ の近似値としてはその値の有効数字の6位又は7位未満を4捨5入している。こゝでは，$E \geqq 0$ とすると都合のよいことが多いので（5.6.参照）$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ の近似値としてはその値の有効数字の7位未満を切上げたものを用いる

場合を主に考えてみることにする。

その際に

$100 \leqq A < 10000$ と考えても一般性は失われないから以下ではAとしては此の範囲の数に限定する。このとき $\sqrt{A}$ の値の有効数字の第6位は，小数第4位と云うことになる。

また，$100 \leqq a \leqq 2500$のとき $0.01 \leqq \frac{1}{2\sqrt{a}} \leqq 0.05$

だから $c \times 10^8$ を m.f. とし

$2500 < a < 10000$ のとき $0.005 < \frac{1}{2\sqrt{a}} < 0.01$

だから $c \times 10^9$ を m.f. とするのであるがそうすると答を出す際に，それぞれ 10^{-8} 又は 10^{-9} をかけることになるので理論上は c のまゝで考えていくとよい。

こゝでは或る範囲に属する $\{a_i\}$ の部分の歩みを一定数以上とすることが不可能であるための十分条件と，一定数とすることが可能であるための十分条件とを求め，これらの条件と，或る実験的手段とを綜合して数列 $\{a_i\}$ を順次に作り，その項数を出来るだけ小さくすることを考えるのであるが，その際に二種類の近似式を用いることにする。例えば，モンロー手動式計算機に用いられる m.f. の列の項数は165，タイガー計算機の場合は 161，こゝで考えるもの（表1）は157である。尚，$E_2 \leqq 0$ となるように $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ の近似値をその値の有効数字の第6位未満を切捨てて求めると，$\{a_i\}$ の項数を147まで減らすことも出来る。（表2）

2. 或る範囲に属する $\{a_i\}$ の部分の歩みを一定数以上にすることが不可能であるための十分条件。

（1）より $E_1 = \frac{(a-A)^2}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{A})^2}$

$\{a_i\}$ 中の連続した二項 a_{k-1}, a_k に対して

$A = \frac{a_{k-1}+a_k}{2}$ のときは

$A - a_{k-1} = a_k - A$

故に a が a_{k-1}, a_k であるときの E_1 の値をそれぞれ $E_1(k-1)$，$E_1(k)$ とすると

$E_1(k-1) > E_1(k)$ （5） となる。

$0 \leqq E < 5 \times 10^{-4}$ が成立たたない条件

$E \geqq 5 \times 10^{-4}$ （6） を考えてみる。それには $E_2 \geqq 0$ だから

$E_1 \geqq 5 \times 10^{-4}$ （7） ならば十分である。今 $a - A = b$ とおき $\frac{b}{a} = r$ とおけば

$b = ar$, $A = a - b = a(1-r)$

$$\therefore \quad E_1 = \frac{a^2r^2}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{a(1-r)})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}\ r^2}{2(1+\sqrt{1-r})^2}$$

ところが $0 < |r| < 1$ のとき

$(1+\sqrt{1-r})^2 < 2(2-r)$ である。

それは $2(2-r)-(1+\sqrt{1-r})^2$

$= 2-r-2\sqrt{1-r}$

$=(1-\sqrt{1-r})^2$

故にこのとき

$$E_1 > \frac{\sqrt{a}\ r^2}{4(2-r)}$$

よって $\dfrac{\sqrt{a}\ r^2}{4(2-r)} \geqq 5\times10^{-4}$ （8）

が成立てば（6）が成立つ。特に $A=\dfrac{a_{k-1}+a_k}{2}$ のときは（5）が成立つことから

$$E_1(k) \geqq 5\times10^{-4}$$

となる条件を求めることにする。そのために

$r=\dfrac{b}{a_k}$ を（8）に代入した式を考える。

このとき $b=\dfrac{a_k-a_{k-1}}{2}$ となり，$r>0$ だから $2-r<2$ となり（8）の代りに

$\dfrac{\sqrt{a_k}\ r^2}{8} \geqq 5\times10^{-4}$（9）を考えると十分である。

（9）より $\dfrac{\sqrt{a_k}}{8}\ \dfrac{b^2}{{a_k}^2} \geqq 5\times10^{-4}$

$a_k \leqq \left(\dfrac{b^4}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \times 10^2$ (10)

今 $|b| \geqq 15$ のときは $\{a_i\}$ の表の歩みは $a_k-a_{k-1}=2b \geqq 30$

故に (10) において $b=15$ とした式

$a_k \leqq \left(\dfrac{15^4}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \times 10^2$ (11)

を満足する a_k に対しては表の歩みを30以上にすることは不可能である。

(11) より $a_k \leqq \left(\dfrac{50625}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \times 10^2$

$=(3164.0625)^{\frac{1}{3}} \times 10^2$

$a_k \leqq 1468$

同様にして (10) の b に 20, 25, 30・・・65を代入することにより次の結果を得る。

(2.1.)

$a_k \leqq$ 1468 のときは $\{a_i\}$ の表の歩み a_k-a_{k-1} を30以上にすることは不可能である。

$a_k \leqq$ 2154	〃	40	〃
$a_k \leqq$ 2900	〃	50	〃
$a_k \leqq$ 3699	〃	60	〃
$a_k \leqq$ 4543	〃	70	〃
$a_k \leqq$ 5428	〃	80	〃
$a_k \leqq$ 6351	〃	90	〃

$a_k \leqq 7310$	〃	100	〃
$a_k \leqq 8300$	〃	110	〃
$a_k \leqq 9321$	〃	120	〃
$a_k < 10000$	〃	130	〃

3. 或る範囲に属する $\{a_i\}$ の部分の歩みを一定数とすることが可能であるための十分条件。

$0 \leqq E < 5\times10^{-4}$　(12)　が成立つための十分条件を考える。前のように

$a-A=b$ とおき，こんどは $\dfrac{b}{A}=r'$ とおき $|r'|=s$ とおく。

$$E_1=\frac{(a-A)^2}{2\sqrt{a}(\sqrt{A}+\sqrt{a})^2}$$
$$=\frac{A^2r'^2}{2\sqrt{A(1+r')}(\sqrt{A}+\sqrt{A(1+r')})^2}$$
$$\leqq\frac{\sqrt{A}r'^2}{2\sqrt{1-|r'|}(1+\sqrt{1-|r'|})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{A}\ s^2}{2\sqrt{1-s}(1+\sqrt{1-s})^2}$$

ところが $\sqrt{1-s}(1+\sqrt{1-s})^2$ に対して $4(1-s)$ は可なり精密な不足近似式である。それは，

$$\sqrt{1-s}(1+\sqrt{1-s})^2-4(1-s)$$
$$=\sqrt{1-s}\ \{(1+\sqrt{1-s})^2-4\sqrt{1-s}\}$$
$$=\sqrt{1-s}(1-\sqrt{1-s})^2$$
$$\geqq 0$$

例えば $s=\dfrac{1}{100}$ のときは

$$\sqrt{1-s}(1-\sqrt{1-s})^2=\sqrt{1-s}(2-s)-2(1-s)$$
$$=\sqrt{\frac{99}{100}}\ \frac{199}{100}-\frac{198}{100}$$
$$=\frac{199\sqrt{99}-1980}{1000}$$
$$=\frac{1980.025\cdots-1980}{1000}$$
$$=0.000025\cdots$$ となる。

かくして $E_1\leqq\dfrac{\sqrt{A}\ s^2}{8(1-s)}$ を得る。

さて $100\leqq a\leqq2500$ のとき $0\leqq c-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}<10^{-8}$ であったから $100\leqq A\leqq2500$ のとき $A+a\leqq5000$ となり，(**5.** の直前の説明参照)

$$0\leqq E_2=(A+a)\left(c-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)<0.5\times10^{-4}\quad(13)$$

よって $\dfrac{\sqrt{A}\,s^2}{8(1-s)} \leqq 4.5\times10^{-4}$ (14) とすれば (12) は成立つ。

また $2500<a<10000$ のとき $0\leqq c-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}<10^{-9}$

であったから $A+a<20000$ より

$$0\leqq E_2=(a+A)\left(c-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)<0.2\times10^{-4} \quad (15)$$

よって $\dfrac{\sqrt{A}\,s^2}{8(1-s)} \leqq 4.8\times10^{-4}$ (16) とすれば (12) は成立つ。今 $s=\dfrac{1}{t}$ とおけば

(14) より $A\leqq\{36\times10^{-4}\,t(t-1)\}^2$ (14′)

(16) より $A\leqq\{38.4\times10^{-4}\,t(t-1)\}^2$ (16′)

(14′) 又は (16′) の右辺の整数部分を $A(t)$ とかくと例えば $|r'|=s\leqq\dfrac{1}{100}$ のとき

$A\leqq A(100)$ を満足するAに対して

(12) は成立つ。$(36\times10^{-4}\cdot100\cdot99)^2=1270.2096$ より

$A(100)=1270$

即ち $|r'|=s\leqq\dfrac{1}{100}$ にするためには $A\leqq1270$ であればよい。そして $s=\dfrac{|b|}{A}$ であったから $s\leqq\dfrac{1}{100}$ より $A\geqq100\,|b|$

$|b|$ として1, 1.5, 2, 2.5, ··· を与えることにより次の結果を得る。

(3.1.)

$0\leqq A\leqq1270$ ならば $\{a_i\}$ の歩みを 2 にすることが出来る。

$150\leqq A\leqq1270$	〃	〃 3	〃
$200\leqq A\leqq1270$	〃	〃 4	〃
······			
$950\leqq A\leqq1270$	〃	〃 19	〃

更に一般に

(3.2.) $s=\dfrac{|b|}{A}$, $s=\dfrac{1}{t}$ とするとき

Aが $t\,|b|\leqq A\leqq A(t)$ を満足する範囲では $\{a_i\}$ の歩み $2\,|b|$ にすることが出来る。

$A(t)$ の主な値を示せば次のようになる。

(3.3.)

A(105)=	1545	A(135)=	4825
A(110)=	1863	A(140)=	5584
A(115)=	2227	A(145)=	6428
A(120)=	2642 ((14′)によるとき) 3006 ((16′)によるとき)	A(150)=	7365
		A(155)=	8401
A(125)=	3542	A(160)=	9543
A(130)=	4146	A(165)=	10797

4．数列 $\{a_i\}$ の決定

(2.1)，(3.2.) を用いるほかに実験的手段の根拠として次の定理を用いる。

(4.1.) $\{a_i\}$ の値が $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ まで定められたとき a_k の値を仮りにきめたとする。

a_{k-1}, a_k に対する c の値をそれぞれ c_{k-1}, c_k とし $\dfrac{a_{k-1}+a_k}{2}=A_k$ とおけば

$$c_{k-1}(A_k+a_{k-1})-\sqrt{A_k}\geqq 5\times 10^{-4} \qquad (17)$$

又は $c_k(A_k+a_k)-\sqrt{A_k}\geqq 5\times 10^{-4}$ 　　(18)

が成立てばその a_k の値は不適であり，

$$c_{k-1}(A_k+a_{k-1})-\sqrt{A_k}<5\times 10^{-4} \qquad (19)$$

かつ $c_k(A_k+a_k)-\sqrt{A_k}<5\times 10^{-4}$ 　　(20)

が成立てばその a_k の値は適当である。

(証明) (17) 又は (18) が成立つような a_k の値が不適当であることは明かである。

(19) と (20) が共に成立つ場合を考える。$a_{k-1}\leqq A\leqq a_k$ $(A\neq A_k)$ であるようなAに対して m.f. を用いて $\sqrt{A}$ を求めたときの誤差 E を A の函数と考えて $f(A)$ とおき，(19)，(20) の左辺をそれぞれ $f_1(A_k)$，$f_2(A_k)$ とおくと

$a_{k-1}\leqq A<A_k$ のとき

$f(A_k)=f_1(A_k)$ と定めることにより $<a_{k-1}, A_k>$ において $f(A)$ を考えることにする。

$$f(A)=\frac{(\sqrt{a_{k-1}}-\sqrt{A})^2}{2\sqrt{a_{k-1}}}+(A+a_{k-1})\left(c_{k-1}-\frac{1}{2\sqrt{a_{k-1}}}\right)$$

$$f'(A)=\frac{(\sqrt{a_{k-1}}-\sqrt{A})\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)}{2\sqrt{a_{k-1}}}+c_{k-1}-\frac{1}{2\sqrt{a_{k-1}}}$$

$$=c_{k-1}-\frac{1}{2\sqrt{A}}$$

$$\geqq c_{k-1}-\frac{1}{2\sqrt{a_{k-1}}}\ \text{(等号は }A=a_{k-1}\text{のとき)}$$

$$\geqq 0$$

故に $<a_{k-1}, A_k>$ において $f(A)$ は狭義の増加函数となり，そこでは

$f(A)\leqq f(A_k)=f_1(A_k)<5\times 10^{-4}$ となる。

$A_k<A\leqq a_k$ のとき

$f(A_k)=f_2(A_k)$ と定めることにより $<A_k, a_k>$ において $f(A)$ を考えることにする。

$$f(A)=\frac{(\sqrt{a_k}-\sqrt{A})^2}{2\sqrt{a_k}}+(A+a_k)\left(c_k-\frac{1}{2\sqrt{a_k}}\right)$$

$$f'(A)=c_k-\frac{1}{2\sqrt{A}},\quad f''(A)=\frac{1}{4}A^{-\frac{3}{2}}>0$$

故に $<A_k, a_k>$ において $f'(A)$ は狭義の増加函数となり，$f'(a_k)\geqq 0$ である。

(i) $f'(A_k)\geqq 0$ のときは

$(A_k,\ a_k>$ において $f'(A)>0$

$\therefore\ f(A)\leqq f(A_k)=f_2(A_k)<5\times10^{-4}$

(ii) $f'(A_k)<0$ のときは

$(A_k,\ a_k>$ において $f'(A)=0$ となる A の値が一つある。それを p_k とすれば,

$f'(A_k)<0=f'(p_k)\leqq f'(a_k)$

故に $(A_k,\ a_k>$ において

$0\leqq f(A)\leqq max(f(A_k),\ f(a_k))$

ところが $f(A_k)=f_2(A_k)<5\times10^{-4}$

$$\begin{cases} f(a_k)=2a_k\left(c_k-\dfrac{1}{2\sqrt{a_k}}\right)<0.5\times10^{-4}\ (a_k\leqq2500) \\ f(a_k)=2a_k\left(c_k-\dfrac{1}{2\sqrt{a_k}}\right)<0.2\times10^{-4}\ (a_k>2500) \end{cases}$$

$\therefore\ f(A)<5\times10^{-4}$

以上のことから $a_{k-1}\leqq A\leqq a_k\,(A\neq A_k)$ であるような A に対しても $f(A)<5\times10^{-4}$
之と $f_1(A_k)$, $f_2(A_k)$ がいずれも 5×10^{-4} より小さいことから a_k の値は適当であることが云えた。(終)

$1000\leqq A<10000$ のときは $a_i\,(1000\leqq a_i<(10000)$ の代りに $10a_j$ $(100\leqq a_j<1000)$ を考える。

(2.1.) により $\{10a_j\}$ の歩みを130以上にすることは出来ないから, 20, 30, $\cdots$, 120にすることを考える。便宜上$1000\leqq A<10000$に対する $\{10a_j\}$ の歩みを先に考え, $100\leqq A<1000$ に対しては $\{a_j\}$ の歩みを前の $\{10a_j\}$ の歩みの$\frac{1}{10}$をそのまゝ用いることにする。

始めに $\{10a_j\}$ の歩みを20から30に変え得る場所について考える。(2.1.) により

$a_k\leqq1468$ のときは $\{a_i\}$ の歩みを30にすることは不可能であるので

$1000\leqq a_j\leqq1460$ のとき $\{10a_j\}$ の歩みを20にすることが出来る説明をしよう。

$1000\leqq A\leqq1270$ のときは

$100\cdot10\leqq A\leqq A(100)$ が成立つので (3.2.) により $\{10a_j\}$ の歩みを20にすることが出来る。

$1270<A\leqq1470$ $(1460+10)$ のときは

$105\cdot10<A<A(105)(=1545)$ が成立つので (3.2.) により $\{10c_j\}$ の歩みを20にすることが出来る。

之に対応して $100\leqq A\leqq147$ のとき $\{a_j\}$ の歩みを 2 にすることが出来ることは (3.1.) から明かである。

今 $a_1=101$ とすると $a_2=103$, $a_3=105$, $\cdots$

$a_{23}=145$ までがきまる。こゝで $\{10a_j\}$ の歩みを30にすることを考えるために $10a_{23}=1450$ の次に $10a_{24}=1480$ とすることが出来ないかを実験的に調べるために $\dfrac{1450+1480}{2}=1465$ をとり 1450 に対する m.f. 1313065 を用いて $\sqrt{1465}\fallingdotseq(1450+1465)\times1313065\times10^{-8}$

$=38.27584475$ を求める。

一方 $\sqrt{1465}=38.2753184\cdots$

此の差は 5×10^{-4} より大きいから (4.1.) により $10a_{24}=1480$は不適当である。よって $a_{24}=147$ とする。次に $10a_{25}=1500$ としてみると同様に不適当であることが云えるので $a_{25}=149$，同様に $a_{26}=151$

次に $10a_{26}\leqq A\leqq10a_{27}$ なる A に対しては $10a_{27}=1540$ と定めてよいことがわかる。それは，

1510 に対する m.f. は 1286713

1540 に対する m.f. は 1274118

$\dfrac{1510+1540}{2}=1525$ をとると

$(1510+1525)\times1286713\times10^{-8}=39.05173955$

$(1525+1540)\times1274118\times10^{-8}=39.05171670$

一方 $\sqrt{1525}=39.0512483\cdots$

従って上の二つの近似値と $\sqrt{1525}$ との差はどちらも 5×10^{-4} より小さい。故に (4.1.) により $10a_{27}=1540$ は適当である。

(2.1.) によれば $a_k\leqq2154$ のときは，$\{a_i\}$ の歩みを40以上にすることは不可能であった。そこで

$1540\leqq10a_j\leqq2150$ のとき $\{10a_j\}$ の歩みを30に することが出来る説明をしよう。

それには，

$1540\leqq A<2165$ $(2150+15)$ とすると，

$10a_{27}\leqq A\leqq10a_{28}$ なら $10a_{28}=1570$ としてよいこと，

$10a_{28}\leqq A\leqq10a_{29}$ なら $10a_{29}=1600$ としてよいことを実験的に確かめると，あとは A(106)，A(107)，A(110)，A(115) の値を利用して説明出来る。

かくして $a_{26}=151$，$a_{27}=154$，$a_{28}=157$，$\cdots$，$a_{47}=214$ までがきまる。このような方法を続けて

$a_{48}=217$，$a_{49}=220$，$a_{50}=223$ とし

$a_{51}=227$，$a_{52}=231$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$，$a_{66}=287$

$a_{67}=291$，$a_{68}=296$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$，$a_{82}=366$

$a_{83}=371$，$a_{84}=377$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$，$a_{97}=455$

$a_{98}=461$，$a_{99}=468$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$，$a_{109}=538$

$a_{110}=545$, $a_{111}=553$, ..., $a_{121}=633$

$a_{122}=641$, $a_{123}=650$, ..., $a_{132}=731$

$a_{133}=740$, $a_{134}=750$, ..., $a_{141}=820$

$a_{142}=830$, $a_{143}=841$, ..., $a_{152}=940$

$a_{153}=951$, $a_{154}=963$, ..., $a_{157}=999$

とすることの説明が出来る。c_j が大きくなるにつれて $|r|$, $|r'|=s$ は小さくなり，2.，3. で考えた近似式の精度が増すにつれて実験的な手段によることが次第に少くて済むようになる。之より最後にかゝげた m.f. の表1を作ることが出来る。

尚，3. の第（13）式と第（15）式とがうまくつながることを調べておく。それには $10a_j$ の値が2500に近いところで考えればよい。

$a_{56}=247$, $a_{57}=251$ より

$10a_{56}=2470$, $10a_{57}=2510$ よって

$2470\leqq A\leqq 2485$ のときは $A+a<5000$ となるから（13）は成立つ。

また $2485<A\leqq 2510$ のときは a としては $10a_{57}$ を用いるから（15）を用いればよいから（13）と（15）とはうまくつながる。

5. $100\leqq A<10000$ のとき $\sqrt{A}$ の小数第3位未満を4捨5入して得た値を m.f. を用いて正確に求めること。

例1. $A=1042$

1042 に近い 1050 に対する m.f. は 1543034, $(1042+1050)\times 1543034\times 10^{-8}=32.2802768$

之は $\sqrt{1042}$ の過剰近似値で誤差の限界は 0.0005 である。

よって $32.2797\cdots<\sqrt{1042}<32.2802\cdots$

故に小数第3位未満を4捨5入すれば

$\sqrt{1042}=32.280$

例2. $A=105.8$

105.8に近い105に対する m.f. は4879501, $(105+105.8)\times 4879501\times 10^{-8}=10.285988168$

$\therefore\ 10.2854\cdots<\sqrt{105.8}<10.2859\cdots$

このとき $(10.2855)^2$ を計算すると（手動式計算機を用いるとよい。）105.8より小さいことがわかる。

$\therefore\ 10.2855<\sqrt{105.8}<10.2859\cdots$

故に小数第3位未満を4捨5入すれば

$\sqrt{105.8}=10.286$

6. m.f. を用いて出した $\sqrt{A}$ の近似値をもとにして，Newton の方法で更に精密な近似値を出すこと。

実は $A \fallingdotseq a$ のとき $\sqrt{A} \fallingdotseq \frac{A+a}{2\sqrt{a}}$ とするのが Newton の方法に当っているので

$\sqrt{a}=x_1$ とおけば

$$\sqrt{A} \fallingdotseq \frac{A+x_1^2}{2x_1}$$
$$=\frac{x_1}{2}+\frac{A}{2x_1}$$

こゝで m.f. を用いて求めた $\sqrt{A}$ の近似値 x_0 の有効数字の第6位未満を切捨てたものを x_1 と考えると $x_2=\frac{x_1}{2}+\frac{A}{2x_1}$ は更に精密な$\sqrt{A}$の近似値になる。その誤差 E の限界を考えるために前のように

$100 \leqq A < 10000$ とすると，

$$0 \leqq x_0-\sqrt{A} < 5\times10^{-4} \quad (21)$$
$$0 \leqq x_0-x_1 < 10^{-4} \quad \text{即ち}$$
$$-10^{-4} < x_1-x_0 \leqq 0 \quad (22)$$

(21)+(22)

$$-10^{4} < x_1-\sqrt{A} < 5\times10^{-4}$$
$$\therefore \ |x_1-\sqrt{A}| < 5\times10^{-4}$$
$$\therefore \ (\sqrt{a}-\sqrt{A})^2 < 25\times10^{-8} \quad (x_1=\sqrt{a})$$

また $10 \leqq x_1 < 100$ より

$$\frac{1}{200} < \frac{1}{2x_1} \leqq \frac{1}{20}$$
$$\therefore \ \frac{1}{200} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \leqq \frac{1}{20}$$

$$E=x_2-\sqrt{A}$$
$$=\frac{A+a}{2\sqrt{a}}-\sqrt{A} \quad (x_1=\sqrt{a})$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{A})^2}{2\sqrt{a}}$$
$$<\frac{25\times10^{-8}}{20}$$
$$=1.25\times10^{-8}$$

$$\therefore \ 0 \leqq E=x_2-\sqrt{A} < 1.25\times10^{-8} \quad (23)$$

例　$A=105.8$

5.例2のようにして x_0 を求める。

$$x_0=(105+105.8)\times4879501\times10^{-8}$$
$$=10.285988168$$
$$x_1=10.2859$$
$$x_2=\frac{x_1}{2}+\frac{105.8}{2x_1}$$

$$=\frac{10.2859}{2}+\frac{105.8}{2\times10.2859}$$

$$=5.14295+5.1429626965\cdots$$

$$=10.2859126965\cdots$$

此の x_2 は $\sqrt{105.8}$ の過剰近似値で，誤差の限界は (23) より 1.25×10^{-8} だから

$$10.28591268\cdots<\sqrt{105.8}<10.28591269\cdots$$

$$\therefore\quad \sqrt{105.8}=10.2859126\cdots$$

(小数第7位未満を4捨5入して求めると 10.2859127 となる。)

尚，上の x_2 に対する誤差の限界を更に小さくすることを望むなら次のようにするとよい。

$$0\leqq E=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{A})^2}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{(x_1-\sqrt{105.8})^2}{2x_1}$$

$$<\frac{(\sqrt{105.8}-x_1)^2}{20}\qquad(\because\ x_1=10.2589)$$

ところが上の結果により

$$\sqrt{105.8}=10.2859126\cdots$$

$$x_1=10.2859$$

$$\therefore\quad 0<\sqrt{105.8}-x_1=0.0000126\cdots$$

$$<1.3\times10^{-5}$$

$$\therefore\quad 0\leqq E<\frac{1.69\times10^{-10}}{20}$$

$$<10^{-11}$$

$$\therefore\quad 0<x_2-\sqrt{105.8}<10^{-11}$$

$$x_2-10^{-11}<\sqrt{105.8}<x_2$$

そして $x_2=10.28591269656\cdots$

$$\therefore\quad 10.28591269655\cdots<\sqrt{105.8}<10.28591269656\cdots$$

$$\therefore\quad \sqrt{105.8}=10.2859126965\cdots$$

表 1

数	m. 奇数	f. 偶数	数	m. 奇数	f. 偶数	数	m. 奇数	f. 偶数
101	497 5186	157 3292	247	318 1424	100 6055	553	212 6217	672 3687
103	492 6647	155 7943	251	315 5973	998 0060	561	211 1002	667 5574
105	487 9501	154 3034	255	313 1122	990 1476	569	209 6110	662 8479
107	483 3683	152 8545	259	310 6849	982 4719	577	208 1528	658 2368
109	478 9132	151 4457	263	308 3133	974 9720	585	206 7246	653 7205
111	474 5790	150 0751	267	305 9951	967 6413	593	205 3254	649 2959
113	470 3605	148 7411	271	303 7284	960 4735	601	203 9543	644 9600
115	466 2525	147 4420	275	301 5114	953 4626	609	202 6103	640 7098
117	462 2502	146 1764	279	299 3422	946 6031	617	201 2925	636 5426
119	458 3493	144 9428	283	297 2192	939 8895	625	200 0000	632 4556
121	454 5455	143 7399	287	295 1407	933 3168	633	198 7322	628 4463
123	450 8349	142 5665	291	293 1052	926 8800	641	197 4882	624 5123
125	447 2136	141 4214	296	290 6191	919 0183	650	196 1162	620 1737
127	443 6783	140 3034	301	288 1953	911 3533	659	194 7721	615 9243
129	440 2255	139 2116	306	285 8310	903 8770	668	193 4559	611 7610
131	436 8521	138 1448	311	283 5240	896 5816	677	192 1657	607 6811
133	433 5550	137 1022	316	281 2720	889 4601	686	190 9009	603 6817
135	430 3315	136 0828	321	279 0728	882 5057	695	189 9609	599 7602
137	427 1879	135 0859	326	276 9244	875 7119	704	188 4446	595 9142
139	424 0915	134 1105	331	274 8249	869 0725	713	187 2515	592 1412
141	421 0760	133 1560	336	272 7724	862 5820	722	186 0808	588 4390
143	418 1211	132 2215	341	270 7652	856 2347	731	184 9317	584 8054
145	415 2274	131 3065	346	268 8017	850 0256	740	183 8037	581 2382
147	412 3931	130 4102	351	266 8803	843 9495	750	182 5742	577 3503
149	409 6160	129 5320	356	264 9995	838 0020	760	181 3691	573 5394
151	406 8943	128 6713	361	263 1579	832 1784	770	180 1875	569 8029
154	402 9115	127 4118	366	261 3542	826 4746	780	179 0288	566 1386
157	399 0135	126 1887	371	259 5871	820 8854	790	177 8921	562 5440
160	395 2848	125 0000	377	257 5132	814 3280	800	176 7767	559 0170
163	391 6303	123 8144	383	255 4881	807 9243	810	175 6821	555 5556
166	388 0753	122 7202	389	253 5101	801 6693	820	174 6076	552 1577
169	384 6154	121 6261	395	251 5774	795 5573	830	173 5526	548 8213
172	381 2465	120 5608	401	249 6881	789 5831	841	172 4138	545 2203
175	377 9645	119 5229	407	247 8408	783 7415	852	171 2972	541 6893
178	374 7659	118 5114	413	246 0340	778 0276	863	170 2020	538 2260
181	371 6471	117 5252	419	244 2660	772 4369	874	169 1276	534 8282
184	368 6049	116 5632	425	242 5357	766 9650	885	168 0732	531 4941
187	365 6363	115 6244	431	240 8416	761 6078	896	167 0383	528 2215
190	362 7382	114 7079	437	239 1825	756 3613	907	166 0223	525 0086
193	359 9079	113 8129	443	237 5572	751 2218	918	165 0246	521 8536
196	357 1429	112 9385	449	235 9646	746 1856	929	164 0447	518 7549
199	354 4407	112 0840	455	234 4037	741 2494	940	163 0821	515 7107
202	351 7988	111 2486	461	232 8733	736 4098	951	162 1362	512 7194
205	349 2152	110 4316	468	231 1251	730 8817	963	161 1228	509 5149
208	346 6877	109 6323	475	229 4158	725 4763	975	160 1282	506 3697
211	344 2142	108 8501	482	227 7438	720 1891	987	159 1518	503 2821
214	341 7930	108 0845	489	226 1079	715 0157	999	158 1930	500 2502
217	339 4222	107 3347	496	224 5067	709 9523			
220	337 1000	106 6004	503	222 9390	704 9950			
223	334 8248	105 8809	510	221 4038	700 1401			
227	331 8617	104 9439	517	219 8998	695 3841			
231	328 9759	104 0313	524	218 4261	690 7238			
235	326 1641	103 1422	531	216 9816	686 1559			
239	323 4232	102 2754	538	215 5654	681 6774			
243	320 7502	101 4302	545	214 1765	677 2855			

表　2

数	m. 奇数	f. 偶数	数	m. 奇数	f. 偶数	数	m. 奇数	f. 偶数
101	497 518	157 329	249	316 862	100 200	532	216 777	685 510
103	492 664	155 794	253	314 347	994 053	540	215 165	680 413
105	487 950	154 303	257	311 891	986 287	548	213 589	675 429
107	483 368	152 854	261	309 492	978 700	556	212 047	670 552
109	478 913	151 445	265	307 147	971 285	564	210 537	665 779
111	474 578	150 075	269	304 855	964 037	572	209 060	661 107
113	470 360	148 741	273	302 613	956 948	580	207 613	656 532
115	466 252	147 441	277	300 420	950 014	588	206 196	652 050
117	462 250	146 176	281	298 274	943 228	596	204 807	647 659
119	458 349	144 942	285	296 174	936 585	605	203 278	642 824
121	454 545	143 739	290	293 610	928 476	614	201 783	638 095
123	450 834	142 566	295	291 111	920 574	623	200 320	633 469
125	447 213	141 421	300	288 675	912 870	632	198 889	628 943
127	443 678	140 303	305	286 299	905 357	641	197 488	624 512
129	440 225	139 211	310	283 980	898 026	650	196 116	620 173
131	436 852	138 144	315	281 718	890 870	659	194 772	615 924
133	433 554	137 102	320	279 508	883 883	668	193 455	611 760
135	430 331	136 082	325	277 350	877 058	678	192 023	607 232
138	425 628	134 595	330	275 240	870 388	688	190 623	602 803
141	421 075	133 155	335	273 179	863 868	698	189 252	598 469
144	416 666	131 761	340	271 163	857 492	708	187 911	594 228
147	412 393	130 410	345	269 190	851 256	718	186 598	590 075
150	408 248	129 099	350	267 261	845 154	728	185 312	586 009
153	404 226	127 827	355	265 372	839 181	738	184 052	582 025
156	400 320	126 592	360	263 523	833 333	748	182 818	578 121
159	396 525	125 392	366	261 354	826 747	758	181 608	574 295
162	392 837	124 225	372	259 237	819 782	768	180 421	570 544
165	389 249	123 091	378	257 172	813 250	778	179 258	566 865
168	385 758	121 987	384	255 155	806 871	789	178 004	562 900
171	382 359	120 912	390	253 184	800 640	800	176 776	559 016
174	379 049	119 865	396	251 259	794 552	811	175 573	555 212
177	375 823	118 845	402	249 377	788 600	822	174 395	551 485
180	372 677	117 851	408	247 536	782 780	833	173 239	547 832
183	369 610	116 881	414	245 736	777 087	844	172 107	544 250
186	366 617	115 934	420	243 975	771 516	855	170 996	540 738
189	363 696	115 010	426	242 250	766 064	866	169 906	537 292
193	359 907	113 812	432	240 562	760 725	878	168 741	533 608
197	356 235	112 651	439	238 636	754 636	890	167 600	529 998
201	352 672	111 524	446	236 756	748 690	902	166 481	526 461
205	349 215	110 431	453	234 920	742 883	914	165 385	522 994
209	345 857	109 369	460	233 126	737 209	926	164 310	519 594
213	342 594	108 337	467	231 372	731 663	938	163 255	516 260
217	339 422	107 334	474	229 657	726 241	950	162 221	512 989
221	336 336	106 358	481	227 980	720 937	962	161 206	509 779
225	333 333	105 409	488	226 339	715 747	974	160 210	506 629
229	330 409	104 484	495	224 733	710 669	986	159 232	503 537
233	327 560	103 583	502	223 160	705 696	998	158 272	500 500
237	324 784	102 706	509	221 621	700 827			
241	322 078	101 850	516	220 112	696 057			
245	319 438	101 015	524	218 426	690 723			