

変断面任意形アーチの幾何学的非線形性解析

GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS OF NONUNIFORM
ARCHES OF ANY SHAPE

崎 山 毅*

By Takeshi SAKIYAMA

1. 序 言

本論文は、変断面任意形アーチの幾何学的非線形問題の一解析法として、増分形基礎微分方程式の離散的一般解に基づく直接的かつ半解析的な計算手法を提示し、アーチの分岐座屈、偏平アーチの飛び移り座屈、初期不整を有するアーチの有限変形などの諸問題解析への応用性について検討し、また、座屈前の幾何学的非線形性を考慮した、各種軸線形状を有するアーチの面内分岐座屈解析を行ったものである。

アーチを含む平面骨組構造物の大変形解析法に関しては、すでに数多くの研究が行われている。これらは、Newton-Raphson 法などを用いた反復計算により、非線形方程式を解析する直接解法、微小荷重を前提とした線形計算の積み重ね手法に基礎をおく荷重増分法および両者を併用した混合法に、概略、分類される。

直接解法に属するものとして、Huddleston⁹⁾ は、shooting method により、非線形連立微分方程式を初期値問題的に、直接、数値解析し、アーチクラウンに集中荷重を受ける円弧アーチの幾何学的非線形性を解析した。

増分法に基づく解析法としては、数値解析段階における計算機演算時間の短縮化を企図した解析法が提示されている。前田ら⁸⁾ は、各増分段階における反復計算回数の減少により計算時間の短縮を可能ならしめる推定増分法を提案し、また、後藤ら³⁾ は、棒部材の解析解から導かれた部材剛性方程式を用いる接線剛性法により、演算時間の節約と数値解の高精度化をはかっている。これらの二法は直線部材からなる平面骨組に対する解析法であるが、折線状の直棒要素集合体への置換を前提として、アーチの大変形解析への応用性についての検討が行われている。

さらに、Walker⁴⁾、Dawe⁵⁾、篠崎⁶⁾ および Zienkiewicz ら⁷⁾ は、曲線要素を用いたマトリックス変位法に基づく、アーチの大変形解析法を提示し、要素分割数の減少による計算時間の節約を可能ならしめた。

また、棒状構造物に関して、堀井ら¹⁾ は、数値解析の実用性の観点から、直接解法と増分法との得失について詳細な検討を行い、西野ら²⁾ は、棒理論の仮定の範囲内で幾何学的非線形性を厳密に考慮して、弾性棒の有限変位に関する微分方程式を誘導し、有限変位理論について考察を加えている。

リブアーチ橋などのアーチ部材軸線は、放物線、カテナリーあるいはサイクロイドなどの非円弧形状となることが多いが、従来の諸研究においては、主として、円弧アーチに関して、飛び移り座屈や分岐座屈などの幾何学的非線形問題が解析されており、非円弧アーチについては、ほとんど解析が行われていない。わずかに、アーチクラウンに鉛直集中荷重を受ける放物線アーチに関する Huddleston¹⁰⁾ の解析や拱矢比が 0.03 程度以下の偏平な放物線アーチおよび正弦曲線アーチに関する Dawe⁵⁾ の解析が見受けられる程度であり、アーチ橋などにおける通常の拱矢比を有する非円弧アーチの幾何学的非線形性に関する数値的データの集積はまだ不十分であるといえよう。

また、骨組構造物に用いられるアーチ部材は、合理的設計の要求から、変断面部材となることが多い。区分的に一定の断面を有する階段状変断面アーチに関しては、面内座屈および 2 次の応力問題に対する波田ら¹¹⁾ の伝達マトリックス法に基づく解析法が提案されている。この方法によれば、連続的に変化する断面を有するアーチを近似的に解析することも可能であるが、より直接的な、任意の連続的変断面アーチを原形のまま解析しうる解法は、著者の知る限り、見当たらない。

本研究は、長大アーチ橋などにおける変断面任意形アーチの有限変形解析法として、力のつり合い条件におけ

* 正会員 長崎大学助教授 工学部構造工学科。

る非線形性を考慮し、微小ひずみの前提のもとに、各増分段階における応力ひずみ関係および断面力変位関係においては線形関係を用いて導かれた増分形基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく直接的かつ半解析的な解析法を提示し、種々の軸線形状を有するアーチや変断面アーチについて、対称性を有する場合および初期変位が存在する場合の有限変形、分岐座屈、飛び移り座屈などの幾何学的非線形問題解析への応用性を検討したものである。

本解析法によれば、アーチ軸等分点あるいは水平射影軸等分点における、曲率半径、アーチ軸接線傾斜角、断面2次モーメント、断面積などの幾何学的諸量や荷重強度などを用いて、変断面任意形アーチは直接的に解析され、直棒要素集合体や一定曲率曲棒要素集合体あるいは階段状変断面アーチなどの置換系へのモデル化を要しない。

2. 増分形基礎微分方程式

アーチの変形状態における力の平衡条件式に基づいて、増分理論による有限変形解析における、変断面任意形アーチの基礎微分方程式が誘導される。

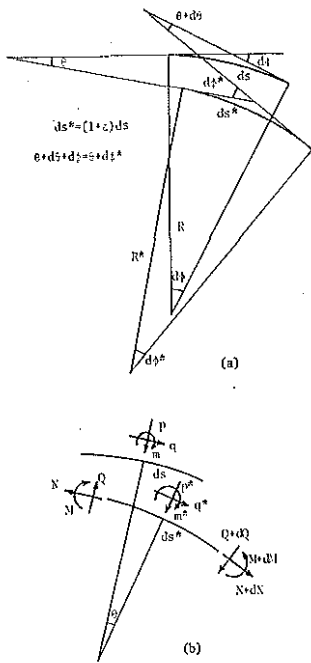


Fig. 1 Arch Element

Fig. 1 に示すごとく、変形前アーチにおける部材(図心)軸座標を s 、曲率半径を $R(s)$ とし、変形前アーチの法線および接線方向の分布荷重強度を $p(s)$ および $q(s)$ 、分布モーメント荷重強度を $m(s)$ とする。また、アーチ部材任意断面のせん断力、軸力および曲げモーメントを Q 、 N および M とし、アーチ軸任意点の接線回転角および軸方向ひずみを θ および ϵ とすれば、アーチ橋に作用する死荷重や大部分の活荷重などのように、アーチの変形後も荷重方向が変化しない、いわゆる重力に基づく荷重の作用を受ける、任意形アーチの有限変形状態における平衡条件は次の3式にて与えられる。

い、いわゆる重力に基づく荷重の作用を受ける、任意形アーチの有限変形状態における平衡条件は次の3式にて与えられる。

$$\frac{dQ}{ds} + \left(1 + R \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{N}{R} + p \cos \theta - q \sin \theta = 0 \quad \dots\dots\dots(1 \cdot a)$$

$$\frac{dN}{ds} - \left(1 + R \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{Q}{R} + p \sin \theta + q \cos \theta = 0 \quad \dots\dots\dots(1 \cdot b)$$

$$\frac{dM}{ds} - (1 + \epsilon)Q - m = 0 \quad \dots\dots\dots(1 \cdot c)$$

また、変形前後のアーチ軸曲率半径 R, R^* 間の関係式は、Fig. 1 に基づいて導かれ、次式となる。

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{(1 + \epsilon)} \left(\frac{1}{R} + \frac{d\theta}{ds} \right) \quad \dots\dots\dots(2)$$

有限変形平衡方程式 (1・a)~(1・c) を応用することにより、荷重増分 $\Delta p, \Delta q, \Delta m$ に対する断面力増分 $\Delta Q, \Delta N, \Delta M$ を規定する微分方程式として、増分形の平衡方程式が求められ、次の3式となる。

$$\frac{d\Delta Q}{ds} + \frac{\Delta N}{R} + N \frac{d\Delta\theta}{ds} - q\Delta\theta + \Delta p + \Delta p_c = 0 \quad \dots\dots\dots(3 \cdot a)$$

$$\frac{d\Delta N}{ds} - \frac{\Delta Q}{R} - Q \frac{d\Delta\theta}{ds} + p\Delta\theta + \Delta q + \Delta q_c = 0 \quad \dots\dots\dots(3 \cdot b)$$

$$\frac{d\Delta M}{ds} - \Delta Q - Q\Delta\epsilon - \Delta m - \Delta m_c = 0 \quad \dots\dots\dots(3 \cdot c)$$

ここに、 Q および N は、初期荷重 p, q, m による初期断面力であり、 $\Delta\theta$ は接線回転角 θ の増分である。また、式 (3・a)~(3・c) の最終項 $\Delta p_c, \Delta q_c$ および Δm_c は不平衡力の項である。不平衡力 $\Delta p_c, \Delta q_c, \Delta m_c$ は次の各式にて与えられる。

$$\Delta p_c = \Delta N \frac{d\Delta\theta}{ds} - \Delta q \Delta\theta + (p + \Delta p) (\cos \Delta\theta - 1) - (q + \Delta q) (\sin \Delta\theta - \Delta\theta) \quad \dots\dots\dots(4 \cdot a)$$

$$\Delta q_c = -\Delta Q \frac{d\Delta\theta}{ds} + \Delta p \Delta\theta + (p + \Delta p) (\sin \Delta\theta - \Delta\theta) + (q + \Delta q) (\cos \Delta\theta - 1) \quad \dots\dots\dots(4 \cdot b)$$

$$\Delta m_c = \Delta Q \Delta\epsilon \quad \dots\dots\dots(4 \cdot c)$$

また、断面力増分 $\Delta Q, \Delta N, \Delta M$ と変位増分 $\Delta\theta, \Delta w, \Delta u$ 、軸方向ひずみ増分 $\Delta\epsilon$ との間には、次の関係が成立する。

$$\Delta M = -EI(s) \frac{d\Delta\theta}{ds} \quad \dots\dots\dots(5 \cdot a)$$

$$\Delta N = EA(s) \Delta\epsilon = EA(s) \left[\frac{d\Delta w}{ds} - \frac{\Delta u}{R(s)} \right] \quad \dots\dots\dots(5 \cdot b)$$

$$\Delta Q = \frac{GA(s)}{\kappa} \left[\frac{d\Delta u}{ds} + \frac{\Delta w}{R(s)} - \Delta\theta \right] \quad \dots\dots\dots(5 \cdot c)$$

ここに、 $E, G, \kappa, I(s)$ および $A(s)$ は、それぞれ、弾性定数、せん断弾性定数、せん断係数、断面2次モーメントおよび断面積である。また、 Δw および Δu は、それぞれ、接線方向変位 w および法線方向変位 u の増

分である。なお、変位 $du, d\omega, d\theta$ の正方向は、Fig. 1 (b) に示す荷重 p, q, m の正方向と、それぞれ同じとする。

導かれた増分形基礎微分方程式 (3・a)~(3・c), (5・a)~(5・c) を用いて、変断面任意形アーチの有限変形が、修正荷重増分手法に基づいて解析される。

3. 基礎微分方程式の離散的な一般解

変断面任意形アーチの基礎微分方程式 (3・a)~(3・c), (5・a)~(5・c) は、アーチ部材の曲率半径 $R(s)$, 接線傾斜角 $\varphi(s)$, 断面2次モーメント $I(s)$, 断面積 $A(s)$, 初期荷重 $p(s), q(s)$ あるいは初期断面力 $Q(s), N(s)$ などの諸変数を係数とする連立微分方程式である。アーチ部材の幾何学的形状や荷重形態などに任意性を保持したまま、その一般解を解析的に求めることはほとんど不可能であると判断されるゆえ、本文においては、数値解析の簡易化¹²⁾ を目的として、① 正規型基礎微分方程式の積分方程式への変換と、② 積分方程式の近似解法的应用とにより、アーチ軸 m 等分点における解を求めることとし、積分定数を含む、離散点におけるこれらの半解析的な一般解を離散的な一般解と称することとする。

アーチ軸長、アーチ支間、基準曲げ剛性および基準伸び剛性を、それぞれ、 l, L, EI_0 および EA_0 として、

$$\begin{aligned} dQ^* &= -\frac{L^2}{EI_0} dQ, & dN^* &= -\frac{L^2}{EI_0} dN, \\ dM^* &= -\frac{L}{EI_0} dM, & d\omega^* &= \frac{1}{L} d\omega, \\ du^* &= \frac{1}{L} du, & \eta &= \frac{1}{L} \cdot s \end{aligned}$$

なる無次元量 $dQ^*, dN^*, dM^*, d\omega^*, du^*$ および無次元座標 η を導入する。ここで、簡単のために、 dQ^*, dN^*, \dots, du^* を、改めて、 dQ, dN, \dots, du と記すことにすれば、基礎微分方程式 (3・a)~(3・c), (5・a)~(5・c) は次のごとく無次元表示される。

$$\frac{d dQ}{d\eta} = \nu \left\{ -\frac{L}{R(\eta)} \cdot dN - \frac{EI_0}{EI(\eta)} N(\eta) \cdot dM - k^2 \frac{q(\eta)}{dP_0} \cdot d\theta + k^2 \frac{[dP(\eta) + dP_c(\eta)]}{dP_0} \right\} \dots\dots\dots(6 \cdot a)$$

$$\frac{d dN}{d\eta} = \nu \left\{ \frac{L}{R(\eta)} \cdot dQ + \frac{EI_0}{EI(\eta)} Q(\eta) \cdot dM + k^2 \frac{p(\eta)}{dP_0} \cdot d\theta + k^2 \frac{[dq(\eta) + dq_c(\eta)]}{dP_0} \right\} \dots\dots\dots(6 \cdot b)$$

$$\frac{d dM}{d\eta} = \nu \left\{ dQ - \frac{1}{a^2} \frac{EA_0}{EA(\eta)} Q(\eta) \cdot dN - K^2 \frac{[dm(\eta) + dm_c(\eta)]}{dm_0} \right\} \dots\dots\dots(6 \cdot c)$$

$$\frac{d d\theta}{d\eta} = \nu \frac{EI_0}{EI(\eta)} \cdot dM \dots\dots\dots(6 \cdot d)$$

$$\frac{d d\omega}{d\eta} = \nu \left\{ \frac{L}{R(\eta)} \cdot du - \frac{1}{a^2} \frac{EA_0}{EA(\eta)} \cdot dN \right\} \dots\dots\dots(6 \cdot e)$$

$$\frac{d du}{d\eta} = \nu \left\{ -\frac{L}{R(\eta)} \cdot d\omega + d\theta - \frac{1}{\mu a^2} \frac{EA_0}{EA(\eta)} \cdot dQ \right\} \dots\dots\dots(6 \cdot f)$$

ここに、 dP_0 および dm_0 は基準の増分荷重強度および増分モーメント荷重強度である。また、

$$k^2 = \frac{dP_0 L^3}{EI_0}, \quad K^2 = \frac{dm_0 L^2}{EI_0}, \quad a^2 = \frac{A_0 L^2}{I_0},$$

$$\nu = \frac{l}{L}, \quad \mu = \frac{G}{\kappa E}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_c(\eta)}{dP_0} &= -\frac{1}{k^2} \frac{EI_0}{EI(\eta)} dN dM - \frac{dq(\eta)}{dP_0} d\theta \\ &\quad + \frac{[p(\eta) + dP(\eta)]}{dP_0} (\cos d\theta - 1) \\ &\quad - \frac{[q(\eta) + dq(\eta)]}{dP_0} (\sin d\theta - d\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_c(\eta)}{dP_0} &= \frac{1}{k^2} \frac{EI_0}{EI(\eta)} dQ dM + \frac{dP(\eta)}{dP_0} d\theta \\ &\quad + \frac{[p(\eta) + dP(\eta)]}{dP_0} (\sin d\theta - d\theta) \\ &\quad + \frac{[q(\eta) + dq(\eta)]}{dP_0} (\cos d\theta - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{dm_c(\eta)}{dm_0} = \frac{1}{K^2 a^2} \frac{EA_0}{EA(\eta)} dQ dN$$

である。本論文においては、断面積 A_0 , 断面2次モーメント I_0 および支間長 L によって表わされる無次元量 $a = \sqrt{A_0 L^2 / I_0}$ をアーチ部材の細長比と称することとする。なお、過去において建設されたアーチ橋に関して、細長比 a の値はほぼ 100 から 320 の間にあるとの調査結果が文献 13) に示されている。

アーチ部材軸座標 η の原点を部材左端にとり、正規形の基礎微分方程式 (6・a)~(6・f) を、変域 $[0, \eta]$ で積分して、積分方程式に変換する。次に、Fig. 2 に示すごとく、全変域 $[0, 1]$ を任意に m 等分して、左側等分点より順に、0, 1, 2, ..., i , ..., m なる番号を付け任意点 i における諸量に添字 i を付与することとすれば、積分方程式に等間隔の数値積分法を繰り返して適用することにより、アーチ軸上の離散点 i における半解析的な一般解が求められ、次の各式となる。

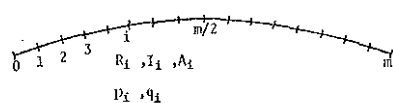


Fig. 2 Discrete Points along Arch Axis

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta N_i \\ \Delta M_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta w_i \\ \Delta u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & a_{4i} & a_{5i} & a_{6i} & a_{7i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & b_{4i} & b_{5i} & b_{6i} & b_{7i} \\ c_{1i} & c_{2i} & c_{3i} & c_{4i} & c_{5i} & c_{6i} & c_{7i} \\ d_{1i} & d_{2i} & d_{3i} & d_{4i} & d_{5i} & d_{6i} & d_{7i} \\ e_{1i} & e_{2i} & e_{3i} & e_{4i} & e_{5i} & e_{6i} & e_{7i} \\ f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & f_{4i} & f_{5i} & f_{6i} & f_{7i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta N_0 \\ \Delta M_0 \\ \Delta \theta_0 \\ \Delta w_0 \\ \Delta u_0 \end{bmatrix} \dots \begin{matrix} (7 \cdot a) \\ (7 \cdot f) \end{matrix}$$

任意点 i における諸量 $\Delta Q_i, \dots, \Delta u_i$ を左支点における諸量 $\Delta Q_0, \dots, \Delta u_0$ に関係づける要素 a_{ki}, \dots, f_{ki} は次の各式にて与えられる。

$$a_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \{ -\tau_j \cdot b_{kj} - \bar{I}_j N_j \cdot c_{kj} - k^2 \bar{q}_j \cdot d_{kj} + \delta_{kj} \cdot k^2 (\Delta \bar{p}_j + \Delta \bar{p}_{cj}) \}$$

$$b_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \{ \tau_j \cdot a_{kj} + \bar{I}_j Q_j \cdot c_{kj} + k^2 \bar{p}_j \cdot d_{kj} + \delta_{kj} \cdot k^2 (\Delta \bar{q}_j + \Delta \bar{q}_{cj}) \}$$

$$c_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \{ a_{kj} - \bar{A}_j Q_j / a^2 \cdot b_{kj} - \delta_{kj} \cdot K^2 (\Delta \bar{m}_j + \Delta \bar{m}_{cj}) \}$$

$$d_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \bar{I}_j \cdot c_{kj}$$

$$e_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \{ \tau_j \cdot f_{kj} - \bar{A}_j / a^2 \cdot b_{kj} \}$$

$$f_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \{ -\tau_j \cdot e_{kj} + d_{kj} - \bar{A}_j / \mu a^2 \cdot a_{kj} \}$$

$\delta_{ij} = 1 (i=j)$ or $0 (i \neq j)$: クロネッカーのデルタ

$$\tau_j = L / R_j, \quad \bar{I}_j = EI_0 / EI_j, \quad \bar{A}_j = EA_0 / EA_j,$$

$$\bar{p}_j = p_j / \Delta p_0, \quad \bar{q}_j = q_j / \Delta q_0, \quad \Delta \bar{p}_j = \Delta p_j / \Delta p_0,$$

$$\Delta \bar{q}_j = \Delta q_j / \Delta q_0, \quad \beta_{ij} = \alpha_{ij} / 24m, \quad m : \text{等分数}$$

β_{ij} は数値積分法における重み係数で、Simpson の多分割公式を用いた場合の α_{ij} -値は Table 1 に示すとおりである。

次に、Fig. 3 に示すとき、集中荷重、Deck Load、Rib Load および複合荷重に関する荷重強度関数は、接線傾斜角を $\varphi(\eta)$ として、次の各式にて与えられる。なお、本論文においては、水平軸およびアーチ軸に沿って等分布する荷重をそれぞれ、Deck Load および Rib Load と称することとする。

Table 1 Weight Coefficient α_{ij}

i	j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	..
1	12	12								
2	8	32	8							
3	9	27	27	9						
4	8	32	16	32	8					
5	9	27	27	17	32	8				
6	8	32	16	32	16	32	8			
7	9	27	27	17	32	16	32	8		
8	8	32	16	32	16	32	16	32	8	
:										

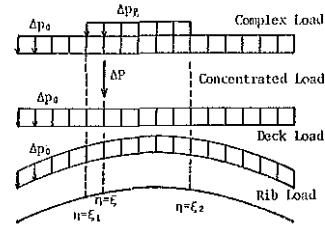


Fig. 3 External Loads

(1) 集中荷重 ΔP

$$\frac{\Delta p(\eta)}{\Delta p_0} = \frac{\Delta P}{\Delta p_0 L} \frac{\cos \varphi}{\nu} \cdot \delta(\eta - \xi),$$

$$\frac{\Delta q(\eta)}{\Delta p_0} = -\frac{\Delta P}{\Delta p_0 L} \frac{\sin \varphi}{\nu} \cdot \delta(\eta - \xi)$$

$\delta(\eta - \xi)$: Dirac のデルタ関数

(2) Deck Load Δp_0

$$\frac{\Delta p(\eta)}{\Delta p_0} = \cos^2 \varphi, \quad \frac{\Delta q(\eta)}{\Delta p_0} = -\sin \varphi \cos \varphi$$

(3) Rib Load Δp_0

$$\frac{\Delta p(\eta)}{\Delta p_0} = \cos \varphi, \quad \frac{\Delta q(\eta)}{\Delta p_0} = -\sin \varphi$$

(4) 複合荷重 $\Delta p_0, \Delta p_l$

$$\frac{\Delta p(\eta)}{\Delta p_0} = \left\{ 1 + \frac{\Delta p_l}{\Delta p_0} [u(\eta - \xi_1) - u(\eta - \xi_2)] \right\} \cos^2 \varphi$$

$$\frac{\Delta q(\eta)}{\Delta p_0} = -\left\{ 1 + \frac{\Delta p_l}{\Delta p_0} [u(\eta - \xi_1) - u(\eta - \xi_2)] \right\} \sin \varphi \cos \varphi$$

$u(\eta - \xi_i)$: 単位階段関数

導かれた半解析的な離散的一般解 (7・a)~(7・f) を用いて、変断面任意形アーチは、直棒要素集合体、一定曲率要素集合体あるいは階段状変断面アーチなどの置換系にモデル化することなしに、部材軸等分点における、曲率半径、断面積あるいは断面 2 次モーメントなどの幾何学的諸量、初期荷重強度および初期断面力を用いて、直接的に解析される。

次に、離散的一般解 (7・a)~(7・f) を用いた、アーチの有限変形解析手順について付記する。一般解 (7・a)~(7・f) は、アーチ軸上の離散点に関する半解析的な解であるが、これを用いたアーチの解析は、通常の解析解が得られた場合とまったく同様に行われる。2 ヒンジアーチを例にとれば、左支点 0 における境界条件は、 $\Delta M_0 = \Delta w_0 = \Delta u_0 = 0$ であるゆえ、右支点の境界条件 $\Delta M_m = \Delta w_m = \Delta u_m = 0$ より、積分定数 $\Delta Q_0, \Delta N_0, \Delta \theta_0$ を決定する次の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} c_{1m} & c_{2m} & c_{4m} \\ e_{1m} & e_{2m} & e_{4m} \\ f_{1m} & f_{2m} & f_{4m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta N_0 \\ \Delta \theta_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{7m} \\ e_{7m} \\ f_{7m} \end{bmatrix}$$

積分定数が決定されれば、式 (7・a)~(7・f) より、各等分点における諸量が求められる。この計算を第1増分段階から順次行って、アーチの有限変形が解析される。

また、各増分段階における積分定数に関する連立方程式の係数行列式は、ステップの進行に伴って値が変化し、荷重がある値に達したときに零となる。この行列式の値を零ならしめる荷重が座屈荷重となることは周知のとおりである。

なお、アーチ軸座標 η に対して、水平軸座標を z とすれば、両者の間には、アーチ軸接線傾斜角 φ を介して、 $d\zeta = \nu \cos \varphi \cdot d\eta$ なる関係が存在する。この関係式を用いて、基礎微分方程式 (6・a)~(6・f) を書き換えれば、上記と同様にして、水平軸 m 等分点における離散的な一般解が求められる。

アーチ軸線形状に応じて、アーチ軸座標系と水平軸座標系とを使い分けることにより、解析の能率化をはかることができる。たとえば、円弧アーチの場合にはアーチ軸座標系を、また、放物線アーチの場合には水平軸座標系を選択することにより、曲率半径や接線傾斜角などの入力データの作成をより簡略に行うことができる。

4. 数値解析

(1) 既往研究結果との比較

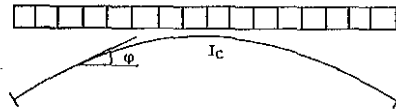
本論文における直接的かつ半解析的な計算手法の有効性の検証を目的として、変断面放物線アーチの面内座屈問題を解析し、従来の解析法との比較を行う。

Hilman および Dischinger²⁰⁾ は断面2次モーメントが $I = I_c \cos \varphi$ (Table 2 の付図参照) のように変化する2ヒンジおよび固定の放物線アーチに関して、鉛直等分布荷重 (Deck Load) が作用する場合の座屈荷重を解析的に求めている。また波田ら¹¹⁾ は、同一問題に関して、原変断面放物線アーチを50~100分割し、各部分において一定の曲率および断面2次モーメントを有する置換系にモデル化し、伝達マトリックス法を用いて座屈荷重を求めている。これらの結果と本法による結果をTable 2に示す。本法における数値解は、与えられた変断面アーチを置換系などにモデル化することなしに、原形のまま直接的に解析して得られたもので、アーチ軸の16~20等分点における曲率半径、接線傾斜角および断面2次モーメントなどの少量の入力データを用いて、十分収束した解が得られた。本解析値は従来の結果と良好に一致しており、これらのことから、アーチを原形のまま直接的に解析する本法の、少ない入力データで高精

Table 2 Buckling Coefficients $H_{cr}L^2/EI_c$ of Parabolic Arch with Variable Cross Section

(a) Two Hinged Arch						
	f/L	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Analytical Solution	Dischinger	37.2	31.6	25.1	19.4	15.0
	Hilman	37.2	31.6	25.1	19.4	15.0
Approximate Solution	Namita et al. (50~100 elements)	36.9	30.8	24.0	18.3	—
	Author (16~20 elements)	37.4	31.7	25.2	19.5	15.1

(b) Fixed Arch						
	f/L	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Analytical Solution	Dischinger	78.4	70.8	61.1	51.1	41.8
	Hilman	78.2	71.0	61.3	51.1	41.9
Approximate Solution	Namita et al. (50~100 elements)	77.7	69.6	69.1	48.6	—
	Author (16~20 elements)	78.4	71.3	61.4	51.2	42.1



度の解が得られる有効性をうかがうことができるものと思われる。

次に、アーチの有限変形解析に関する、本理論値と既往の理論値および実験値との比較のために、集中荷重または Deck Load を受ける2ヒンジアーチおよび固定ア

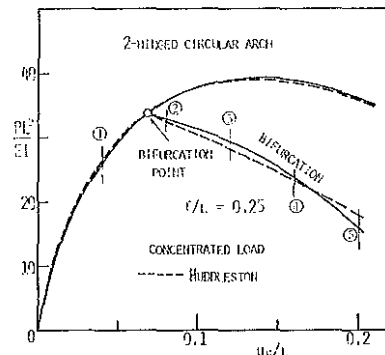


Fig. 4 (a) 2-hinged Circular Arch: Central Load-Deflection

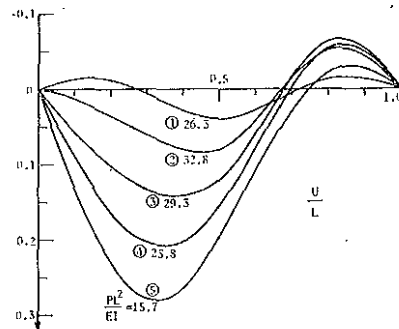


Fig. 4 (b) 2-hinged Circular Arch: Normal Displacement

一チの荷重変位曲線およびアーチ軸の法線方向変位の变化を, Fig. 4(a), (b), Fig. 5(a), (b) および Fig. 6 に示す. 荷重変位曲線における変位量としては, アーチクラウンの無次元法線方向変位 u_c/L を用いる.

Fig. 4(a) は, アーチクラウンに鉛直集中荷重 P を受ける, 拱矢比 $f/L=0.25$ なる, 2ヒンジ円弧アーチの荷重変位曲線である. 実線は本理論値, 点線は Huddleston¹⁾ の理論値である. また, Fig. 4(b) は, Fig. 4(a) の変形径路上の ①, ②, …, ⑤ の各点に対応する, アーチ軸の法線方向変位を表わしている. 本アーチにおいては, 分岐点に至るまで, Fig. 4(b) の ① に示すごとく対称変形が進行し, 集中荷重の大きさが $PL^2/EI=33.8$ に達して, 分岐が生じる. 分岐後, アーチには Fig. 4(b) の ②~⑤ に示すごとく非対称形の変形が進行する. なお, Fig. 4(a) には, 対称変形を前提とした, 分岐点以降の変形径路が併記されている.

Fig. 5(a) は, アーチクラウンに鉛直集中荷重 P を受ける, 細長比 $a=629$, 拱矢比 $f/L=0.032$ なる, Slender かつ偏平な固定円弧アーチの荷重変位曲線である. 実線は本理論値, 点線は Conway ら¹⁴⁾ の理論値, 黒丸は Gjelsvik ら¹⁵⁾ の実験値である. 同図にはアーチクラウンの無次元軸力 $N_c L^2/EI$ と変位 u_c/L との関係が併記されている. 本例は典型的な飛び移り座屈の荷重

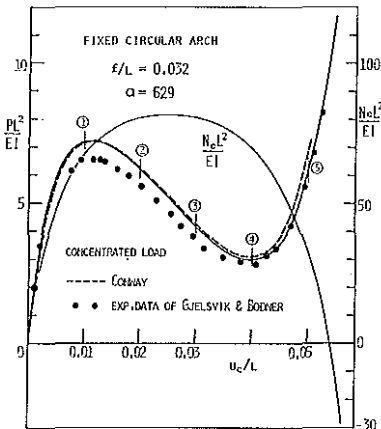


Fig. 5 (a) Fixed Shallow Arch: Central Load-Deflection

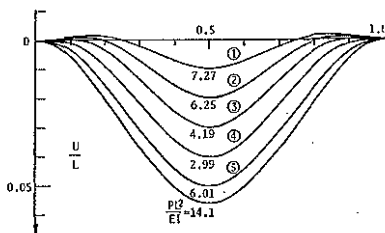


Fig. 5 (b) Fixed Shallow Arch: Normal Displacement

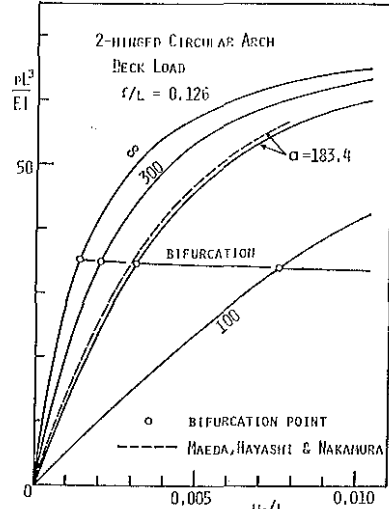


Fig. 6 2-hinged Circular Arch: Deck Load-Deflection

変位曲線で, 集中荷重の大きさが $PL^2/EI=7.20$ なる極値に達したときに飛び移り座屈が生じることを示している. 変形の進行とともに, アーチクラウンの軸力は, 圧縮力の増加, 停留, 下降の変化をたどる. 飛び移り座屈直後もアーチクラウンの軸力は圧縮力であるが, さらに変形が進行すれば軸力は圧縮力から引張力へと変化する. その間のアーチの法線方向変位は, Fig. 5(b) の ①, ②, …⑤ に示すごとく対称形である.

Fig. 6 は, Deck Load を受ける, 拱矢比 $f/L=0.126$, 細長比 $a=100, 183.4, 300, \infty$ なる 2ヒンジ円弧アーチの荷重変位曲線である. 実線は本理論値, 点線は前田²⁾ の理論値である. 集中荷重を受けるアーチにおいては, 主として曲げ変形が生じ, アーチ軸の伸縮変形はほとんど発生しないため, 細長比 a の値は荷重変位曲線にさほどの影響を与えない. これに対して Deck Load などの分布荷重を受けるアーチは, 軸圧縮状態に近い状態となるため, その変形に対してアーチ軸の伸縮性が大きな影響を与えることになり, Fig. 6 に示すごとく, 細長比 a の値によって荷重変位曲線が大きく変化する. なお, 本例における細長比 $a=100, 183.4, 300, \infty$ の各場合の分岐座屈荷重はそれぞれ, $PL^2/EI=33.8, 34.7, 34.9, 35.1$ である.

Fig. 4(a), 5(a) および 6 より明らかごとく, 円弧アーチの大変形に関する既往の理論値および実験値と本理論値とは良好な一致を示しており, これらのことから, 本解析法の実用性を知ることができよう.

(2) 初期変位を有するアーチの有限変形

極端な 偏平アーチを除けば, 拱矢比 $f/L=0.1\sim 0.5$ の範囲の対称形アーチの対称荷重による面内弾性座屈は

非対称形の分岐座屈である。このようなアーチの弾性安定性に対して、アーチ部材の幾何学的形状に関する初期不整が影響を及ぼし、非対称変形の誘発により弾性安定限界荷重を低下せしめることが知られている^{19,20}。初期変形その他の初期不整の大きさや分布は、本来、ランダムに生じるものと考えられる。したがって、アーチの弾性安定性に及ぼす初期不整の影響は確率統計的立場から解析されるべきであるが、ここでは、初期不整を有するアーチの有限変形解析における本解析法の応用性の検討を目的として、不整量を確定量として取り扱うこと

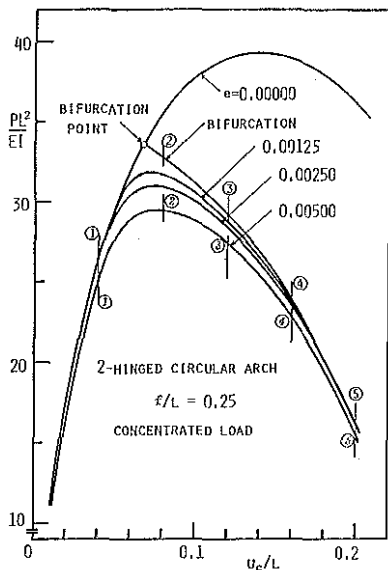


Fig. 7 (a) Load-Deflection Relation of a Circular Arch with Initial Imperfection

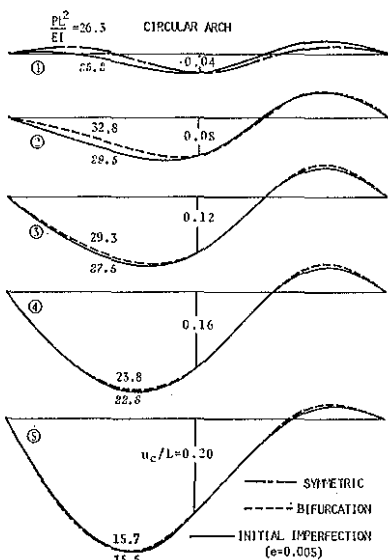


Fig. 7 (b) 2-hinged Circular Arch: Normal Displacement

として、集中荷重および Deck Load を受ける 2 ヒンジアーチの有限変形解析を行い、弾性安定性に及ぼす初期変位の影響を検討する。初期変位として、円弧アーチに関しては、 $u/L = e \cdot \sin 2\pi\eta$ 、放物線アーチに関しては、 $u/L = e \cdot \sin 2\pi\xi$ なる逆対称形の法線方向変位を仮定する。ここに、 e は初期変位の最大値とアーチ支間の比であり、無次元座標 η および ξ は、それぞれ、アーチ左端を原点とする、アーチ軸座標および水平軸座標である。

Fig. 7(a) は、アーチクラウンに鉛直集中荷重 P を受ける、拱矢比 $f/L=0.25$ 、細長比 $a \rightarrow \infty$ なる円弧アーチの荷重変位曲線である。初期変位が存在しない場合の分岐座屈荷重は $PL^2/EI=33.8$ であり、 $e=0.00125, 0.0025, 0.005$ の初期変位が存在する場合の弾性安定限界荷重は、それぞれ、 $PL^2/EI=31.9, 31.0, 29.5$ であり、仮定した初期変位により、弾性安定限界荷重は約 6%, 8%, 13% 程度低下する。

Fig. 7(b) に、 $e=0, 0.005$ の場合の荷重変位曲線上の ①, ②, ..., ⑤ の各点に対応する。法線方向変位 u/L を示す。本図では、変形の進行に伴って、初期変位が存在する場合と存在しない場合の法線方向変位は同一形状に近づくことが示されている。このことは、集中荷重による曲げ変形の増大に伴い、曲げ変形に対する初期変位の割合が相対的に減少し、増大した曲げ変形に微小な初期変位が吸収されるかたちになるためであると考えられる。

Fig. 8(a) は、Deck Load を受ける、 $f/L=0.1, 0.2, a=200$ の放物線アーチに関する荷重変位曲線である。Deck Load を受ける、初期変位のない放物線アー

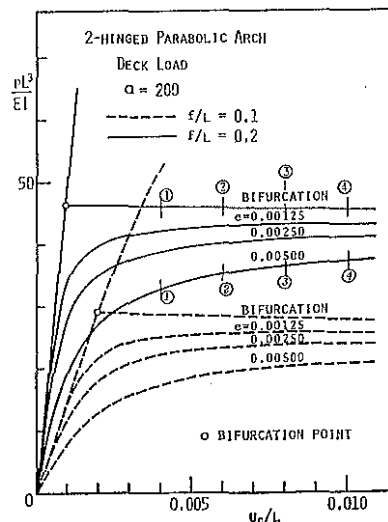


Fig. 8 (a) Load-Deflection Relation of a Parabolic Arch with Initial Imperfection

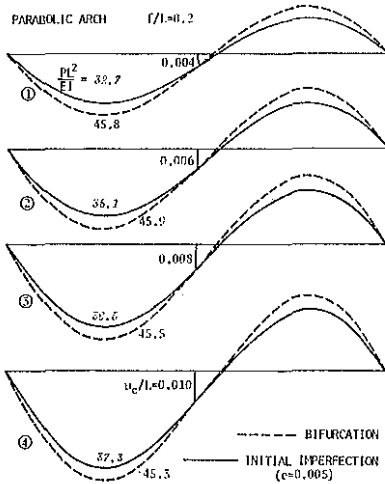


Fig. 8 (b) 2-hinged Parabolic Arch : Normal Displacement

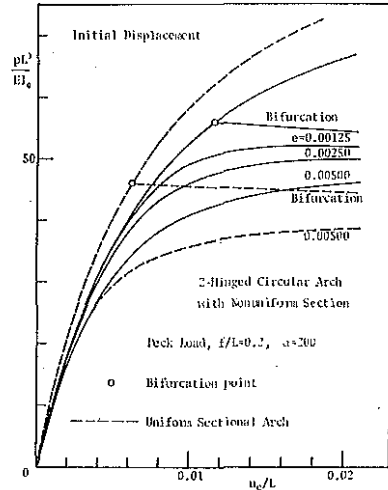


Fig. 9 Load-Deflection Relation of a Nonprismatic Arch

チはほぼ完全な軸圧縮状態となるが、初期変位が存在する場合には、載荷開始時より曲げが生じ、変形径路は、直線的な分岐径路に漸近する。

Fig. 8(b) は、Fig. 8(a) の変形径路上の①～④の各点に対応する、アーチ軸の法線方向変位である。Deck Load による軸圧縮状態に近い状態においては、集中荷重の場合に比べて、曲げ変形がきわめて小さいため、初期変位の影響が後まで残り、初期変位がない場合とある場合の法線方向変位は同一化しない。

弾性安定性を高める目的などから、2ヒンジアーチの部材軸 1/4 点および 3/4 点付近の断面は、一般に、他断面に比べて補強されることが多い。このような変断面アーチの一例として、幅 b_0 、高さ h_0 の矩形一様断面をもつアーチと同一容積および同一幅を有し、高さが、 $h(\eta) = h_0(1 - 0.2 \cos 4\pi\eta)$ で変化する円弧アーチの荷重変位曲線を Fig. 9 に示す。なお、点線は一様断面アーチの荷重変位曲線である。これによれば、アーチ軸の 1/4 点および 3/4 点付近の断面を大きくすることによって、2ヒンジアーチの初期変位による弾性安定限界荷重の低下を、ある程度、防ぐことができることがわかる。

(3) 各種アーチの分岐座屈荷重

本解析法の応用として対称構造を有する各種軸線形状のアーチについて、座屈前の幾何学的非線形性を考慮した分岐座屈荷重の算定を行った。

これらの結果を Fig. 10(a)～16 に示す。なお、本項においては、分岐座屈前の荷重変位関係における非線形性と分岐座屈荷重のみに注目し、座屈後の分岐径路の追跡を省略した。したがって、Fig. 10(a)～12(b)においては、対称変形径路と分岐点のみが示されており、分岐径路は省略されている。

Fig. 10(a) は、アーチクラウンに鉛直集中荷重 P を受ける、 $f/L=0.2$ 、 $a=200$ の放物線、カタナリー、円およびサイクロイドの各軸線形状を有する 2 ヒンジアーチに関する、分岐点付近までの荷重変位曲線である。各アーチにおいて、分岐座屈前の荷重変位関係に顕著な非線形性が認められる。非線形性は、放物線、カタナリー、円、サイクロイドの各アーチの順で増大し、これに伴って、逆に、座屈荷重は、わずかずつながら、低下している。Fig. 10(b) は、 $f/L=0.1\sim 0.5$ の放物線アーチの荷重変位曲線である。分岐座屈前の非線形性は $f/L=0.3$ のとき最も小さく、0.4, 0.2, 0.5, 0.1 の順で増大している。また、非線形性の増大に伴う座屈荷重の低

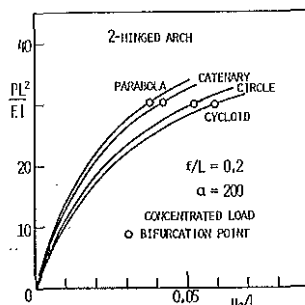


Fig. 10 (a) 2-hinged Arch : Central Load-Deflection

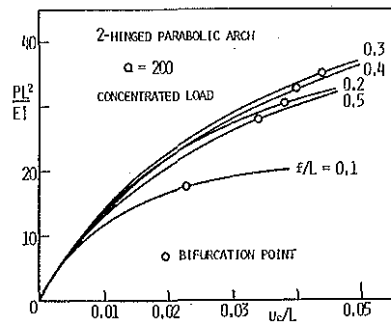


Fig. 10 (b) 2-hinged Parabolic Arch : Central Load-Deflection

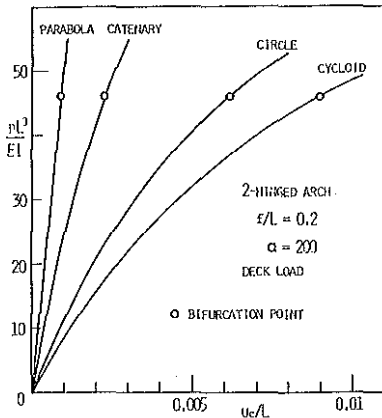


Fig. 11 (a) 2-hinged Arch : Deck Load-Deflection

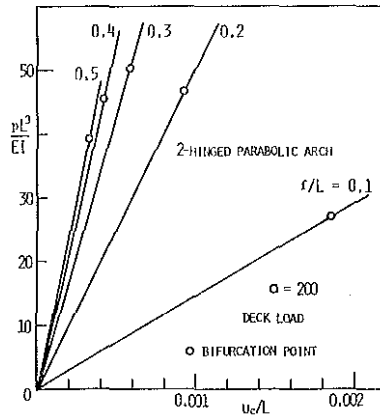


Fig. 11 (b) 2-hinged Parabolic Arch : Deck Load-Deflection

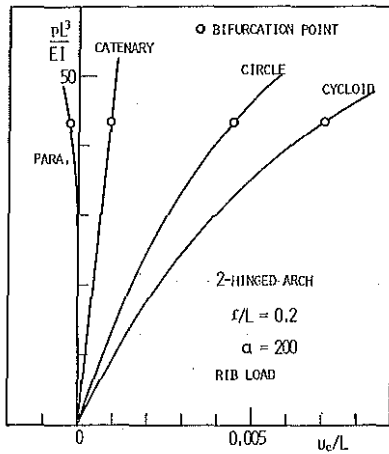


Fig. 12 (a) 2-hinged Arch : Rib Load-Deflection

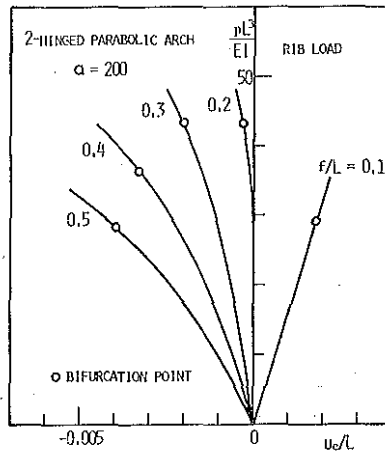


Fig. 12 (b) 2-hinged Parabolic Arch : Rib Load-Deflection

下が認められる。

Fig. 11(a) は、Deck Load を受ける、 $f/L=0.2$, $a=200$ の放物線、カテナリー、円およびサイクロイド形の各アーチの荷重変位曲線である。また、Fig. 11(b) は、 $f/L=0.1\sim 0.5$ の放物線アーチの荷重変位曲線である。Deck Load 作用下の放物線アーチの荷重変位関係は直線的であり、非線形性はほとんど認められず、いわゆる軸圧縮状態の特性が明確に表われている。

Fig. 12(a) は、Rib Load を受ける各アーチの荷重変位曲線、Fig. 12(b) は放物線アーチの荷重変位曲線である。Rib Load 作用下において、カテナリーアーチは軸圧縮状態となるため、Deck Load に対する放物線アーチと同様、荷重変位関係は直線的で、非線形性はほとんど認められない。また、Rib Load の作用下において、 $f/L=0.2\sim 0.5$ の放物線アーチのクラウン鉛直変位は負の値となっている。このことは、偏平でない放物線アーチにおいては、Rib Load によってアーチ中央部

が上方に浮き上がった状態から非対称形の分岐座屈が生じることを示している。

Fig. 13(a)~(c) は、それぞれ、アーチクラウン鉛直集中荷重、Deck Load、Rib Load を受ける、 $f/L=0.1\sim 0.5$ の放物線、カテナリー、円およびサイクロイド形の2ヒンジアーチおよび固定アーチに関する、分岐座屈荷重曲線である。黒丸印は、同心軸の非圧縮性を仮定した Elastica 理論による Austin¹⁹⁾ の解析値である。後述のごとく、細長比 a の値が 150 程度以上になれば、分岐座屈荷重 PL^3/EI , pL^3/EI は細長比の値に無関係に、ほぼ一定値をとるようになるため、 $a=200$ の本理論値と $a\rightarrow\infty$ の Austin の理論値とはほとんど一致する。なお、分岐座屈直前の対称変形状態における曲げの程度を知るめやすとして、曲げモーメントによるひずみエネルギーの全ひずみエネルギーに対する比率を図中に併記した。軸力および曲げモーメントによるひずみ

エネルギーに対して、 $G/\kappa E=0.26$ (矩形断面鋼アーチ) として算定したせん断力によるひずみエネルギーは十分小さな値であった。図中に記入した数字は上から順に、放物線、カテナリー、円およびサイクロイド形の各アーチに対する値である。

これらの各アーチにおいて、放物線アーチの分岐座屈荷重が最も高く、カテナリー、円、サイクロイドの順で座屈荷重が低下している。

Fig. 14 は、集中荷重、Deck Load、Rib Load を受ける2ヒンジアーチと Deck Load、Rib Load を受ける固定アーチの分岐座屈限界水平反力曲線である。固定アーチに関する実験値¹⁹⁾と本理論値の良好な一致が認められる。

Fig. 15 は、Deck Load を受ける $f/L=0.1, 0.2$ の2ヒンジ放物線アーチにおける分岐座屈荷重 pL^3/EI および分岐座屈限界水平反力 HL^3/EI と細長比 a との関係を表わす。細長比 $a > 150$ なる範囲においては、

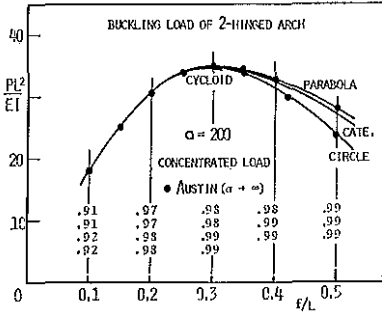


Fig. 13 (a) Bifurcation Buckling Load of 2-hinged Arch : Concentrated Load

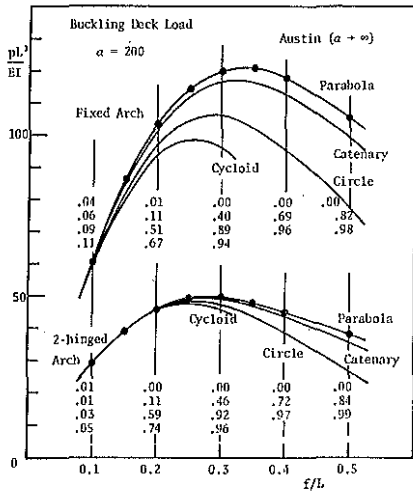


Fig. 13 (b) Bifurcation Buckling Load of 2-hinged and Fixed Arches : Deck Load

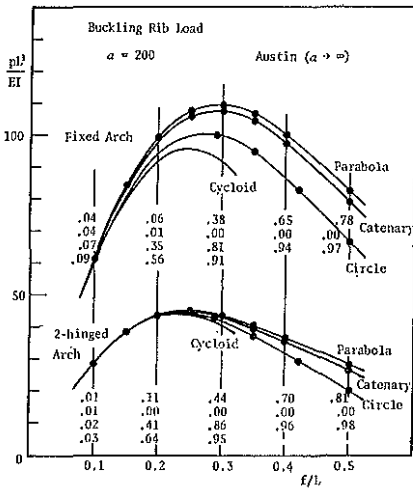


Fig. 13 (c) Bifurcation Buckling Load of 2-hinged and Fixed Arches: Rib Load

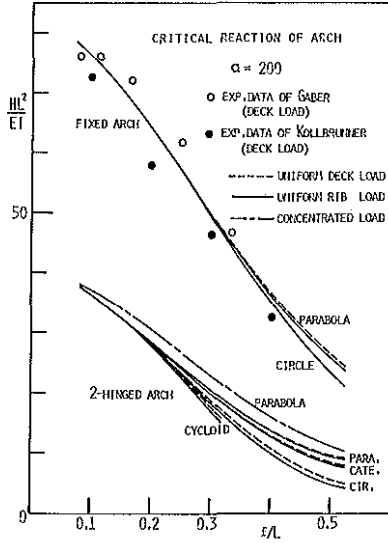


Fig. 14 Critical Horizontal Thrust of 2-hinged and Fixed Arches

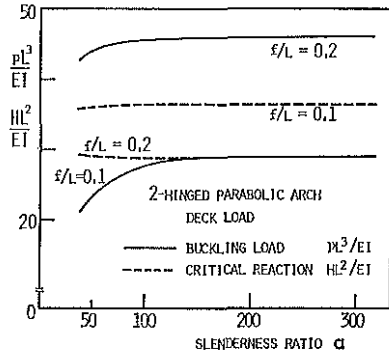


Fig. 15 2-hinged Parabolic Arch : Buckling Load and Critical Horizontal Thrust Slenderness Ratio

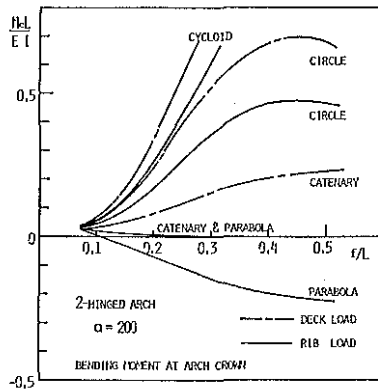


Fig. 16 Critical Bending Moment of 2-hinged Arch

固有値 pL^3/EI および HL^2/EI は細長比 a の値に無関係に、ほぼ一定値となっている。

Fig. 16 は、Deck Load および Rib Load を受ける 2 ヒンジアーチに関する、分岐座屈直前の対称変形状態における、アーチクラウンの曲げモーメントと拱矢比の関係を表わす。円弧アーチやサイクロイドアーチなどにおいては、分岐座屈前の曲げモーメントが相当の大きさに達することが認められる。

Fig. 17(a), (b) は、等分布荷重 p および 部分分布荷重 p_i からなる、Deck Load Type の複合対称荷重を受ける 2 ヒンジ放物線アーチの分岐座屈荷重と荷重比 p_i/p との関係を表わす。点線は幾何学的非線形性を無視して解析された座屈荷重曲線である。荷重比 p_i/p の増加に伴い、幾何学的非線形性の影響が増大することが示されている。すなわち、Deck Load を受ける放物線アーチ、Rib Load を受けるカテナリーアーチあるいは半径方向等分布荷重を受ける円弧アーチなどにおいては、ほぼ完全な軸圧縮状態が形成され、幾何学的非線形

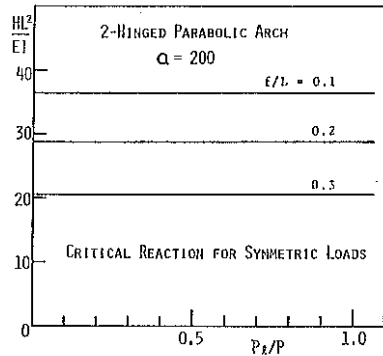


Fig. 18 Critical Reaction of 2-hinged Parabolic Arch: Combined Load

性はほとんど無視し得る状態となるため、線形座屈理論による座屈荷重解析が可能であるが、軸力のほかに、大きな曲げを引き起こす荷重を受けるアーチの座屈荷重は、幾何学的非線形性を考慮した有限変形理論などによって解析されなければならないことが確認される。

Fig. 18 は、Fig. 17 (a), (b) の複合荷重を受ける 2 ヒンジ放物線アーチの分岐座屈限界水平反力 HL^2/EI と荷重比 p_i/p との関係を表わす。荷重比 p_i/p および 部分分布荷重位置のいかんにかかわらず、水平反力が一定値に達したときに分岐座屈することが示されている。

5. 結 語

変断面任意形アーチの幾何学的非線形問題の一解析法として、有限変形理論から導かれた増分形基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく直接的かつ半解析的な計算手法を提示し、放物線、カテナリー、円およびサイクロイド形の軸線を有する、一様断面アーチおよび変断面アーチに関して、対称性を有する場合および初期変位が存在する場合の有限変形、分岐座屈、飛び移り座屈などの諸問題解析に対する応用性を検討した。

本解析法においては、変断面任意形アーチは、アーチ軸等分点あるいは水平軸等分点における曲率半径、アーチ軸接線傾斜角、断面 2 次モーメント、断面積などの幾何学的諸量および荷重強度などを用いて、直接的に解析され、直棒要素集合体や一定曲率曲棒要素集合体あるいは階段状変断面アーチなどの置換系へのモデル化を必要としないことが示された。また、任意荷重の作用を受ける変断面任意形アーチの荷重状態や幾何学的形状などに関する入力データを少量にとどめることができ、しかも高精度の数値解を得ることができることが明らかにされた。

集中荷重や部分分布荷重など、大きな曲げを生ぜしめる荷重に対するアーチの分岐座屈荷重の解析において

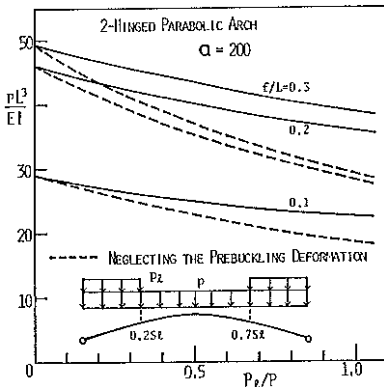


Fig. 17 (a) Bifurcation Buckling Load of 2-hinged Parabolic Arch: Combined Load

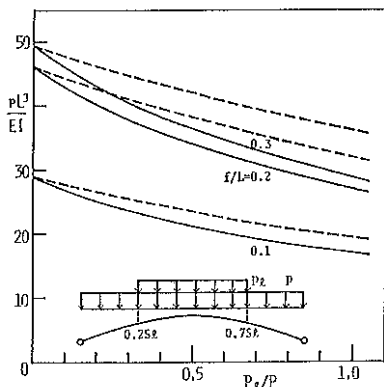


Fig. 17 (b) Bifurcation Buckling Load of 2-hinged Parabolic Arch: Combined Load

は、座屈前の幾何学的非線形性を無視し得ないことが確かめられた。なお、軸圧縮状態から離れた、大きな曲げを伴う状態を発生させる荷重に対するアーチの耐荷性を明らかにするためには、材料非線形性をも考慮した解析が当然必要となるが、このことについては別途報告の予定である。

最後に、本研究を進めるに際し、九州大学工学部 吉村虎蔵教授にご指導ご鞭撻いただいた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Huddleston, J.V. : Finite Deflections and Snap-Through of High Circular Arches, J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 763~769, 1968.
- 2) 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，第223号，pp. 1~9, 1974.
- 3) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，第238号，pp. 31~42, 1975.
- 4) Walker, A.C. : A Non-linear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp. 97~107, 1969.
- 5) Dawe, D.J. : A Finite-Deflection Analysis of Shallow Arches by the Discrete Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 529~552, 1971.
- 6) 篠崎 武：平面骨組の大変形解析，土木学会論文報告集，第224号，pp. 47~53, 1974.
- 7) Wood, R.D. and O.C. Zienkiewicz : Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells, Compt. Struct., Vol. 7, pp. 725~735, 1977.
- 8) 堀井健一郎・斎藤 進・川原陸人・森 繁：骨組構造の大変形解析，土木学会論文報告集，第191号，pp. 15~30, 1971.
- 9) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，第237号，pp. 11~26, 1975.
- 10) Huddleston, J.V. : Non-Linear Analysis of Steep, Compressible Arches of Any Shape, J. Appl. Mech., Vol. 38, pp. 942~946, 1971.
- 11) 波田凱夫・新家 徹・頭井 洋：伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈および2次の応力問題の解析，土木学会論文報告集，第224号，pp. 1~11, 1974.
- 12) 崎山 毅・栗原和夫：変断面梁柱の挫屈解法について，長崎大学工学部研究報告，第8号，pp. 25~32, 1977.
- 13) 小松定夫・新家 徹：アーチの面内耐荷力の実用算定式について，土木学会論文報告集，第267号，pp. 39~52, 1977.
- 14) Conway, H.D. and C.F. Lo : Further Studies on the Elastic Stability of Curved Beams, Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, pp. 707~718, 1967.
- 15) Gjelsvik, A. and S.R. Bodner : The Energy Criterion and Snap Buckling of Arches, Proc. ASCE, EM 5, pp. 87~134, 1962.
- 16) Schreyer, H.L. : The Effect of Initial Imperfections on the Buckling Load of Shallow Circular Arches, J. Appl. Mech., Vol. 39, pp. 445~450, 1972.
- 17) Cary, K.M. and D.W. Kao : Finite Element Analysis of Buckling and Post-Buckling Behaviors of Arches with Geometric Imperfections, Compt. Struct., Vol. 3, pp. 149~161, 1973.
- 18) Austin, W.J. : Elastic Buckling of Arches under Symmetrical Loading, Proc. ASCE, ST 5, pp. 1085~1095, 1976.
- 19) Wästlund, G. : Stability Problems of Compressed Steel Members and Arch Bridges, Proc. ASCE, ST 6, pp. 47~71, 1960.
- 20) Handbook of Structural Stability, edited by Column Research Committee of Japan, Corona Publishing Co., Tokyo, pp. 2-72~2-124, 1971.

(1978.8.10・受付)