

# 内管が軸方向に運動する同心環状流路内の 十分に発達した層流熱伝達の解析 (第1種と第2種の境界条件の場合)

茂地 徹\* ・ 桃木 悟\*  
東井上 真哉\*\* ・ 山田 昭\*  
Y. Lee\*\*\*

## An Analysis on Fully Developed Laminar Heat Transfer in Concentric Annuli with Axially Moving Cores (The Cases of the First and Second Kind Boundary Conditions)

by

Toru SHIGECHI\*, Satoru MOMOKI\*, Shinya HIGASHI-IUE\*\*  
Takashi YAMADA\* and Y. LEE\*\*\*

Fundamental solutions of the first and second kind boundary conditions were obtained analytically for the fully developed laminar heat transfer in a concentric annulus with an axially moving core. The heating conditions for the first and second kind are respectively (1) constant and uniform but different wall temperatures are specified on each wall and (2) on one wall, constant axial as well as peripheral wall heat flux is specified and the other is insulated. The effects of the relative velocity of the core and the radius ratio on the temperature and Nusselt numbers have been investigated.

### 1. まえがき

内管と外管がともに静止(固定)している場合の環状流路内の流動・伝熱の研究は、二重管形熱交換器や高温ガス炉などの熱流動設計に関連して重要であるため古くから数多くの研究<sup>1)</sup>が行われているが、内管のみが軸方向に運動する場合の研究は皆無に近い。これは応用面での要請がほとんどなかったためと思われるが、最近、押し出し・引き抜き・圧延などの金属やプラスチック材料の製造過程での材質・形状の制御に関する伝熱問題、長いトンネル内を走行する列車の熱環境問題および逆環状流膜沸騰における気液2相流問題などに関連して、固体あるいは液体の内部コアが軸

方向に運動する場合の環状流路内の流動・伝熱に関する知見が必要とされるようになった。著者らは、これまで、同心あるいは偏心した内管が軸方向に運動する環状流路内の層流および乱流熱伝達を、実用上の理由から、熱境界条件として内管・外管表面での熱流束が周方向・軸方向に一定の場合(これを第2種境界条件と呼ぶ)に対して理論解析を行ってきた<sup>2~6)</sup>。

本研究では、熱的に第1種境界条件と呼ばれる、内管と外管の温度が一定(ただし、内管と外管の温度は異なる値)の場合の同心環状流路内の十分に発達した層流熱伝達の解析解の検討結果について報告する。また比較のため、第2種境界条件の場合の解析結果<sup>3)</sup>

平成7年4月30日受理

\*機械システム工学科 (Dept. of Mechanical Systems Engineering)

\*\*大学院修士課程機械システム工学専攻 (Graduate Student, Dept. of Mechanical Systems Engineering)

\*\*\*オタワ大学工学部 (Fac. of Engineering, Univ. of Ottawa)

の一部もあわせて報告する。

主要記号

- $a$  温度伝導率
- $f$  摩擦係数
- $h$  熱伝達係数
- $k$  熱伝導率
- $Nu$  ヌッセルト数,  $h \cdot 2(R_o - R_i) / k$
- $P$  圧力
- $q$  熱流束
- $r$  半径方向座標
- $Re$  レイノルズ数,  $u_m \cdot 2(R_o - R_i) / \nu$
- $R_i$  内管半径
- $R_o$  外管半径
- $T$  温度
- $u$  流体の軸方向の速度
- $u_m$  平均流速
- $U$  内管の軸方向の速度
- $U^*$  内管の相対速度,  $U / u_m$
- $z$  軸方向座標
- $\alpha$  半径比,  $R_i / R_o$
- $\theta$  無次元温度
- $\mu$  粘性係数
- $\nu$  動粘性係数
- $\rho$  密度
- 定数
- $B \equiv (\alpha^2 - 1) / \ln \alpha$
- $B^* \equiv w \cdot B$
- $E \equiv \{\alpha^2 - (B/2)\} / (\alpha^2 - 1)$
- $M \equiv 1 + \alpha^2 - B$
- $w \equiv \{1 - (U^*/2)\} / (1 - EU^*)$
- 上付添字
- (1) 第1種境界条件
- (2) 第2種境界条件
- 下付添字
- b バルク
- i 内壁
- ii 内壁, 内管加熱
- io 内壁, 外管加熱
- o 外壁
- oo 外壁, 外管加熱
- oi 外壁, 内管加熱

2 理論解析

Fig. 1 に本研究で対象とする同心環状流路の物理モデルと座標系を示す。環状流路内の流動と伝熱の解析に際して次の仮定を設定する。

1. 環状流路内の流れは定常・層流で、流体力学的

および熱的に十分発達している。

2. 外管は静止し、同心の内管は一定速度で軸方向に運動している。
3. 流体は物性値一定のニュートン流体である。
4. 体積力、粘性逸散および軸方向の熱伝導は無視できる。

2.1 流動解析 流体の運動方程式とその境界条件は上記の仮定により次式のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{cases} r=R_i, u=U \\ r=R_o, u=0 \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

式(1)を式(2)の条件で解けば、速度  $u$  が次のように得られる。

$$u = \frac{2 u_m}{M} (1 - EU^*) [1 - (r/R_o)^2 + B^* \ln(r/R_o)] \dots\dots\dots (3)$$

ここに  $u_m$  と  $U^*$  はそれぞれ流体の平均速度と内管の相対速度で次式のように定義される。

$$\begin{aligned} u_m &\equiv \frac{\int_A u dA}{\int_A dA} \\ &= \frac{1}{\pi (R_o^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} u \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{R_o^2}{4\mu} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \frac{M}{2} + EU \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$U^* \equiv \frac{U}{u_m} \dots\dots\dots (5)$$

摩擦係数  $f$  を次のように定義すると

$$f \equiv \frac{R_o - R_i}{\rho u_m^2} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \dots\dots\dots (6)$$

$f$  は式(4)から

$$f = \frac{16}{Re} \frac{(1 - \alpha)^2}{M} \cdot (1 - EU^*) \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここに、 $Re$  はレイノルズ数で次式で定義される。

$$Re \equiv \frac{u_m \cdot 2(R_o - R_i)}{\nu} \dots\dots\dots (8)$$

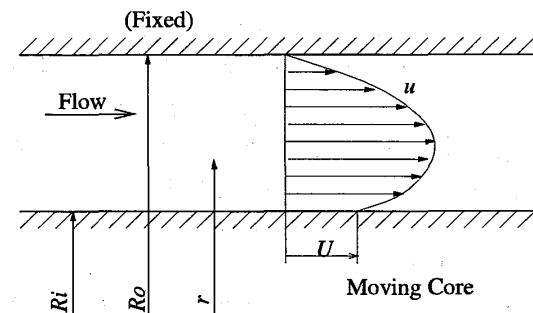


Fig. 1 Physical model and coordinates

2.2 伝熱解析

2.2.1 基礎式 温度場を定めるエネルギー式は上記の仮定より次式となる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u}{a} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

境界条件は第1種と第2種に対して次のように書くことができる。

第1種境界条件：

$$\begin{cases} r=R_i, T=T_i \\ r=R_o, T=T_o \end{cases} \quad (10)$$

第2種境界条件：

(a)内管表面は熱流束一定で、外管表面は断熱の場合

$$\begin{cases} r=R_i, T=T_i \\ r=R_o, \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{R_o} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

(b)内管表面は断熱で、外管表面は熱流束一定の場合

$$\begin{cases} r=R_i, \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{R_i} = 0 \\ r=R_o, T=T_o \end{cases} \quad (12)$$

ここで、流体力学のおよび熱的に十分発達した場合の温度場の解析解を求めるために、式(9)の右辺の  $(\partial T/\partial z)$  について検討を加える。

まず、内管表面温度  $T_i$  と流体のバルク温度  $T_b$  を用いて無次元温度  $\theta$  を次式のように定義する。

$$\theta \equiv \frac{T_i - T}{T_i - T_b} \quad (13)$$

温度場が十分に発達すると無次元温度  $\theta$  の分布形は  $z$  方向に相似となるので

$$\theta = f(r/R_o) \quad (14)$$

となり、 $\theta$  に関して次の条件式が得られる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

式(15)に式(13)を代入して整理すると次式が得られる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T - T_b}{T_i - T_b} \cdot \frac{\partial T_i}{\partial z} + \frac{T_i - T}{T_i - T_b} \cdot \frac{\partial T_b}{\partial z} \quad (16)$$

さらに、 $T_i$  と  $T_b$  は  $z$  のみの関数であるから、式(16)は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T - T_b}{T_i - T_b} \cdot \frac{dT_i}{dz} + \frac{T_i - T}{T_i - T_b} \cdot \frac{dT_b}{dz} \quad (17)$$

ここで第1種境界条件と第2種境界条件に対応して次の二通りについて検討する。

(1) 内管表面温度が一定の場合 [第1種境界条件]

内管表面温度  $T_i$  が一定であるから

$$\frac{dT_i}{dz} = 0 \quad (18)$$

したがって、式(17)は式(19)となる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_i - T}{T_i - T_b} \cdot \frac{dT_b}{dz} \quad (19)$$

式(19)を式(9)に代入すれば、内管表面温度が一定の場合のエネルギー式は次式のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u}{a} \frac{(T_i - T)}{T_i - T_b} \frac{dT_b}{dz} \quad (20)$$

しかし、この式の右辺には未知のバルク温度  $T_b$  が含まれているため解析的には解くことができない。また、数値的に解く場合でも試行錯誤の方法によらなければならない。したがって、第1種境界条件に対して式(19)のようにバルク温度  $T_b$  を用いて無次元温度を定義する場合には、このような解析上の困難さが伴う。

(2) 内管表面で熱流束が一定の場合 [第2種境界条件]

内管表面の熱流束  $q_i$  は次式で定義される。

$$q_i = h_i(T_i - T_b) = \text{constant} \quad (21)$$

ここで、 $h_i$  は内管表面の熱伝達係数で、十分に発達した強制対流熱伝達の場合には一定値をとる<sup>7)</sup>。式(21)で  $q_i$  は一定であるから、 $T_i - T_b$  も一定となり、次式が成り立つ。

$$\frac{dT_i}{dz} = \frac{dT_b}{dz} \quad (22)$$

したがって、式(17)は次式となる。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} \quad (23)$$

すなわち、内管表面で熱流束が一定の場合のエネルギー式は次式のように書くことができる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u}{a} \cdot \frac{dT_b}{dz} \quad (24)$$

なお、式(24)右辺の  $(dT_b/dz)$  は熱流束一定の条件から一定となるので、式(24)の微分方程式は境界条件、式(11)または式(12)の下で解析的に解くことが可能である。

2.2.2 解析解

(1) 第1種境界条件の場合

既に述べたように式(20)を境界条件、式(10)の下で解くことは困難であるので、エネルギーの基礎式(9)と境界条件、式(10)を次の方法で解くことにする。

第1種境界条件に関しては、内管と外管の表面温度が一定値に固定されるという環状流路の特性を利用して、無次元温度  $\theta$  を内管表面温度  $T_i$  と外管表面温度  $T_o$  を用いて次のように定義する。ただし、 $T_i \neq T_o$  とする。

$$\theta \equiv \frac{T - T_o}{T_i - T_o} \quad (25)$$

ここで、無次元半径座標を  $r^* = r/R_o$  と定義すると、

十分に発達した温度場に関しては、式(25)で定義された無次元温度  $\theta$  の分布形は相似となり  $\theta=f(r^*)$  であるから、 $\partial\theta/\partial z=0$  となる。したがって、次の熱伝導形のエネルギー式と境界条件が得られる。

エネルギー式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r^* = \alpha, & \theta = 1 \\ r^* = 1, & \theta = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (27)$$

式(26)と式(27)は容易に解くことができ、厳密解は次のようになる。

$$\theta = \frac{\ln r^*}{\ln \alpha} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(28)から、内管と外管表面での熱流束  $q_j$  ( $j=i$  は内管表面、 $j=o$  は外管表面)、バルク温度  $T_b$ 、無次元バルク温度  $\theta_b = (T_b - T_o) / (T_i - T_o)$  およびヌッセルト数  $Nu_{ii}^{(1)}$ 、 $Nu_{oo}^{(1)}$  は次のように計算される。

表面熱流束：

$$\begin{aligned} q_j &= -k \frac{dT}{dr} \Big|_{R_j} = -\frac{k}{R_o} (T_i - T_o) \frac{d\theta}{dr^*} \Big|_{r^* = \alpha \text{ or } 1} \\ &= \begin{cases} -\frac{k}{R_o} (T_i - T_o) \frac{1}{\alpha \ln \alpha} & (\text{内管表面 } j=i) \\ -\frac{k}{R_o} (T_i - T_o) \frac{1}{\ln \alpha} & (\text{外管表面 } j=o) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

バルク温度：

$$\begin{aligned} T_b &\equiv \frac{\int_A uT dA}{\int_A u dA} \\ &= \frac{1}{\pi (R_o^2 - R_i^2) u_m} \int_{R_i}^{R_o} uT \cdot 2\pi r dr \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

無次元バルク温度：

$$\begin{aligned} \theta_b &= \frac{2}{(1 - \alpha^2)} \int_{\alpha}^1 \frac{u}{u_m} \cdot \theta \cdot r^* \cdot dr^* \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha^2) \cdot \ln \alpha} \left[ \frac{1 - EU^*}{M} \right] \\ &\quad \times [-B^* \{ \alpha^2 \{ 2 (\ln \alpha)^2 - 2 \ln \alpha + 1 \} - 1 \} \\ &\quad + \alpha^4 \left( \ln \alpha - \frac{1}{4} \right) - \alpha^2 \left( 2 \ln \alpha - 1 \right) - \frac{3}{4}] \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ヌッセルト数：

$$Nu_{ii}^{(1)} \equiv \frac{h_{ii}^{(1)} \cdot 2 (R_o - R_i)}{k} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $h_{ii}^{(1)}$  ( $j=i$  または  $j=o$ ) は第1種境界条件に対する熱伝達係数で次のように定まる。

$$h_{ii}^{(1)} = \frac{q_j}{|T_j - T_b|}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \frac{k}{R_o} \cdot \frac{1}{(1 - \theta_b)} \cdot \frac{1}{\alpha \ln(1/\alpha)} & (\text{内管表面 } j=i) \\ \frac{k}{R_o} \cdot \frac{1}{\theta_b} \cdot \frac{1}{\ln(1/\alpha)} & (\text{外管表面 } j=o) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$Nu_{ii}^{(1)} = \frac{2}{(1 - \theta_b)} \cdot \frac{(1 - \alpha)}{\alpha \ln(1/\alpha)} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$Nu_{oo}^{(1)} = \frac{2 (1 - \alpha)}{\theta_b \cdot \ln(1/\alpha)} \quad \dots\dots\dots (35)$$

なお、無次元温度を式(28)と異なり次式で

$$\theta' \equiv \frac{T_i - T}{T_i - T_o} \quad \dots\dots\dots (36)$$

で定義すれば、 $\theta'$  に関するエネルギー式は式(26)と同形であるが、境界条件が式(27)とは異なってくるので、 $\theta'$  の解 (温度分布) も式(28)とは異なる。この場合のヌッセルト数  $Nu_{ii}^{(2)}$  ( $j=i$  または  $j=o$ ) を次式で定義する。

$$Nu_{ii}^{(2)} \equiv \frac{h_{ii}^{(2)} \cdot 2 (R_o - R_i)}{k} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$\theta'$  の解を用いて式(37)を実際に計算すると、ヌッセルト数に関して次の関係が得られる。

$$Nu_{ii}^{(2)} = Nu_{ii}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$Nu_{oo}^{(2)} = Nu_{oo}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (39)$$

したがって、以後、第1種境界条件に関するヌッセルト数として、内管表面のヌッセルト数として  $Nu_{ii}^{(1)}$  を外管表面のヌッセルト数として  $Nu_{oo}^{(1)}$  をそれぞれ代表させて議論することにする。

(2) 第2種境界条件の場合

式(24)を境界条件、式(11)または式(12)の下で解けば、温度  $T$  の厳密解は次のように得られる。

$$\begin{aligned} T &= A \cdot \left[ \frac{1 - B^*}{4} (r^*)^2 - \frac{1}{16} (r^*)^4 + \frac{B^*}{4} (r^*)^2 \cdot \ln r^* \right] \\ &\quad + C_1 \ln r^* + C_2 \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

ここに、 $r^* = r/R_o$  で、 $A$  は次式で定義される定数である。

$$A \equiv \frac{R_o^2}{a} \left( \frac{dT_b}{dz} \right) \left( \frac{2 u_m}{M} \right) (1 - EU^*) \quad \dots\dots\dots (41)$$

定数  $C_1$  と  $C_2$  は境界条件によって異なり、次のようになる。

(a) 内管表面は熱流束一定で、外管表面は断熱の場合

$$C_1 = -\frac{A}{4} (1 - B^*) \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= T_i - A \cdot \left[ \frac{(1 - B^*)}{4} \cdot \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{\alpha^2}{4} \cdot B^* \ln \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - B^*)}{4} \cdot \ln \alpha \right] \quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

(b) 内管表面は断熱で、外管表面は熱流束一定の場合

$$C_1 = -A \cdot \left[ \frac{(2-B^*)}{4} \cdot \alpha^2 - \frac{1}{4} \cdot \alpha^4 + \frac{B^*}{2} \cdot \alpha^2 \ln \alpha \right] \quad (44)$$

$$C_2 = T_0 - A \left[ \frac{3 - 4B^*}{16} \right] \quad (45)$$

バルク温度  $T_b$  を式(30)と同様に定義すると、第2種境界条件に対するヌッセルト数  $Nu_{ij}^{(2)}$  は次のように計算される。

$$Nu_{ij}^{(2)} \equiv \frac{h_{ij}^{(2)} \cdot 2(R_o - R_i)}{k} \quad (46)$$

ここに、 $h_{ij}^{(2)}$  ( $j=i$  または  $j=0$ ) は第2種境界条件に対する熱伝達係数で次式で与えられる。

$$h_{ij}^{(2)} = \frac{q_i}{T_j - T_b} = \frac{\left| k \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{R_i}}{T_j - T_b} \quad (47)$$

したがって、ヌッセルト数は次式で与えられる。

$$Nu_{ij}^{(2)} = \frac{2[1 + (2w - 1)\alpha^2 - wB]^2}{FH_{ij}} \times (1 + \alpha)(1 - \alpha)^2 \quad (48)$$

ここに、 $F$  と  $H_{ij}$  は境界条件に依存して次のように与えられる。

(a) 内管表面は熱流束一定で、外管表面は断熱の場合  $F = \alpha$  ..... (49)

$$H_{ij} = \left\{ \frac{1}{B} - \left( \frac{25}{24} + 2w \right) + \left( \frac{22}{9} + w \right) wB - \frac{11}{8} w^2 B^2 \right\} + \left\{ \left( \frac{23}{24} - 2w \right) - \left( \frac{14}{9} - 2w \right) wB + \frac{5}{8} w^2 B^2 \right\} \alpha^2 - \left\{ \left( \frac{13}{24} - 2w + w^2 \right) - \left( \frac{4}{9} - \frac{3}{2} w \right) wB \right\} \alpha^4 + \left( \frac{1}{8} - \frac{2}{3} w + w^2 \right) \alpha^6 \quad (50)$$

(b) 内管表面は断熱で、外管表面は熱流束一定の場合  $F = 1$  ..... (51)

$$H_{oo} = \left( \frac{11}{24} - \frac{19}{18} wB + \frac{5}{8} w^2 B^2 \right) - \left\{ \left( \frac{61}{24} - 3w \right) - \left( \frac{40}{9} - 4w \right) wB + \frac{11}{8} w^2 B^2 \right\} \alpha^2 + \left\{ \frac{[2(1-w) - (1-2w)\alpha^2]^2}{B} \right\} + \left( \frac{47}{24} - 10w + 7w^2 \right) - \left( \frac{37}{18} - \frac{11}{2} w \right) wB \alpha^4 - \left( \frac{3}{8} - \frac{13}{3} w + 7w^2 \right) \alpha^6 \quad (52)$$

### 3 解析結果と考察

#### 3.1 流動

3.1.1 速度分布 Fig. 2は環状部を流れる流体の速度分布を、縦軸に  $u/u_m$ 、横軸に  $\zeta$  ( $\zeta=0$ は内管表面、 $\zeta=1$ は外管表面) をとって示したものである。 $U_{cr}^*$

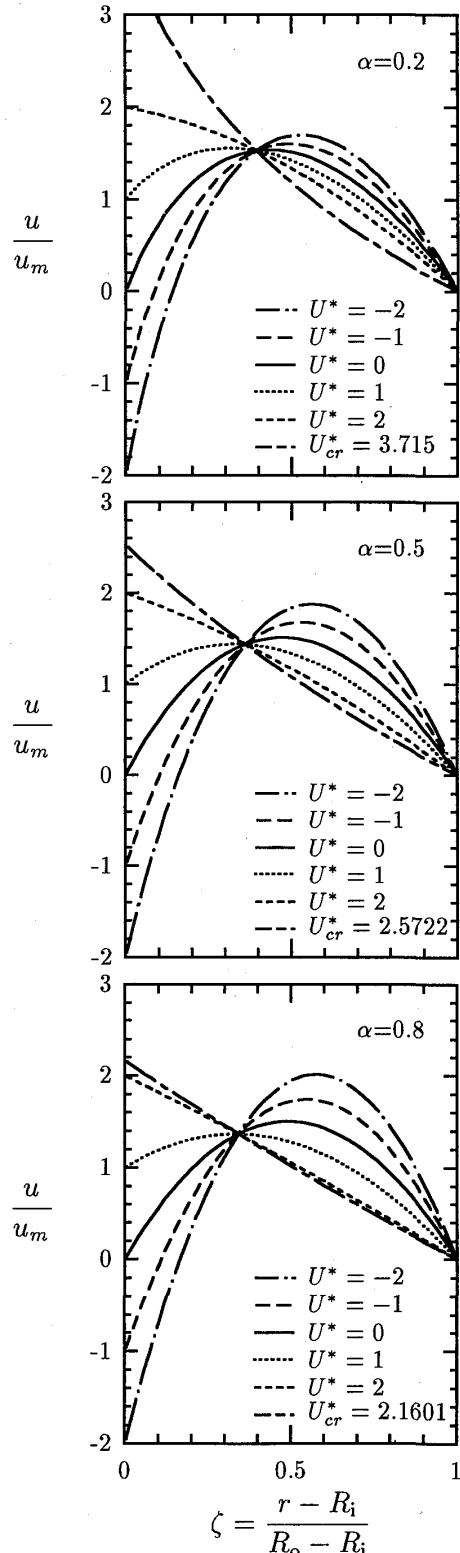


Fig. 2 Velocity profiles

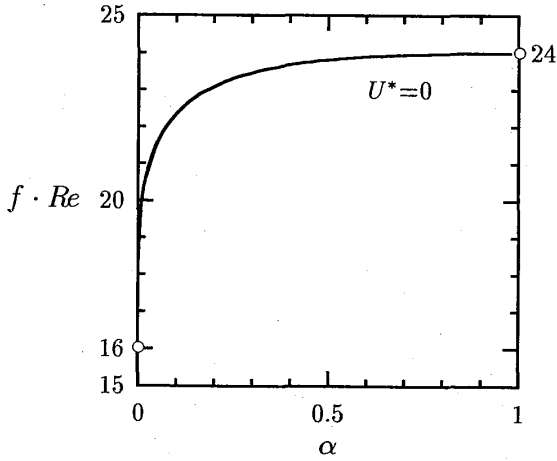


Fig. 3 Friction factor ( $U^* = 0$ )

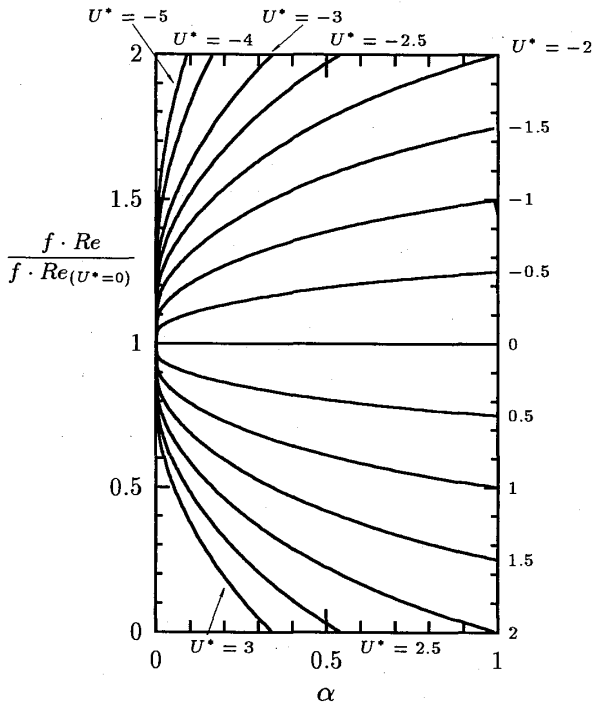


Fig. 4  $(f \cdot Re) / (f \cdot Re)_{U^*=0}$  vs  $\alpha$

は摩擦係数が0となる場合の  $U^*$  の限界値で、式(7)より、 $U^*_c = 1/E$  である。図から、半径比  $\alpha$  を指定すると全ての曲線は内管相対速度  $U^*$  に依存せず唯一点で交わり、不動点が存在することがわかる。この不動点は  $\alpha$  が大きくなると  $u/u_m$  を減少させながら内管側に移動する。不動点の外側の領域では、 $u/u_m$  の曲線は  $U^*$  が減少するにつれて大きくふくらんでいき、 $U^* < 0$  の場合には最大値が存在する。

**3.1.2 摩擦係数** Fig. 3は内管が静止している場合 ( $U^* = 0$ ) の摩擦係数を、縦軸に  $f \cdot Re$  をとって示したものである。 $f \cdot Re$  の値は、 $0 \leq \alpha \leq 1$  の範囲で、図

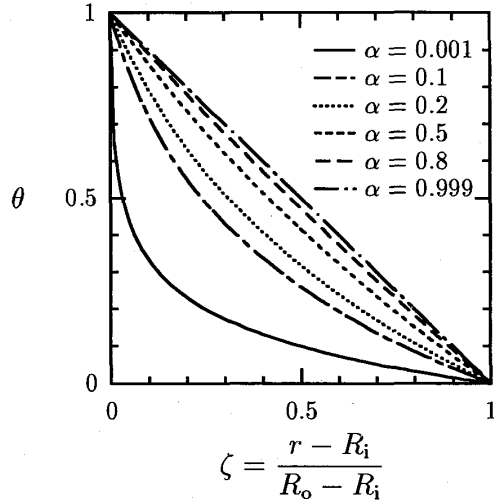


Fig. 5 Temperature profiles (1st kind)

のように16から24へと変化する。内管が静止している場合と軸方向に運動している場合の  $f \cdot Re$  の比、 $f \cdot Re / f \cdot Re_{(U^*=0)}$  をFig. 4に示す。内管相対速度  $U^*$  が0より大きくなると、摩擦係数比、 $f \cdot Re / f \cdot Re_{(U^*=0)}$  は常に1より小さくなるが、 $U^*$  が0より小さい場合にはその逆の傾向を示す。内管相対速度  $U^*$  の効果は  $\alpha = 1$  (平行平板間の流動) で最も強くなるが、 $\alpha = 0$  (円管内の流動に相当) では内管の表面積が零に近づくため消滅する。

**3.2 熱伝達**

**3.2.1 第1種境界条件の基本解**

(1) 温度分布

式(28)で与えられる無次元温度  $\theta$  は半径比  $\alpha$  のみの関数で、内管相対速度  $U^*$  には依存しない。式(28)の  $\theta$  を、横軸に  $\zeta$  ( $\zeta = 0$  は内管表面、 $\zeta = 1$  は外管表面) をとって図示したものが Fig. 5であるが、 $\alpha$  が1に近づくにつれ、温度分布の形状は直線に近づくことがわかる。

(2) ヌッセルト数

内管に関するヌッセルト数  $Nu_{(i)}^{(1)}$  と外管に関するヌッセルト数  $Nu_{(o)}^{(1)}$  を、横軸に半径比  $\alpha$  をとって図示したものが、それぞれ Fig. 6(a)と Fig. 6(b)である。なお、内管が静止している場合 ( $U^* = 0$ ) の  $Nu_{(i)}^{(1)}$  と  $Nu_{(o)}^{(1)}$  の  $\alpha$  に関する依存性は Shah and London<sup>1)</sup> の計算結果と一致することを確認している。

内管のヌッセルト数、 $Nu_{(i)}^{(1)}$  の大きさは、半径比  $\alpha$  が大きくなると減少するが、内管相対速度  $U^*$  が大きいほど増大する。とくに、 $Nu_{(i)}^{(1)}$  は  $\alpha$  が零の近くで、急激に変化する。一方、外管のヌッセルト数、 $Nu_{(o)}^{(1)}$ 、

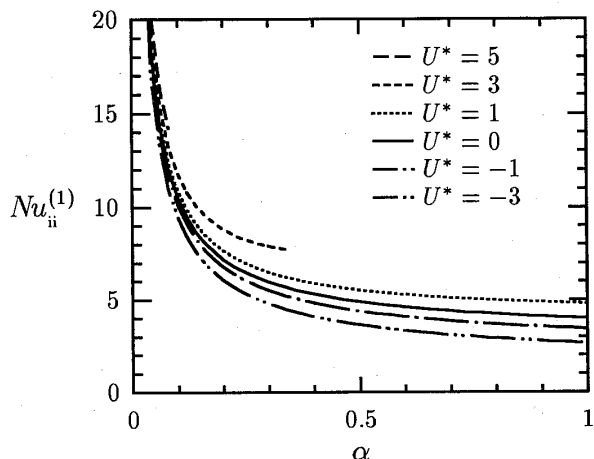


Fig. 6 (a) Nusselt numbers ( $Nu_{ii}^{(1)}$ )

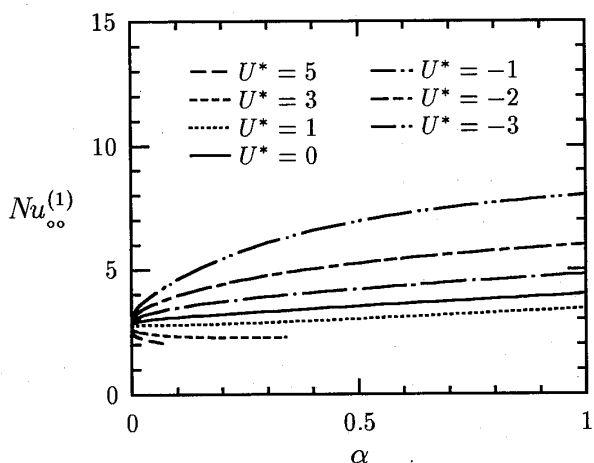


Fig. 6 (b) Nusselt numbers ( $Nu_{oo}^{(1)}$ )

の大きさは、 $\alpha$ を固定すると、内管相対速度  $U^*$  に関しては、 $Nu_{ii}^{(1)}$  とは逆の傾向を示す。 $Nu_{oo}^{(1)}$  は、 $\alpha$  に関しては、Fig. 6 (b) のように  $U^*$  に依存して増減する。

Fig. 7 (a) と Fig. 7 (b) は、とくに内管相対速度  $U^*$  の効果をみるために、内管が静止している場合と運動している場合のヌッセルト数の比、 $Nu_{ii}^{(1)}/Nu_{ii}^{(1)}(U^*=0)$  と  $Nu_{oo}^{(1)}/Nu_{oo}^{(1)}(U^*=0)$  を、それぞれ横軸に半径比  $\alpha$  をとって図示したものである。

これらの図から、Fig. 6 (a) と Fig. 6 (b) に関連して述べたヌッセルト数に及ぼす内管相対速度の影響を明瞭にみる事ができる。

### 3.2.2 第2種境界条件の基本解

#### (1) 温度分布

式(40)で与えられる温度  $T$  を無次元化した温度  $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  を、横軸に  $\zeta$  ( $\zeta = 0$  は内管表面、 $\zeta = 1$  は外管表面) をとって図示したものが、それぞれ Fig. 8 (a) と Fig. 8 (b) である。内管表面が熱流束

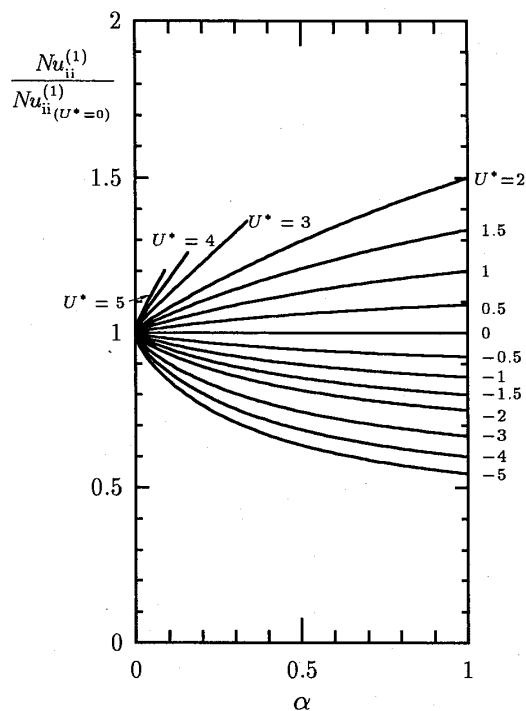


Fig. 7 (a)  $Nu_{ii}^{(1)}/Nu_{ii}^{(1)}(U^*=0)$  vs  $\alpha$

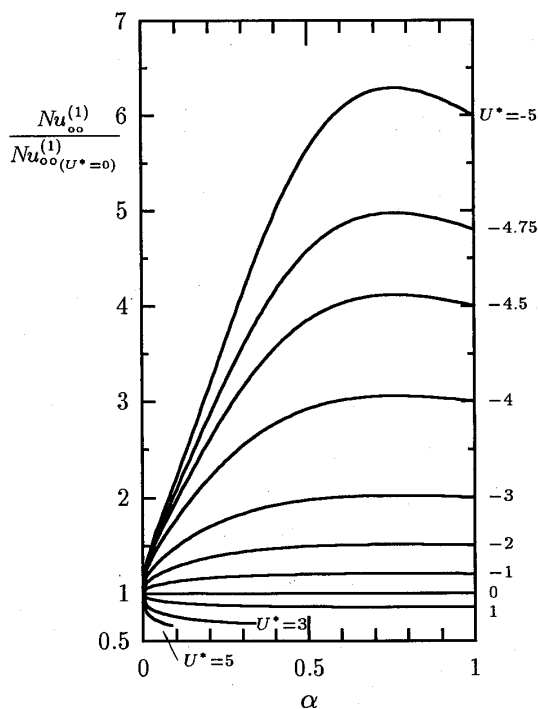


Fig. 7 (b)  $Nu_{oo}^{(1)}/Nu_{oo}^{(1)}(U^*=0)$  vs  $\alpha$

一定で加熱され外管表面断熱の場合には、Fig. 8 (a) で示すように、温度は環状流路断面内で単調に変化しており、 $U^*$  が大きいほど内管表面 ( $\zeta = 0$ ) で  $\theta$  の温度勾配は大きくなっている。一方、内管表面断熱で外管表面が熱流束一定で加熱される場合には、 $U^* < 0$  の場合に、Fig. 8 (b) にみられるように、 $\theta$  は流路断面内

で最大値を有する(温度  $T$  に関しては最小値となる)分布形状となり, 外管表面 ( $\zeta=1$ ) での  $\theta$  の温度勾配は,  $U^*$  が小さいほど大きくなっている。以上のことはすべての  $\alpha$  に関して成り立つ。

#### (2) ヌッセルト数

内管に関するヌッセルト数  $Nu_{i1}^{(2)}$  と外管に関するヌッセルト数  $Nu_{o2}^{(2)}$  を, 横軸に半径比  $\alpha$  をとって図示したものが, それぞれ Fig. 9 (a) と Fig. 9 (b) である。なお, 内管が静止している場合 ( $U^*=0$ ) の  $Nu_{i1}^{(2)}$  と  $Nu_{o2}^{(2)}$  の  $\alpha$  に関する依存性は Shah and London<sup>1)</sup> の計算結果と一致することを確認している。

内管のヌッセルト数,  $Nu_{i1}^{(2)}$ , の大きさは, 半径比  $\alpha$  が大きくなると減少するが, 内管相対速度  $U^*$  が大きいほど増大する。とくに,  $Nu_{i1}^{(2)}$  は  $\alpha$  が零の近くで, 急激に変化する。一方, 外管のヌッセルト数,  $Nu_{o2}^{(2)}$ , の大きさは,  $\alpha$  を固定すると, 内管相対速度  $U^*$  に関しては,  $Nu_{i1}^{(2)}$  とは逆の傾向を示す。 $Nu_{o2}^{(2)}$  は,  $\alpha$  に関しては, Fig. 10(b) に示すように  $U^*$  に依存して増減する。

Fig. 10(a) と Fig. 10(b) は, とくに内管相対速度  $U^*$  の効果をみるために, 内管が静止している場合と運動している場合のヌッセルト数の比,  $Nu_{i1}^{(2)}/Nu_{i1}^{(2)}(U^*=0)$  と  $Nu_{o2}^{(2)}/Nu_{o2}^{(2)}(U^*=0)$  を, それぞれ横軸に半径比  $\alpha$  をとって図示したものである。これらの図から, Fig. 9 (a) と Fig. 9 (b) に関連して述べたヌッセルト数に及ぼす内管相対速度の影響を明瞭にみることができる。

**3.2.3 ヌッセルト数に及ぼす境界条件の影響** ヌッセルト数に及ぼす第1種と第2種の境界条件の影響は, Fig. 6, Fig. 7, Fig. 9 および Fig. 10 の各々の (a) 図と (b) 図からみることができる。内管および外管のヌッセルト数に及ぼす半径比と内管相対速度の効果は, 第1種境界条件と第2種境界条件では, 第2種境界条件の内管断熱で外管加熱の場合に  $U^*$  が小さいところ (Fig. 10(b) で  $U^*=-4, -5$  の場合) を除外すれば, 両者に関して定性的にはほとんど差異はない。すなわち, 第1種境界条件と第2種境界条件の場合には, 内管の温度が外管の温度より高い場合 [あるいは内管加熱で外管断熱の場合] には内管のヌッセルト数は内管相対速度の増大とともに大きくなるが, 外管の温度が内管の温度より高い場合 [あるいは外管加熱で内管断熱の場合] には外管のヌッセルト数は内管相対速度の増大とともに減少することになる。

第1種境界条件と第2種境界条件に対するヌッセル

ト数の計算値を Table 1 と Table 2 に示す。

#### 4. むすび

内管が軸方向に一定速度で運動する環状流路内の流体力学的および熱的に十分発達した層流熱伝達を, 第1種境界条件 [内管と外管の温度が異なる一定値に維持されている場合] と第2種境界条件 [内管と外管表面が熱流束一定に維持されている場合] に対して理論解析し, それぞれの温度場の基本解に基づいて, 速度分布, 摩擦係数, 温度分布およびヌッセルト数に及ぼす内管相対速度と (内管/外管) の半径比の効果を明らかにした。

#### 参考文献

- 1) Shah, R. K. and London, A. L., "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, Academic Press (1978).
- 2) Shigechi, T., Kawae, N. and Lee, Y., "Turbulent Fluid Flow and Heat Transfer in Concentric Annuli with Moving Cores", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 2029-2037 (1990).
- 3) Shigechi, T. and Lee, Y., "An Analysis on Fully Developed Laminar Fluid Flow and Heat Transfer in Concentric Annuli with Moving Cores", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 2593-2601 (1991).
- 4) Lee, Y. and Shigechi, T., "Heat Transfer in Concentric Annuli with Moving Cores-Fully Developed Turbulent Flow with Arbitrarily Prescribed Heat Flux", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 3488-3493 (1992).
- 5) Shigechi, T., Araki, K. and Lee, Y., "Laminar Heat Transfer in the Thermal Entrance Regions of Concentric Annuli with Moving Heated Cores", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 1061-1064 (1993).
- 6) Shigechi, T., Momoki, S. and Lee, Y., "Fully Developed Laminar Flow and Heat Transfer in Eccentric Annuli with Axially Moving Cores", *ASME HTD-Vol. 285, Fundamentals of Heat Transfer in Forced Convection*, pp. 75-84 (1994).
- 7) Kays, W. M. and Crawford, M. C., *Convective Heat and Mass Transfer* (3rd ed), McGraw-Hill Inc, pp. 110-112 (1993).



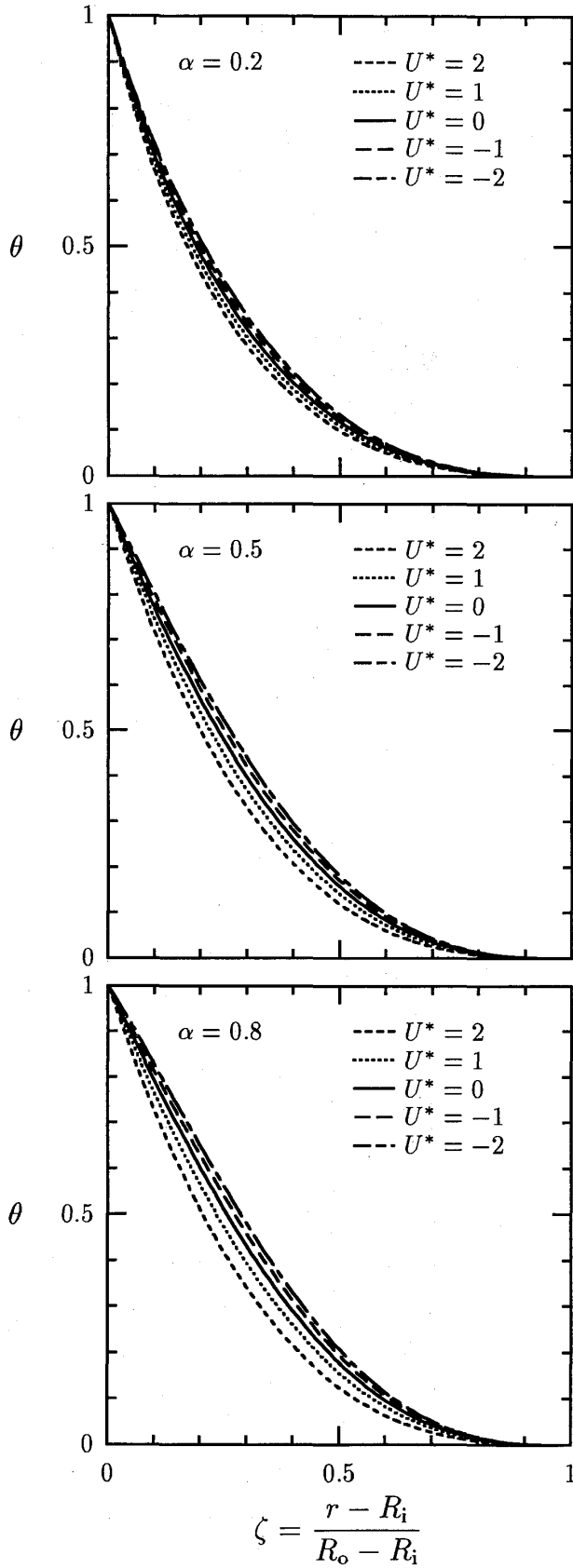


Fig. 8(a) Temperature profiles(2nd kind(a))

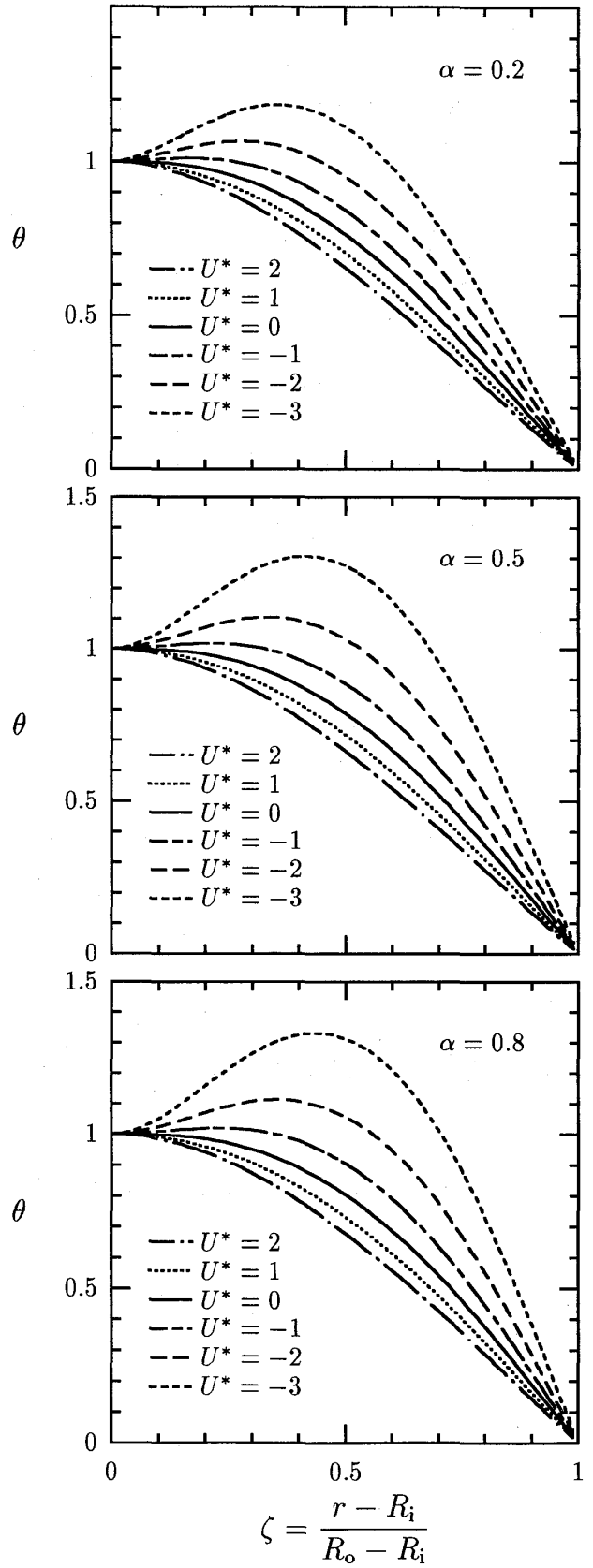


Fig. 8(b) Temperature profiles(2nd kind(b))

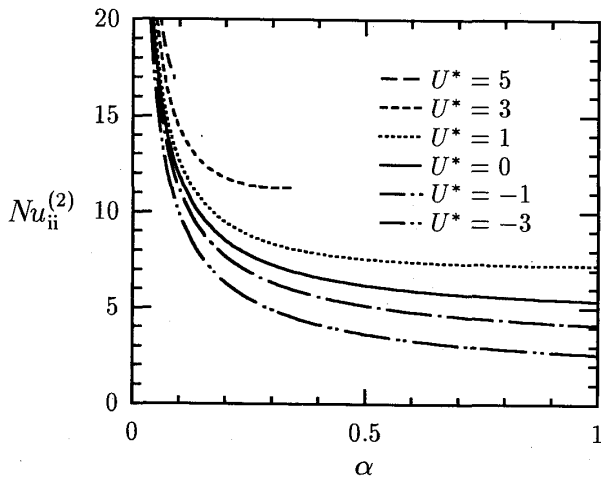


Fig. 9 (a) Nusselt numbers ( $Nu_{ii}^{(2)}$ )

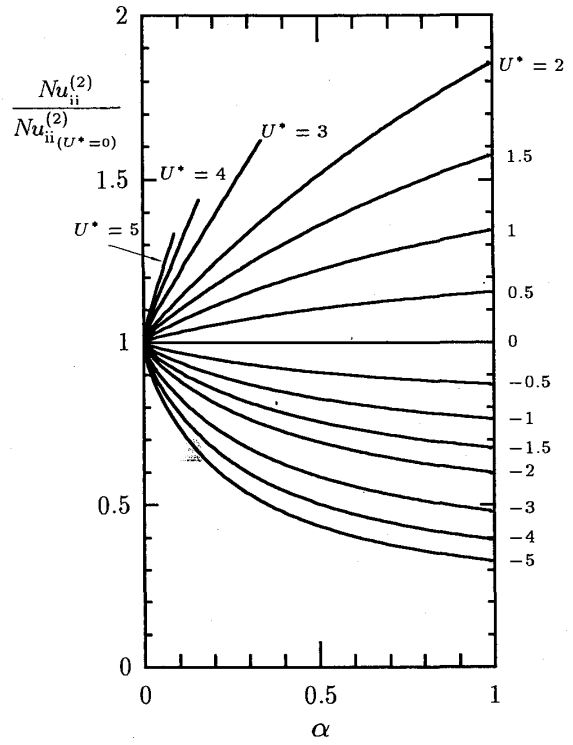


Fig.10 (a)  $Nu_{ii}^{(2)} / Nu_{ii}^{(2)}(U^*=0)$  vs  $\alpha$

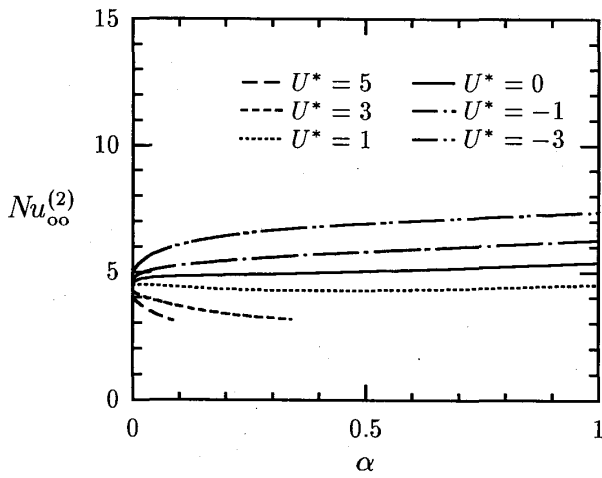


Fig. 9 (b) Nusselt numbers ( $Nu_{oo}^{(2)}$ )

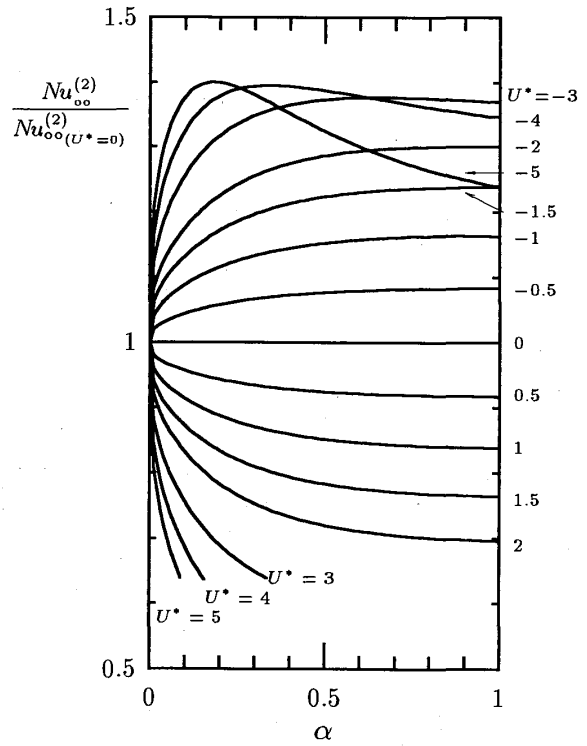


Fig.10 (b)  $Nu_{oo}^{(2)} / Nu_{oo}^{(2)}(U^*=0)$  vs  $\alpha$

Table 1 Nusselt Numbers(1st kind)

$\alpha$	$U^* = -2$		$U^* = -1$		$U^* = 0$		$U^* = 1$		$U^* = 2$	
	$Nu_{ii}^{(1)}$	$Nu_{oo}^{(1)}$	$Nu_{ii}^{(1)}$	$Nu_{oo}^{(1)}$	$Nu_{ii}^{(1)}$	$Nu_{oo}^{(1)}$	$Nu_{ii}^{(1)}$	$Nu_{oo}^{(1)}$	$Nu_{ii}^{(1)}$	$Nu_{oo}^{(1)}$
0.1	9.741	3.958	10.087	3.471	10.459	3.095	10.859	2.719	11.290	2.541
0.2	6.413	4.421	6.782	3.722	7.197	3.213	7.666	2.827	8.201	2.524
0.3	5.129	4.761	5.516	3.911	5.966	3.319	6.497	2.883	7.131	2.548
0.4	4.427	5.028	4.827	4.071	5.305	3.421	5.889	2.949	6.617	2.592
0.5	3.980	5.247	4.388	4.214	4.889	3.520	5.520	3.023	6.337	2.649
0.6	3.667	5.434	4.082	4.344	4.602	3.619	5.274	3.101	6.176	2.712
0.7	3.436	5.597	3.855	4.466	4.391	3.715	5.101	3.181	6.083	2.781
0.8	3.258	5.743	3.681	4.582	4.230	3.811	4.974	3.276	6.032	2.852
0.9	3.116	5.876	3.542	4.693	4.103	3.906	4.876	3.345	6.007	2.952

Table 2 Nusselt Numbers(2nd kind)

$\alpha$	$U^* = -2$		$U^* = -1$		$U^* = 0$		$U^* = 1$		$U^* = 2$	
	$Nu_{ii}^{(2)}$	$Nu_{oo}^{(2)}$	$Nu_{ii}^{(2)}$	$Nu_{oo}^{(2)}$	$Nu_{ii}^{(2)}$	$Nu_{oo}^{(2)}$	$Nu_{ii}^{(2)}$	$Nu_{oo}^{(2)}$	$Nu_{ii}^{(2)}$	$Nu_{oo}^{(2)}$
0.1	10.526	5.679	11.191	5.260	11.906	4.834	12.657	4.418	13.500	4.020
0.2	6.937	5.981	7.667	5.446	8.499	4.882	9.447	4.333	10.528	3.825
0.3	5.541	6.187	6.316	5.583	7.241	4.928	8.350	4.291	9.679	3.711
0.4	4.777	6.346	5.582	5.699	6.583	4.979	7.384	4.280	9.401	3.651
0.5	4.289	6.479	5.117	5.803	6.181	5.037	7.559	4.291	9.352	3.626
0.6	3.946	6.598	4.795	5.902	5.912	5.099	7.405	4.318	9.413	3.625
0.7	3.699	6.706	4.558	5.997	5.720	5.166	7.317	4.357	9.530	3.641
0.8	3.507	6.808	4.377	6.088	5.578	5.237	7.270	4.404	9.675	3.669
0.9	3.354	6.905	4.234	6.179	5.470	5.310	7.247	4.457	9.843	3.706