

## 或る uniformity の subbase の性質について

吉 田 誠 一 郎

(昭和42年9月30日受理)

実数の集合  $X$  に一様位相を導入する為の uniform structure の uniformity の subbase の作り方は色々あるが、所謂 usual structure によるものと異なる一様位相を導入する為に用いられる uniformity の subbase の例としては、 $a < b$  として作った

$$Sab = \{ (x, y) : \text{both } x, y < b \text{ or both } x, y > a \}$$

の族がある。この族のもつ性質について考えてみる。尚、以下に現われる区間  $(a, b)$ ,  $(-\infty, a]$  などは、最小元、最大元を持たない稠密な全順序集合  $X$  における区間を考えてもよい。

今  $m$  箇の区間  $(a_i, b_i)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) と、それぞれの内部の点  $x_i$  を考え、

$$S_{a_i b_i} [x_j] = \{ y : (x_j, y) \in S_{a_i b_i} \} \text{ を } S_j^i \text{ とかくと次の諸性質が成立つ。}$$

$$[1] S_j^i \cup S_k^j \supseteq S_k^i \quad (i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\})$$

証明 本質的には

$$(1) S_2^1 \cup S_3^2 \supseteq S_3^1 \text{ を云うことと同じである。}$$

$$S_2^1 = S_{a_1 b_1} [x_2] = \begin{cases} (-\infty, b_1) & (x_2 \leq a_1) \\ X & (a_1 < x_2 < b_1) \\ (a_1, \infty) & (b_1 \leq x_2) \end{cases}$$

今  $S_j^i$  の補集合を  $S_j^{ic}$  と書くと、(1) の代りに両辺の補集合を考えて

$$(2) S_2^{1c} \cap S_3^{2c} \supseteq S_3^{1c} \text{ を証明すればよい。}$$

$$S_2^{1c} = \begin{cases} \phi & (a_1 < x_2 < b_1) \\ (-\infty, a_1] & (b_1 \leq x_2) \\ [b_1, \infty) & (x_2 \leq a_1) \end{cases}$$

$$S_3^{2c} = \begin{cases} \phi & (a_2 < x_3 < b_2) \\ (-\infty, a_2] & (b_2 \leq x_3) \\ [b_2, \infty) & (x_3 \leq a_2) \end{cases}$$

$$S_3^{1c} = \begin{cases} \phi & (a_1 < x_3 < b_1) \\ (-\infty, a_1] & (b_1 \leq x_3) \\ [b_1, \infty) & (x_3 \leq a_1) \end{cases}$$

(i)  $S_2^{1c} = \phi$  又は  $S_3^{2c} = \phi$  のとき (2) は成立つ。

$$(ii) \begin{cases} S_2^{1c} = (-\infty, a_1] \\ S_3^{2c} = (-\infty, a_2] \end{cases} \text{ のとき} \\ b_1 \leq x_2, b_2 \leq x_3$$

ところが  $a_2 < x_2 < b_2$

故に  $b_1 < x_3$  となり  $S_3^{1c} = (-\infty, a_1] = S_2^{1c}$

よって (2) は成立つ。

$$(iii) \begin{cases} S_2^{1c} = [b_1, \infty) \\ S_3^{2c} = [b_2, \infty) \end{cases} \text{ のとき} \\ x_2 \leq a_1, x_3 \leq a_2$$

ところが  $a_2 < x_2 < b_2$

故に  $x_3 < a_1$  となり  $S_3^{1c} = [b_1, \infty) = S_2^{1c}$

よって (2) は成立つ。

$$(iv) \begin{cases} S_2^{1c} = (-\infty, a_1] \\ S_3^{2c} = [b_2, \infty) \end{cases} \text{ のとき} \\ b_1 \leq x_2, x_3 \leq a_2$$

ところが  $a_2 < x_2 < b_2, a_1 < b_1$  だから

$$a_1 < b_2 \text{ となり } S_2^{1c} \cap S_3^{2c} = \phi$$

よって (2) は成立つ。

$$(v) \begin{cases} S_2^{1c} = [b_1, \infty) \\ S_3^{2c} = (-\infty, a_2] \end{cases} \text{ のとき} \\ x_2 \leq a_1, b_2 \leq x_3$$

ところが  $a_2 < x_2 < b_2, a_1 < b_1$  だから

$$a_2 < b_1 \text{ となり } S_2^{1c} \cap S_3^{2c} = \phi$$

よって (2) は成立つ。

即ちいずれの場合も (2) は成立つ。(終)

$$[2] \text{ 巡回置換 } \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \cdots p_n \\ p_2 & p_3 \cdots p_1 \end{pmatrix}$$

$$(n \leq m, p_i \in \{1, 2, \dots, m\} (i=1, 2, \dots, n), p_i \neq p_j (i \neq j))$$

に対して

$$(3) \quad S_{p_2}^{p_1} \cup S_{p_3}^{p_2} \cup \dots \cup S_{p_1}^{p_n} = X \text{ が成立つ。}$$

証明 (n についての帰納法)

明かに  $S_i^i = S a_i b_i [x_i] = X$  であるから  $i=p_1$  とすると (3) は  $n=1$  のとき成立つ。

$n=2$  のときは

$$S_{p_2}^{p_1} \cup S_{p_1}^{p_2} \cong S_{p_1}^{p_1} = X \quad \therefore \quad S_{p_2}^{p_1} \cup S_{p_1}^{p_2} = X$$

$2 \leq n=k < m$  のとき (3) が成立つと仮定すれば

$$\begin{aligned} S_{p_2}^{p_1} \cup S_{p_3}^{p_2} \cup \dots \cup S_{p_1}^{p_{k+1}} &= (S_{p_2}^{p_1} \cup S_{p_3}^{p_2} \cup \dots \cup S_{p_k}^{p_{k-1}}) \cup (S_{p_{k+1}}^{p_k} \cup S_{p_1}^{p_{k+1}}) \\ &\cong (S_{p_2}^{p_1} \cup S_{p_3}^{p_2} \cup \dots \cup S_{p_k}^{p_{k-1}}) \cup (S_{p_1}^{p_k}) = X \end{aligned}$$

よって (3) は  $n=k+1 \leq m$  のときも成立つ。

(終)

$$[3] \quad \bigcup_{i=1}^m (S_i^1 \cap S_i^2 \cap \dots \cap S_i^m) = X$$

証明 左辺は  $\bigcup_{\substack{p_i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ (i=1, 2, \dots, m)}} (S_1^{p_1} \cup S_2^{p_2} \cup \dots \cup S_m^{p_m})$  となるから

$$(4) \quad S_1^{p_1} \cup S_2^{p_2} \cup \dots \cup S_m^{p_m} = X$$

を云えばよい。ただしここでは  $i \neq j$  のとき  $p_i \neq p_j$  であるとは限らない。

若し或る  $i (1 \leq i \leq m)$  に対して  $p_i = i$  が成立てば  $S_i^i = X$  となり (4) は成立つ。

すべての  $i (1 \leq i \leq m)$  に対して  $p_i \neq i$  のときは、 $p_1, p_2, \dots, p_m$  の下に  $1, 2, \dots, m$  を並べた

$$(5) \quad \begin{Bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{Bmatrix}$$

は一般には置換ではない。しかしこの中から巡回置換を取り出すことができる。

それには下段の 1 から始めて矢印の順に並べ変えて行くと  $\begin{Bmatrix} p_1 & p_{q_1} & p_{q_2} & p_{q_3} & \dots \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \dots \\ 1 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots \end{Bmatrix}$

ただし  $q_1 = p_1, q_2 = p_{q_1}, q_3 = p_{q_2} \dots$  となるように選んで行く。書き改めると

$$\begin{Bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \dots \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \dots \\ 1 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots \end{Bmatrix} \text{ の形になる。}$$

ところが  $q_1, q_2, q_3 \dots$  は皆  $m$  以下の自然数であるから、いつかは同じものが再び現われ

る。始めて一致した二つのものを  $q_k = q_{k+r}$  ( $1 \leq k < k+r \leq m$ ) とすれば

$$(5) \text{ の中に置換 } \begin{pmatrix} q_{k+1} & q_{k+2} & \cdots & q_{k+r} \\ q_k & q_{k+1} & \cdots & q_{k+r-1} \end{pmatrix}$$

が含まれる。  $q_{k+r}$  を  $q_k$  と改め左右の順序を逆に改めると  $\begin{pmatrix} q_k & q_{k+r-1} & \cdots & q_{k+2} & q_{k+1} \\ q_{k+r-1} & q_{k+r-2} & \cdots & q_{k+1} & q_k \end{pmatrix}$  となり巡回置換になる。

$$\therefore S_1^{p_1} \cup S_2^{p_2} \cup \cdots \cup S_m^{p_m} \cong S_{q_{k+r-1}}^{q_k} \cup S_{q_{k+r-2}}^{q_{k+r-1}} \cup \cdots \cup S_{q_k}^{q_{k+1}} = X$$

故に (4) は成立つ。

(終)

## 文 献

C. Kuratowski : Topologie I

J. Kelley : General topology

Steven A. Gaal : Point set topology