

# 摩擦に関するクーロンの法則の問題点及び それを改良したモデルについて

～動摩擦係数が静止摩擦係数よりも大きい場合～

富塚明・松島晟\*・古賀雅夫\*・後藤信行

（1996年7月31日受理）

## On Some problems about Coulomb's Law on frictions and two models improving the Law

～in the case the coefficient of kinematic friction  
is larger than that of static one～

Akira TOMIZUKA, Akira MATSUSIMA, Masao KOGA and Nobuyuki GOTO

### abstract

Present authors showed the definition of kinematic frictional force  $\vec{F}_k = \mu \vec{N}$  is of no significance in some cases under the condition  $\mu' > \mu$  where  $\mu$  and  $\mu'$  are coefficients of static and kinematic friction, respectively. In this paper, the authors discuss the problem consisting in Coulomb's Law on frictions and propose two models improving the Law. Also the authors discuss the motion and show the problems are removed for each model.

### § 1 はじめに

アルミニウムどうしでは動摩擦係数  $\mu'$  が静止摩擦係数  $\mu$  より大きいことが知られている<sup>1,2)</sup>。著者らは球や円柱などの軸対称物体に初角速度  $\omega_0$  を与え、重心の初速度  $v_0 = 0$  で、傾角  $\theta$  の斜面上に静かに置いた場合のころがり運動を調べた。その結果  $\mu' > \mu$  のある条件では、これまでのクーロンの法則にしたがう限り、滑りがなくなった時刻以降で、動摩擦力の定義式  $\vec{F}_k = \mu \vec{N}$  は意味を持たなくなることが明らかとなった<sup>3)</sup>。本稿ではクーロンの法則のこの問題をさらに調べ、それを改良する2つのモデルを提案する。さらに  $\mu' > \mu$  を中心にしながら、そのモデルの下での運動を調べる。

### § 2 準備と運動方程式

座標系及び記号は図のように  $x$  軸を斜面に沿って上向きを正に取る。また球や円柱など軸対称物体の半径を  $a$ 、質量を  $M$  とし、重心の速度 ( $x$  成分) を  $v$ 、重心のまわりの回転の角速度を  $\omega$  (図のような回転の方向を正とする)、重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを  $I$  とする。そして面からは静止摩擦力  $\vec{F}_s = F_s \vec{i}$ 、または動摩擦力  $\vec{F}_k = F_k \vec{i}$  を受けるものとする。さらに面からの垂直抗力を  $\vec{N} = N \vec{j}$  とする。

\* 長崎大学教育学部物理学教室

さて球に静止摩擦力, または動摩擦力として  $\vec{F} = F \vec{i}$  がはたらくとき, 方程式系は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dv}{dt} &= F - Mg \sin \theta \\ 0 &= N - Mg \cos \theta \\ I \frac{d\omega}{dt} &= -aF \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

また, 球と斜面との接点の滑り速度を  $u$  ( $x$  成分) と動摩擦力は

$$\left. \begin{aligned} u &= v - a\omega \\ |\vec{F}_k| &= \mu' N = \mu' Mg \cos \theta, \quad F_k = \mu' N \left( \frac{-u}{|u|} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

で与えられる.

$F$  が静止摩擦力  $F_s$  の場合の解は

$$\left. \begin{aligned} v &= -\frac{Ma^2 g \sin \theta}{Ma^2 + I} t + v_0 \\ \omega &= -\frac{M a g \sin \theta}{Ma^2 + I} t + \omega_0 \\ F_s &= \frac{I M g \sin \theta}{Ma^2 + I} \\ N &= Mg \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

である. ただし,  $v_0, \omega_0$  は  $v, \omega$  の初期値である.

ここで動摩擦力の下での運動を, 滑りの速度  $u$  が負の場合と正の場合にわけて調べてみる.

$u < 0$  の場合には, 運動方程式は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \alpha_1, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{aF_k}{I}, \quad u = v - a\omega \\ \frac{du}{dt} &= \alpha_1 + \frac{F_k a^2}{I} \equiv \Omega_1, \quad F_k = \mu' Mg \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

ここで重心の加速度を  $\alpha_1 \equiv g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)$  とし, また滑りの加速度を

$$\Omega_1 \equiv \alpha_1 + \frac{F_k a^2}{I} = g \cos \theta \left\{ \mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) - \tan \theta \right\} \quad (2-5)$$

と定義する. (2-4) の解は

$$v = \alpha_1 t + v_0, \quad \omega = -\frac{aF_k}{I} t + \omega_0, \quad u = \Omega_1 t + u_0 = \Omega_1 t + v_0 - a\omega_0 \quad (2-6)$$

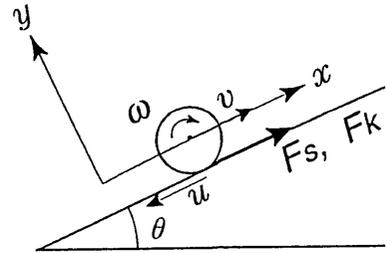
である. ただし  $t = 0$  での  $v$  の初期値は  $v_0 = 0$  であり,  $\omega, u$  の初期値をそれぞれ  $\omega_0, u_0$  としている.

このとき

$$\Omega_1 \leq 0 \text{ の条件は } \mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) \leq \tan \theta \quad (2-7)$$

$$\alpha_1 \leq 0 \text{ の条件は } \mu' \leq \tan \theta \quad (2-8)$$

となる.



静止摩擦力  $\vec{F}_s$  (または動摩擦力  $\vec{F}_k$ ) を受けて, 球が斜面を運動する場合の座標の取り方を示す. 斜面上向きを  $x$  軸の正方向に取り, また回転の正の方向は図に示すように取る.

また  $u = 0$  となる時刻を  $t_u$  とすると (2-5), (2-6) より

$$t_u = \frac{a\omega_0}{\Omega_1} = \frac{\omega_0}{F_k a/I + \alpha_1/a} = \frac{a\omega_0}{g\{\mu'(1+Ma^2/I)\cos\theta - \sin\theta\}} \quad (2-9)$$

であり,  $\omega = 0$  となる時刻を  $t_\omega$  とすると (2-4), (2-5) より

$$t_\omega = \frac{I\omega_0}{F_k a} = \frac{I\omega_0}{\mu'Mga \cos\theta} \quad (2-10)$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} \alpha_1 > 0 &\text{ならば } t_u < t_\omega \\ \alpha_1 = 0 &\text{ならば } t_u = t_\omega \\ \alpha_1 < 0 &\text{ならば } t_u > t_\omega \end{aligned} \quad (2-11)$$

である.

一方,  $u > 0$  の場合は (2-1), (2-2) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g(\mu' \cos\theta + \sin\theta) \equiv \alpha_2 \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{aF_k}{I}, \quad u = v - a\omega, \quad F_k = -\mu'Mg \cos\theta \\ \frac{du}{dt} &= \alpha_2 + a\frac{F_k a}{I} \equiv \Omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

となる. ここで,  $\alpha_2, \Omega_2$  は (2-12) で定義し, 常に  $\alpha_2 < 0$  であり, さらに

$$\Omega_2 \equiv \alpha_2 + \frac{F_k a^2}{I} = -\left\{g(\mu' \cos\theta + \sin\theta) + \frac{\mu'a^2 Mg \cos\theta}{I}\right\} < 0 \quad (2-13)$$

である.

また, (2-12) の解は

$$v = \alpha_2 t + v_{02}, \quad u = \Omega_2 t + u_{02}, \quad \omega = -\frac{F_k a}{I} t + \omega_{02} \quad (2-14)$$

となる. ただし  $v_{02}, u_{02}, \omega_{02}$  は  $t = 0$  における  $v, u, \omega$  の初期値である.

ここで  $u_{02} = 0$  とすれば,  $u = \Omega_2 t < 0$  となり, 滑りの速度成分の初期値が零の場合には  $u > 0$  と仮定したと矛盾するので,  $u > 0$  の場合は実際には起こり得ない.

### § 3 $\mu' > \mu$ の場合のクーロンの法則について

第一の問題はクーロンの法則

$$\mu \geq \frac{F_s}{N} \quad (3-1)$$

が  $\mu' > \mu$  の場合にはどうなるかである. ここで動摩擦力は, 面と面との接触した部分が互いに相対的にずれて動くときに, 一方の面から受ける力である. 動摩擦力の大きさは  $\mu'N$  であるから, 垂直抗力  $N$  によってその大きさは一義的に定まってしまう. それに対して, 静止摩擦力はその大きさは未知(数)である.

ここで物体の運動状態を①質点の運動または物体の重心のみの運動で, 回転の運動を伴わない場合と, ②球などのように物体の重心の運動とともに回転の運動も伴う場合に分けて考察する.

①の場合では, 特に物体(または質点)を斜面上に静止して置いた場合について調べる.

著者らは  $\mu' > \mu$  の場合で、 $\mu' \geq \tan \theta$  のときに動摩擦力がはたらくことに疑問を持っている。

さて、 $\mu > \mu'$  の場合は、物体は  $\tan \theta > \mu$  を満たす傾角  $\theta$  で滑り落ち始めるから、物体は斜面から動摩擦力を受ける。

$\mu' > \tan \theta > \mu$  の場合はどうであろうか。この角度では最大静止摩擦力の傾角  $\theta$  より大きいので、仮に動摩擦力がはたらくとして、(2-2) で  $u < 0$ 、つまり  $F = F_k = \mu' N = \mu' Mg \cos \theta$  とすれば、 $M \frac{dv}{dt} = Mg \cos \theta (\mu' - \tan \theta) > 0$  となる。すなわち、物体は動摩擦力によって静止した状態から、重力に逆らって斜面上方に向かって動き出すことになる。実際には、このようなことはあり得ず、斜面に静止したままである。そこで傾角  $\theta$  をさらに大きくして、 $\tan \theta > \mu'$  となると、物体は重力により斜面を滑り落ち始める。

したがって、 $\mu' > \mu$  の場合、

$$\mu' \geq \tan \theta = \frac{Mg \sin \theta}{Mg \cos \theta} = \frac{F}{N} \quad (3-2)$$

が成り立つ  $\theta$  では、物体は斜面に静止したままでいる。すなわち、(3-2) を満たす  $\theta$  では、斜面から受ける摩擦力は静止摩擦力である。

したがって②の場合には、(3-2) は、物体の静止の状態から、動き始める限界の  $\theta$  の式としての意味を持ち、 $\mu'$  が静止摩擦係数の意味も合わせ持つことになる。

次に④の場合を考える。

球と斜面との滑りは、滑りの速さの成分  $u = v - a\omega$  で示される。 $u = 0$  が成り立つ場合は滑りはなく、静止摩擦力の下での運動となる。そこで、ここでも球に重心の初速度も重心のまわりの初角速度も与えず斜面上に静かに置いた場合を考える。

(2-1) で  $F$  を静止摩擦力としても、動摩擦力としても、その解である (2-3) または (2-6) から、球は回転とともに重心の運動を始める。すなわち、②の場合と違って、球が運動を始める現象だけでは、摩擦力が静止摩擦力か動摩擦力かは判断できない。

いま、 $u$  も未知数であり、面からの摩擦力も静止摩擦力か動摩擦力かわからない。そこで仮に、動摩擦力がはたらくとして、滑りの速度成分が  $u < 0$ 、すなわち  $v < a\omega$  とすれば、重心の運動方程式 (2-1) から②と同じ結論が成り立つ。摩擦力によって重力に逆らって斜面上方に向かって動き出すことはないので  $u < 0$  はあり得ない。

ここで別の視点から運動を調べてみる。

まず、 $\mu' > \tan \theta$  の場合を考える。この場合は  $v = \alpha_1 t > 0$  であり、 $\omega = -\frac{\mu' a Mg \cos \theta}{I} t < 0$  であるから、 $u = v - a\omega > 0$  となる。しかしこの場合は、 $t = 0$  で  $u_0 = 0$  となるので § 2 の議論から同じ矛盾が生じ、 $u > 0$  もあり得ない。したがって  $\mu' > \tan \theta$  の場合には残るは  $u = 0$  のみである。すなわち、静止摩擦力の下での運動だけとなる。もちろんこの場合の方程式系の解は (2-3) を用いなければならないことは言うまでもない。

次に  $\tan \theta > \mu'$  の場合を調べてみる。仮に動摩擦力がはたらくとして  $u < 0$  とすれば、加速度  $\alpha_1 \equiv g \cos(\mu' - \tan \theta) < 0$  となり、(2-6) より、球は滑りながら斜面を転がり下っていく。したがってこの場合は、 $\mu > \mu'$  の場合の  $\tan \theta > \mu$  のときの運動に全て対応する。

以上のことから、球のように重心運動と重心のまわりの回転運動がともにあるような④の場合でも、また②の場合の結果からも、静止摩擦力のはたらく傾角  $\theta$  の範囲は

$$\mu' \geq \tan \theta = \frac{Mg \sin \theta}{Mg \cos \theta} = \frac{F_k}{N} \quad (3-3)$$

で与えられることになる。

そこで著者たちは、 $\mu' > \mu$  の場合について、これまでの静止摩擦力の限界を示すクーロンの法則及び、動摩擦力 ( $F_k = \mu'N$ ) の不備に対して次の2つのモデルを提案する。

**モデル1**は測定された $\mu$ に積極的な意味を持たせないモデルである。すなわちクーロンの法則に対応する式として、静止摩擦力がはたらく条件として、

$$\mu' \geq \frac{F_s}{N} \quad (3-4)$$

とする。したがって球状物体では(2-3)より、

$$\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) \geq \tan \theta \quad (3-5)$$

となる。このモデルは静止摩擦係数と動摩擦係数が一致するモデルである。

**モデル2**は測定された $\mu$ に意味を持たせたモデルである。すなわち静止摩擦力がはたらく領域を2つに分けて、 $\mu$ を第一静止摩擦係数、 $\mu'$ を第二静止摩擦係数として、さらに動摩擦係数も $\mu'$ と考えるモデルである。

第一静止摩擦力  $\vec{F}_{S1} = F_{S1} \vec{i}$  のはたらく領域は、

$$\mu \geq \frac{F_{S1}}{N} \quad (3-7)$$

とする。さらに第二静止摩擦力  $\vec{F}_{S2} = F_{S2} \vec{i}$  のはたらく領域は、

$$\mu' \geq \frac{F_{S2}}{N} > \mu \quad (3-7)$$

とする。また  $\mu'N \geq F_{S2} > \mu N \geq F_{S1}$  の関係が成り立つ。

したがって球状物体では、第一静止摩擦力のはたらく範囲は

$$\mu \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) \geq \tan \theta \quad (3-8)$$

となり、また第二静止摩擦力がはたらく範囲は

$$\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) \geq \tan \theta > \mu \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) \quad (3-9)$$

となる。

最後に、動摩擦力のはたらく領域は

$$\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) < \tan \theta \quad (3-10)$$

となる。

この第二のモデルでは、第二静止摩擦係数として測定した $\mu'$ と動摩擦係数の立場で測定した $\mu'$ がはたして一致するかが問題である。さらに、2つのモデルのどちらが適切かは実験で確かめる必要がある。

さて  $\mu > \mu'$  の場合には、これまで通りであり、クーロンの法則  $\mu \geq \frac{F_s}{N}$  から、球状物体では(2-3)より静止摩擦力  $\vec{F}_s$  がはたらく条件として

$$\mu \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) \geq \tan \theta \quad (3-11)$$

となる。

以下ではこの2つのモデルについて、簡単な運動で調べてみることにする。すなわち、球状物体を重心の初速度は与えずに、重心のまわりの初角速度  $\omega_0$  を与え、傾角  $\theta$  の斜面上に静かに置いた場合の運動である。

## § 4 モデル1の場合の運動とその検討

この項で著者らはモデル1、すなわち  $\mu' = \mu$  の場合について検討する。

初め、初期条件より滑りは  $u_0 = v_0 - a\omega_0 = -a\omega_0 < 0$  であるから、方程式系(2-4)を用いる。まず、(2-5)で定義される滑りの加速度  $\Omega_1$  の符号によって3つに分けて議論することにしよう。

### (i) $\Omega_1 = 0$ の場合

$u = \Omega_1 t - a\omega_0 < 0$  が常に成立しているので、動摩擦力は  $x$  の正方向にはたらく。逆にいえば、この場合は動摩擦力は球の斜面に対する滑りをさまたげる方向にはたらくにも拘わらず、滑りの大きさは絶えず増加する場合である。

$\Omega_1 < 0$  の条件は  $\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) < \tan \theta$  である。したがって当然、 $\mu' < \tan \theta$  であるから、(2-8)より  $\alpha_1 < 0$  となる。このとき(2-6)より  $v = \alpha_1 t < 0$ 、すなわち重心の位置は斜面を下がっていくことがわかる。また回転の角速度  $\omega$  は(2-10)より、時刻  $t_\omega$  で  $\omega = 0$  となり、回転は止まる。その後は  $\omega < 0$  なので今までは逆に回転を始める。すなわち重心は常に斜面を下りながら、回転は初めは斜面を登る方向に回転 ( $\omega > 0$ ) し、時刻  $t_\omega$  以降では負に回転 ( $\omega < 0$ ) する。 $\Omega_1 < 0$  の場合のこの結論は  $\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) < \tan \theta$  を満たすかぎり成り立つ。

### (ii) $\Omega_1 = 0$ の場合

この条件は  $\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) = \tan \theta$  である。すなわち  $\mu' < \mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) = \tan \theta$  であり、 $\alpha_1 < 0$  となる。この場合も(2-4)より  $u = -a\omega_0 < 0$  で動摩擦力は常に  $x$  の正の方向にはたらく。また  $v = \alpha_1 t < 0$  であり、(2-10)の時刻  $t_\omega$  で  $\omega = 0$  となる。 $\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) = \tan \theta$  が成り立つかぎり、定性的に(i)と同じ結論が得られる。

### (iii) $\Omega_1 > 0$ の場合

$\mu' = \mu$  であるから、この条件は(2-7)より、常に静止摩擦力が働く条件(3-5)を満足する。したがって  $u = 0$  以降では静止摩擦力の下での運動となる。

この場合はさらに重心の加速度  $\alpha_1$  の符号によって3つに分けて考える。

#### (A) $\alpha_1 > 0$ の場合

これに対する条件は

$$\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) > \mu' > \tan \theta \quad (4-1)$$

である。

つぎにその運動を調べる。  $v = \alpha_1 t > 0$  であり、(2-10) より時刻  $t_\omega$  で  $\omega = 0$  となる。また (2-9) より時刻  $t_u$  で  $u = 0$  となり、さらに (2-11) より  $t_u < t_\omega$  である。

したがって、まず初めは  $v > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $u < 0$  であるから、球は斜面から  $x$  の正方向に動摩擦係数を受けて正に回転しながら重心も斜面を登る。しかし、時刻  $t_u$  で  $u = 0$  となり、その後は静止摩擦係数の下での運動となる。

すなわち、 $t_u$  以降では  $t$  の代わりに  $t' = t - t_u$  で定義される  $t'$  を用いると

$$v_u \equiv v(t_u) = v(t' = 0) = \alpha_1 t_u > 0$$

であり、また

$$\omega_u \equiv \omega(t_u) = \omega(t' = 0)$$

とおけば  $u(t_u) = v_u - a\omega_u = 0$  であるから  $\omega_u = \frac{v_u}{a} > 0$  となる。したがって、球の運動は  $t' = 0$  で  $\omega_u > 0$ ,  $v_u > 0$ ,  $u_u = 0$  の初期条件の下で、静止摩擦係数を受けて斜面上を回転しながら登っていく運動となる。

図と同じ座標の取り方をして、 $t' \geq 0$  でも今までと同じ記号  $u$ ,  $\omega$ ,  $v$  を用いると、(2-6) より

$$v = -\frac{Ma^2 g \sin \theta}{Ma^2 + I} t' + v_u, \quad \omega = -\frac{Mg \sin \theta}{Ma^2 + I} t' + \omega_u, \quad F_s = \frac{IMg \sin \theta}{Ma^2 + I} \quad (4-2)$$

が得られる。

したがって、球はさらに時刻  $t'_\omega = \frac{\omega_u(Ma^2 + I)}{Mg \sin \theta} = t'_u$  まで登り、 $v = a\omega = 0$  となり、その後は球はやはり静止摩擦係数を受けながら単に転がりながら下る。

### (B) $\alpha_1 = 0$ の場合

この場合の条件は

$$\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) > \mu' = \tan \theta \quad (4-3)$$

であり、静止摩擦係数がはたらく条件 (3-5) を満足する。

(2-6) より  $v = 0$  なので、初めのうちは重心は斜面を止まったままであり、また  $t_u = t_\omega$  である。したがって球は斜面から  $x$  の正方向に動摩擦係数を受けながら斜面を登る方向に正に回転しているが、球の重心は斜面の一点に止まったままである。それから時刻  $t_u$  で  $v = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $u = 0$  となり、それ以降では静止摩擦係数の下での運動となる。すなわち斜面上に重心の速度も重心のまわりの回転運動も与えずに、静かに置いた場合の (2-3) にしたがった運動となる。

### (C) $\alpha_1 < 0$ の場合

この場合の条件は

$$\mu' \left( 1 + \frac{Ma^2}{I} \right) > \tan \theta > \mu' \quad (4-4)$$

となり、静止摩擦力がはたらく条件 (3-5) を満足する。この場合は、 $v = \alpha_1 t < 0$  であり、また  $t_u > t_\omega$  である。

したがって初めのうちは  $v < 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $u < 0$  であるので、球は斜面から  $x$  の正方向に動摩擦力を受けながら斜面を登ろうと正に回転しているが、球の重心は斜面を下がる。

次に時刻  $t_\omega$  で回転は止まり、 $t_\omega$  以降の時刻では  $v < 0$ ,  $\omega < 0$ ,  $u < 0$  となる。動摩擦力はやはり  $x$  の正方向にはたらく、球は負に回転を始めるが、重心は斜面を下がっていく。さらに時刻  $t_u$  では  $u = 0$  となり、それ以降では球は静止摩擦力の下での運動となる。ここでも、 $t' = t - t_u$  なる  $t'$  を用いると  $t' = 0$  での初期条件は

$$\left. \begin{aligned} v_u &\equiv v(t_u) = v(t' = 0) = \alpha_v t_u < 0 \\ \omega_u &\equiv \omega(t_u) = \omega(t' = 0) = \frac{v_u}{a} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

となる。すなわち、 $t_u$  以降では初期条件として重心に初速度  $v_u$  ( $< 0$ , 斜面を下る方向) と回転の初角速度  $\omega_u$  ( $< 0$ , 斜面を下る方向) を与え、(2-3) にしたがって転がり落ちる運動となる。

以上がモデル 1 に対する運動である。

## § 5 モデル 2 での運動とその検討

第一静止摩擦力  $\vec{F}_{S1}$  と第二静止摩擦力  $\vec{F}_{S2}$  の下での運動は (2-3) 式にしたがうが、 $\mu$  と  $\mu'$  (第二静止摩擦係数) が式 (2-1) または (2-3) に陽に現れていないので、いずれの場合も同じように議論できる。

$\mu' < \mu$  の場合については、これまでのクーロンの法則が成り立つとして取り扱えるので、ここでは議論しないことにする。

密度の均質な球や球殻、円盤、円柱、円輪など軸対称の物体では、その軸のまわりの慣性モーメント  $I$  に対して  $\frac{Ma^2}{I} \geq 1$  であるから  $\mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \geq 2\mu$  となる。密度分布が軸対称な物体では  $\mu' > 2\mu$  のデータはこれまでのところ得られていない。しかし、条件  $\mu' > \mu(1 + Ma^2/I)$  が成り立つ可能性はある。したがって、ここでは  $\mu' > \mu$  の場合について、さらに次の 2 つの場合に分けて議論する。

$$\mu' \leq \mu(1 + Ma^2/I) \quad (5-1)$$

$$\mu' > \mu(1 + Ma^2/I) \quad (5-2)$$

### (I) $\mu' \leq \mu(1 + Ma^2/I)$ の場合について

まず (2-5) で定義される  $\Omega_1$  の符号によってさらに次の (i), (ii), (iii) に分けて議論すること

にする。

(i)  $\Omega_1 < 0$  の場合

$u = \Omega_1 t - a\omega_0 < 0$  が常に成立しているので、条件 (3-10) には関係なく、動摩擦力は  $x$  の正方向にはたらく。しかし滑りの大きさは絶えず増加する場合である。

$\Omega_1 < 0$  の条件は  $\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) < \tan \theta$  である。したがって当然、 $\mu' < \tan \theta$  であるから、

(2-8) より  $\alpha_1 < 0$  となる。そこでこの場合、§ 4-(i) の結論がそのままあてはまる。

(ii)  $\Omega_1 = 0$  の場合

この条件は  $\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) = \tan \theta$  である。

すなわち  $\mu' < \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) < \mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) = \tan \theta$  であり、 $\alpha_1 < 0$  となる。この場合も

(2-6) より  $u = -a\omega_0 < 0$  で動摩擦力は常に  $x$  の正の方向にはたらく。したがって、定性的に § 4-(ii) と同じ結果が得られる。

(iii)  $\Omega_1 > 0$  の場合

この場合もさらに  $\alpha_1$  の符号によって次の (A), (B), (C) の場合に分ける。

(A)  $\alpha_1 > 0$  の場合

これに対する条件は

$$\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \tan \theta$$

である。

さて  $\mu' > \mu$  の条件では①  $\mu' > \mu \geq \tan \theta$  と②  $\mu' > \tan \theta > \mu$  の2つの場合が考えられる。

① では  $\mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu \geq \tan \theta$  である。次に②の場合は、(5-1) より

$$\mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \tan \theta > \mu \text{ となる。}$$

①および②のいずれも条件 (3-8) を満たすので  $u = 0$  以降では第一静止摩擦の下での運動となる。(2-6) より  $v = \alpha_1 t > 0$  であり、また  $t_u < t_\omega$  となるので、 $\omega = 0$  になる前に  $u = 0$  となる。この場合の運動は第一静止摩擦の下での運動であるが、基本的に § 4-(iii)-(A) の定性的な結論がそのままあてはまる。

(B)  $\alpha_1 = 0$  の場合

$\mu' > \mu$  の場合には

$$\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' = \tan \theta$$

である。さらに  $\mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \mu$  の条件を用いると結局、

$$\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' = \tan \theta > \mu$$

となる。したがって第一静止摩擦力がはたらく条件 (3-8) を満足する。

この場合の運動は、(2-6) より  $v = 0$  なので、初めのうちは重心はそのまま斜面を止まっている。そして時刻  $t_u = t_\omega$  で  $u = v = a\omega = 0$  となり、重心のまわりの回転もなくなる。したがって、時刻  $t_u$  以降では第一静止摩擦力の下で、(2-3) 式にしたがって斜面をころがり落ちて行く。すなわち静止摩擦力の名称を除けば、基本的には § 4-(iii)-(B) の運動と同じである。

### (C) $\alpha_1 < 0$ の場合

$\mu' > \mu$  の場合には  $\mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \mu$  であるから次の 2 つの場合が考えられる。

$$\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \tan \theta > \mu' \quad (5-3)$$

$$\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \tan \theta > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' \quad (5-4)$$

(5-3) の場合は第一静止摩擦力がはたらく条件 (3-8) を満足する。この場合  $v = \alpha_1 t < 0$  であり、また  $t_u > t_\omega$  である。つまり  $u = 0$  になる前に、時刻  $t_\omega$  で  $\omega = 0$  となり、回転が止まる。 $t_\omega$  以降では重心のまわりの回転方向が反対になる。さらに時刻  $t_u$  以降では第一静止摩擦力の下の運動となり、重心の初速度と重心のまわりの初角速度を与えた場合の、(2-3) 式にしたがった運動となる。

つぎに、(5-4) の場合を考える。(5-4) は (3-9) を満足するので、 $u = 0$  の時刻  $t_u$  までは (5-3) の場合の議論と同じであるが、 $t_u$  以降では第二静止摩擦力の下の運動となる。すなわち第二静止摩擦力を受けて重心の初速度および重心のまわりの初角速度を与えた場合の、(2-3) にしたがった運動となる。

### (II) $\mu' > \mu(1 + Ma^2/I)$ の場合について

次に  $\mu' > \mu(1 + Ma^2/I)$  の場合について調べる。この場合は常に  $\mu' > \mu$  である。これまでと同様、 $\Omega_1$  の符号で (i), (ii), (iii) の場合に分ける。(i)  $\Omega_1 < 0$  の場合と (ii)  $\Omega_1 = 0$  の場合は、 $\Omega_1 < 0$  または  $\Omega_1 = 0$  であることと (3-9) を考慮すると、第二静止摩擦力の領域であり、したがって摩擦力の名称を除けば § 4 の (i), (ii) の定性的な結論がそのままあてはまる。そこで (iii)  $\Omega_1 > 0$  の場合を検討する。この場合も  $\alpha_1$  の符号によって次の (D), (E), (F) の場合に分けて議論する。

(D)  $\alpha_1 > 0$  の場合

このとき  $\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' > \tan \theta$  である。そこで ①  $\mu' > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \geq \tan \theta$ ,

②  $\mu' > \tan \theta > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)$  の 2 つの場合を考えてみる。

①の場合は条件 (3-8) を満足するから、第一静止摩擦力の下での運動となる。したがって、時刻  $t_u$  以降では摩擦力の名称は異なるが、§ 4-(iii)-(A) の結論がそのままあてはまる。

②の場合は条件 (3-9) を満足するから第二静止摩擦力の下での運動となる。 $t_u < t_w$  であるので回転が止まる前に、時刻  $t_u$  で滑りが止まる。この場合も § 4-(iii)-(A) の結論がそのままあてはまる。ただし  $t_u$  以降は第二静止摩擦力を受けた運動となる。

 (E)  $\alpha_1 = 0$  の場合

このとき  $\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \mu' = \tan \theta$  であるから、(5-2) より  $\mu' = \tan \theta > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)$  となる。この場合も条件 (3-9) を満足するので  $t_u$  以降は第二静止摩擦力での運動となる。時刻  $t_u = t_w$  で  $u = v = a\omega = 0$  となるから回転も滑りも止まる。したがって静止摩擦力の名称は異なるが、§ 4-(iii)-(B) の定性的な結論がそのままあてはまる。

 (F)  $\alpha_1 < 0$  の場合

この場合は  $\mu' \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) > \tan \theta > \mu'$  であり、さらに  $\tan \theta > \mu' > \mu \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)$  となる。

この場合も  $t_u < t_w$  であるから、回転が止まる前に、時刻  $t_u$  で滑りが止まり、 $t_u$  以降では(3-9)より第二静止摩擦力の下での運動となる。すなわち、静止摩擦力の名称は異なるが、基本的には § 4-(iii)-(C) のように運動する。

以上がモデル 2 に対する運動である。したがってモデル 1 においてモデル 2 においても、著者らが指摘した運動摩擦力の問題点は解決している。

## § 6 まとめ

動摩擦係数  $\mu'$  が静止摩擦係数  $\mu$  より大きい場合、クーロンの法則  $\mu \geq F_S/N$  に問題点が生ずる。これを改良するために 2 つのモデルを提案した。

モデル 1 は、クーロンの法則として  $\mu' \geq F_S/N$  とする。このモデルは静止摩擦係数と動摩擦係数が一致したモデルである。したがって実測の静止摩擦係数  $\mu$  の意味があいまいになる。

モデル 2 は、静止摩擦力がはたらく領域を 2 つに分け、第一静止摩擦力  $\vec{F}_{S1}$  の領域を  $\mu \geq F_{S1}/N$  とし、第二静止摩擦  $\vec{F}_{S2}$  の領域を  $\mu' \geq F_{S2}/N > \mu$  とした。この場合は第二静止摩

擦係数が動摩擦係数と一致するモデルである。

さらに著者たちは、これらのモデルに対して、球が斜面を転がり落ちる場合の簡単な運動について調べた。その結果、指摘された運動摩擦力の問題点は解決している。

#### 【参 考 文 献】

- 1) American Institute of Physics Handobook (3rd edition), McGraw-Hill Book Company, 1972
- 2) 原島鮮：「力学」p.161 裳華房
- 3) 富塚明・松島晟・古賀雅夫・後藤信行：軸対称物体の回転運動と動摩擦力の問題点，長崎大学教養部紀要合併号 第37巻第1号 p.279～291, 1996
- 4) 河野彰夫：トライボロジーの新しい展開，日本物理学会誌，第43巻第8号，p.579～585, 1988
- 5) 松川宏：摩擦の物理の最近の発展，日本物理学会誌，第51巻第8号，p.584～589, 1996
- 6) 小出昭一郎・兵藤申一・阿部龍蔵：「物理概論（上）」p.9～11 裳華房
- 7) 園田久：「初等力学」p.148～151 広川書店
- 8) 山内恭彦・末岡清一：「大学演習力学」p.226～227 裳華房
- 9) 有馬朗人編：「基礎物理学」p.22～23 学術図書出版
- 10) 河野彰夫：「摩擦の科学」裳華房