

Huygensの原理を用いた波のシミュレーション I

富 塚 明

(1995年5月12日受理)

Simulation for waves using Huygens' principle I

Akira TOMIZUKA

abstract

Huygens' principle is very intuitive and useful for considering the behavior of waves. The author tried to illustrate the fundamental properties of waves such as diffraction, reflection and refraction using Huygens' principle modified by Kirchhoff.

1. はじめに

波が三次元空間を伝わる様子は、原理的には波源の形状や振動の種類、媒質の物理的性質（屈折率など、よりミクロに見れば物質との相互作用）と境界条件があれば、波動方程式を解くことによって求められるはずである。以前報告^{1), 2)}した電気双極子や電気四重極子から放出される電磁波の伝わる様子は、波動方程式から電場や磁場の満たす方程式を導き、それらを数値的に解いて求めたものであった。しかしながら波動方程式から出発したのでは、方程式自体が解析的に解けるケースが希であるため、複雑な数値積分を実行しなくてはならず、実用的とは言いがたい。

そこで近似的ではあるが、Huygensの原理を用いることを検討してみた。ある瞬間に一つの波面に沿って無数の素元波が生じ、それらが重なり合って、新たな波面ができる。これを繰り返していけば波面の移動の様子が記述できるはずである。Huygensはこれによって波の反射・屈折を幾何学的に説明したわけだが、三次元の波として光波のふるまいについてコンピュータ・シミュレーションで視覚化を試みたので報告する。

2. 素元波を用いての記述

最初に素元波の式を決定する必要がある。三次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

を満たす一つの解として、次の球面波

$$u(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi)$$

を考える。ここで $\vec{r} = (x, y, z)$ を位置ベクトルとして、振幅 $\frac{A}{r}$ 、位相 φ 、波長 λ 、速度 c 、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 、 $\omega = ck = c \frac{2\pi}{\lambda}$ である。

Huygens の原理はひじょうに直感的でわかりやすいが、素元波を球面波と考えるために、常に後退する波面が現れるという問題点があった。この Huygens の原理に理論的根拠を与えたのは Kirchhoff であり、その散乱理論^{3), 4)} によれば、素元波の球面波の強度は一律ではなく、波の進行方向に対して θ 方向の強度係数は $(1 + \cos \theta)$ で与えられる。つまり素元波は cardioid (心臓型) の指向性を持つので、素元波の働きが前方と後方で異なり、後退する波はなくなるわけである。したがって素元波は

$$u(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi) (1 + \cos \theta)$$

で記述すればよいことになる。

図1に1つの素元波の強度分布を示す。実際には三次元の広がりを持つが、ここでは進行方向を含む一平面上での変位で表している。黄色は正で、水色は負で、それぞれ256階調である。図1 a~d は、 $\lambda = 100$ 、 $\varphi = 0$ で、それぞれ $\omega t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ である。以下、長さの単位はコンピュータ画面のドット数である。

これらの素元波からの重ね合わせ (干渉) として進行波を表現する。いま直線上に連なった N 個の波源を考える。この方向を y 軸にとり、波の進行方向を x 軸にとると、 $x y$ 平面での任意の位置における波は、次式で表される。ただし各素元波の位相 φ_i の間には一定の関係があるものとする。

$$\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{r_i} \sin(kr_i - \omega t + \varphi_i) (1 + \cos \theta_i)$$

ここで添字 i のついた量は、それぞれが i 番目の素元波を基準にしたものである。本稿では平面波が入射した場合を考える。したがって波源は平面状に分布した素元波の集合なので、 $y z$ 平面上にある N 個の素元波からの寄与を考慮すると

$$\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{r_i} \sin(kr_i - \omega t + \varphi_i) \frac{\sqrt{(x - xs_i)^2 + (y - ys_i)^2}}{r_i} (1 + \cos \theta_i)$$

を用いればよいことがわかる。ここで各素元波の座標は (xs_i, ys_i, zs_i) である。ただし、素元波の位置がわかるように $r_i = 0$ では、強度を0とする。

3. 二つの点光源による干渉模様

最初に素元波を2つにして考える。これは2つの点光源からの干渉に相当する。いま位相を等しくとり、波源の間隔を $d=100$ 、波長をそれぞれ $\lambda=50, 33, 25$ ($\frac{d}{2}, \frac{d}{3}, \frac{d}{4}$) で描いた (図2 a~c)。水面波でよく観察される干渉模様と同じパターンが現れ、 $\frac{2d}{\lambda}$ 本の節線 (nodal line) がみられる。

4. 回折現象

次に、正方形単スリットからの回折を考える。スリットの一辺を d とし、素元波は $N \times N$ の格子状に分布しているものとする。

まず素元波密度によって合成波がどう変化するか見てみる。全体の強度がおおよそ等しくなるように A の値を N^2 に逆比例させる。図3 a~c は $d=100$ 、 $\lambda=50$ 、 $\varphi_i=0$ で、それぞれ $N=5, 11, 21$ である。 $\frac{d}{N}$ が10以上ではあまり変化は見られないので、素元波密度はそれほど大きくとらなくても良いであろう。

図4 a~d に $N=11$ について合成波の時間変化を示す。 $d=200$ 、 $\lambda=50$ 、 $\varphi_i=0$ で、それぞれ $\omega t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ である。スリットの中心軸付近はきれいな平面波となっていることがよく分かる。

次に、波長を一定にしてスリットの大きさを変えてみる。図5 a~d は $\lambda=50$ で、それぞれ $d=400, 200, 100, 50$ の場合である。素元波密度は一定に保ち、それぞれ $N=40, 20, 10, 5$ とした。また全体の強度がおおよそ等しくなるように A の値を N^2 に逆比例させている。ただし、ここで考えている強度は一平面上でのものなので d が λ に比べて大きくなるとこの関係は満たされなくなる。

図5から、スリット幅が小さくなるほど回折現象が顕著になること、逆にスリットに対する波長の割合が小さくなるほど直進性が増す (平面波になる) ことが明らかである。

5. 反射と屈折

各波源の間に一定の位相差をつけると、波源の並びと一定角度を持って進行する波が生じるので、これを利用すれば反射波や屈折波を表すことができる。

いま屈折率 n の媒質の表面 (この項では xz 平面にとる) の法線として y 軸をとり、角度 θ_{in} で波が入射するものとする。このとき xz 平面上の素元波の強度のかたよりは $1 + \frac{(x-x_s) \sin \theta_{in} + (y-y_s) \cos \theta_{in}}{r_i}$ 、また各素元波どうしの位相のずれは、 $\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_{in} \frac{d}{N}$ で与えられる。屈折波では θ_{in} の代わりに屈折角 $\theta_{tr} = \sin^{-1} \left[\frac{\sin \theta_{in}}{n} \right]$ を用い、反射波では θ_{in} を $\pi - \theta_{in}$ に置き換える必要がある。さらに屈折波では、媒質中で波長は $\frac{1}{n}$ になるので $k = \frac{2\pi}{\lambda} n$ に、反射波では密な媒質への入射であるとして位相を π だ

けずらすことにする。

一方、屈折率 n の媒質表面でのエネルギー反射率 R は Fresnel の公式によれば

$$R = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\cos \theta_{in} - n \cos \theta_{ref}}{\cos \theta_{in} + n \cos \theta_{ref}} \right)^2 + \left(\frac{n \cos \theta_{in} - \cos \theta_{ref}}{n \cos \theta_{in} + \cos \theta_{ref}} \right)^2 \right\}$$

で与えられる。これは電磁波の偏光した二つの電気ベクトルの振幅反射率を考慮したもので、入射面に平行と垂直な偏光の割合が等しいとして平均したものである。そこで今回は振幅反射率を \sqrt{R} 、振幅透過率を $\sqrt{1-R}$ と考え、それぞれ反射波、屈折波にかけあわせることにする。たとえば水 ($n=1.333$) を考えると、振幅反射率と振幅透過率は、入射角45度に対して、それぞれ0.1672, 0.9859, 60度に対して0.2444, 0.9697, 75度に対して0.8874, 0.4610となる。これは素元波の初期振幅の値を変えることに相当する。

図6に反射波及び屈折波を示す。いずれも入射波は描いていないが、左上方向からの入射である。図6 aは反射率、屈折率を考慮をせずに入射角45度で入射した場合で、図6 b, cは入射角はそれぞれ60度, 75度であり、反射率、屈折率をかけあわせている。

6. まとめ

Kirchhoffによって修正された Huygens の原理を用いて、基本的な波の性質である、回折、反射、屈折の現象を不十分ながらも視覚化することができた。とくに波の回折では、素元波を細かくとればスリットを通して平面波がつくられ、またスリットの大きさが小さくなるにつれ、回折現象が強く現れることが示された。

今回は、時間間隔を $\omega t = \frac{\pi}{4}$ ごとにしかとらなかったが、もっと細かくとり、一つ一つを VTR にコマ撮りすれば、動画として視覚教材に活用できる。

しかしながら大きな問題点も指摘できる。第一は、今回のシミュレーションは素元波の1回だけの重ね合わせだけですべてを表現したことである。本来の Huygens の原理は微少時間ごとに素元波の重ね合わせによる包絡面(新たな波面)をくり返し合成して、等位相波面の移動の様子を説明するものであるが、この点からいえばシミュレーションとしては不十分である。第二に、入射する平面波と素元波との関係を見捨てたことである。これは第一の問題点とも関係するが、素元波の初期振幅を入射波からどのように定めるか、特に素元波に位相をつける場合などは問題である。

これらの点を改善できれば、孤島の陰に回り込む水面波なども描写することができるであろう。

ファはデジタルアーツ社の Hyper Frame3. 写真撮影はアビオニクス社のフィルムレコーダ FR-1000, 露出時間は 7 秒.

【参考文献】

- [1] 冨塚 明: 長崎大学教養部紀要 (自然科学編) 第30巻第1号37-45 (1989).
- [2] 冨塚 明: 長崎大学教養部紀要 (自然科学編) 第31巻第1号1-11 (1990).
- [3] 有山正孝: 『振動・波動』 裳華房 (1960).
- [4] 砂川重信: 『理論電磁気学』 紀伊国屋書店 (1973).

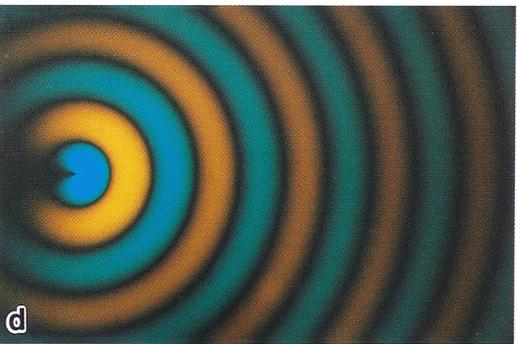
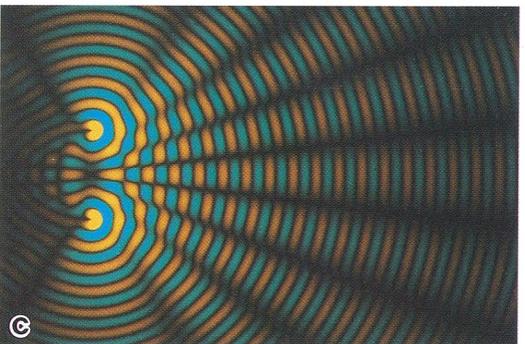
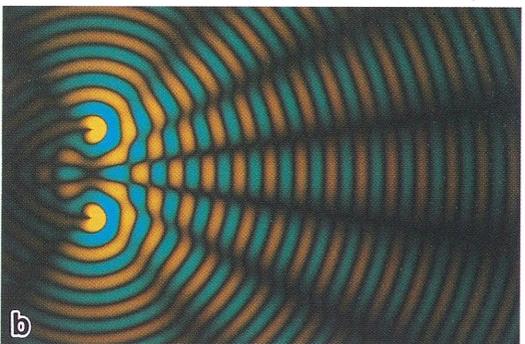
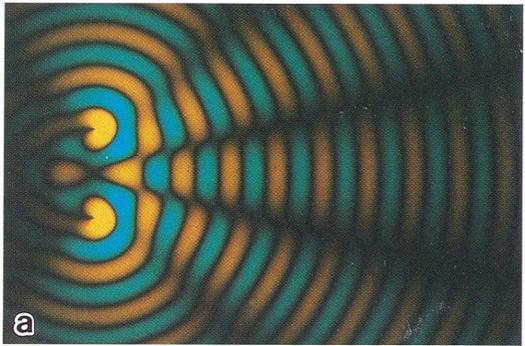
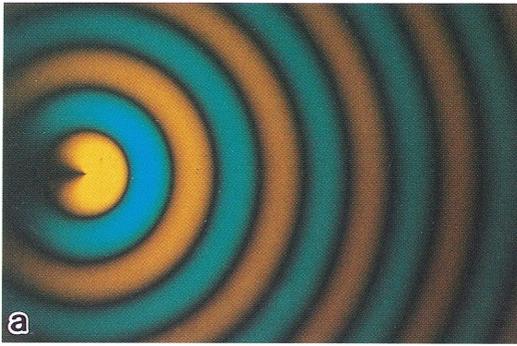


図2 二つの点光源による干渉

$$A_i=3000, d=100, \varphi_i=0$$

$$a: \lambda=50\left(\frac{d}{2}\right), b: \lambda=33\left(\frac{d}{3}\right), c: \lambda=25\left(\frac{d}{4}\right)$$

図1 素元波の時間的変化

$$A=7000, \lambda=100, \varphi=0$$

$$a: \omega t=0, b: \omega t=\frac{\pi}{4}, c: \omega t=\frac{\pi}{2}, d: \omega t=\frac{3}{4}\pi$$

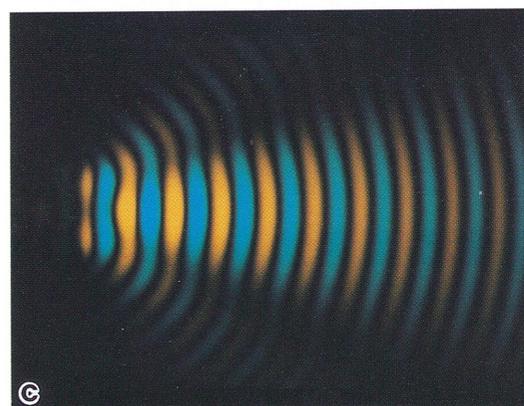
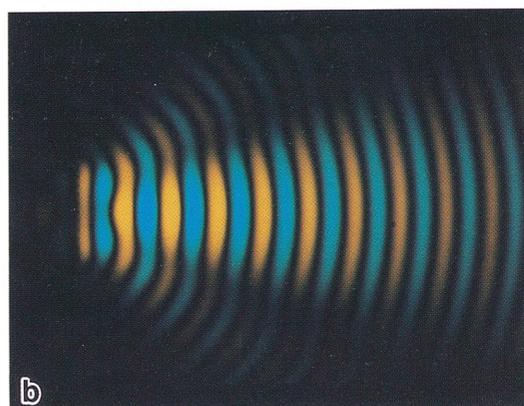
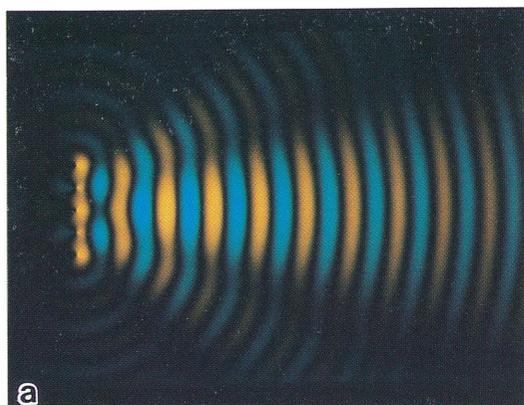


図3 素元波密度による回折波の変化

$d=100, \varphi_i=0, \lambda=50$
 a: $A_i=800, N=5$
 b: $A_i=200, N=11$
 c: $A_i=50, N=21$

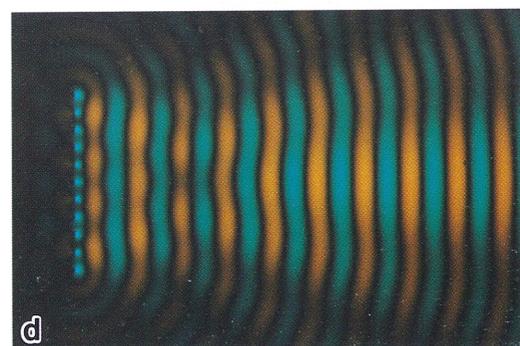
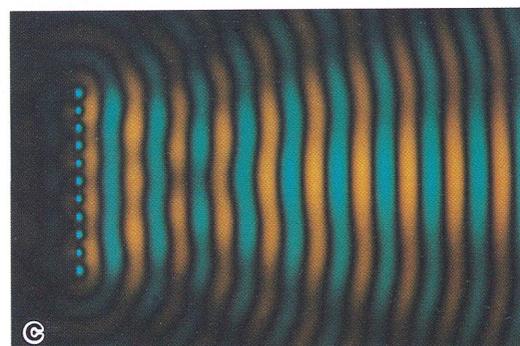
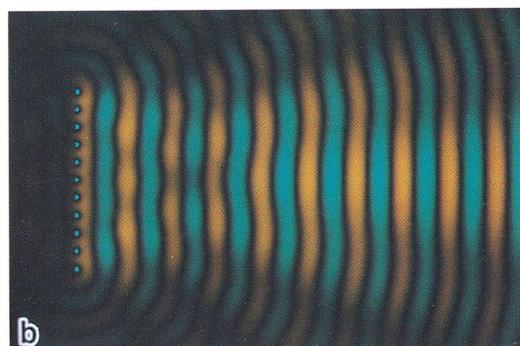
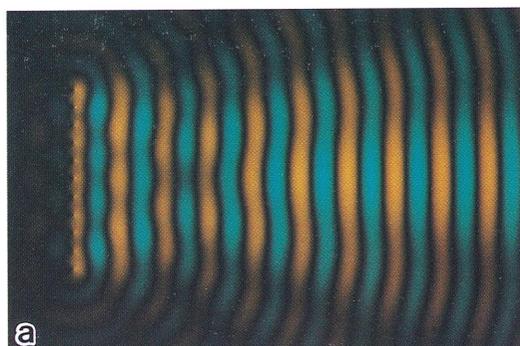


図4 回折波の時間的变化

$N=11, d=200, A_i=200, \lambda=50, \varphi_i=0$
 a: $\omega t=0, \quad b: \omega t=\frac{\pi}{4}, \quad c: \omega t=\frac{\pi}{2},$
 d: $\omega t=\frac{3}{4}\pi$

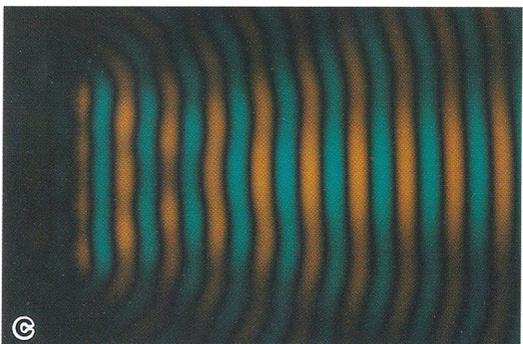
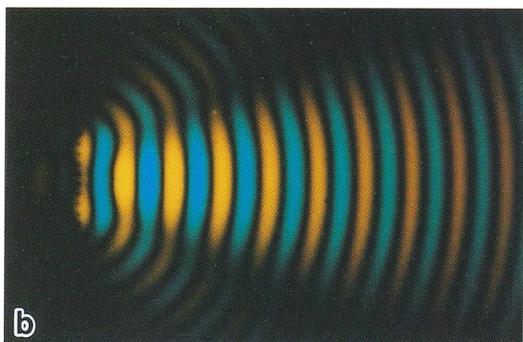


図5 スリットの大きさによる回折波の変化

$\lambda=50$, $\varphi_i=0$ で,

a: $d=50$, $N=5$, $A_i=800$, b: $d=100$, $N=10$, $A_i=200$

c: $d=200$, $N=20$, $A_i=50$, d: $d=400$, $A_i=50$



図6 反射波と屈折波

$d=200$, $N=10$, $\lambda=50$, $n=1.3333$

a: $\theta_{in}=45$ 度, $A_i=200$

b: $\theta_{in}=60$ 度, $A_i=250$

c: $\theta_{in}=75$ 度, $A_i=250$

aは振幅反射率, 振幅透過率を考慮していない。