

道路橋交通振動における状態推定へのカルマンフィルタの適用

岡 林 隆 敏* · 吉 村 徹**
手 塚 勝*** 加 賀 敏 明****Application of the Kalman Filter to State Estimation of
Bridge Vibration under Traffic Loads

by

Takatoshi OKABAYASHI*, Toru YOSHIMURA**, Masaru TEZUKA***
and Toshiaki KAGA****

This study concerned with state estimation of the bridge vibration under a moving vehicle using by the Kalman filter. A modal analysis approach is adopted that is based upon a finite strip idealization of the bridge deck. The vehicle is modeled as one degree of freedom system. The road surface irregularities are modeled as output of filter system subjected to the white noise. The state variables of the bridge, up to 5th order vibration, of the vehicle and road surface irregularities can be estimated from a observation point of the bridge by the Kalman filter. The effects and accuracy of the estimation procedure are discussed by numerical simulations.

1. はじめに

近年、都市高速道路高架橋における交通荷重によって発生する環境振動が、深刻な問題^{1) 2)}となっている。その主要な要因は、車両が橋梁上を走行するとき、路面凹凸や継手部段差などの路面不整により、車両振動が励起される。その振動は外力として橋桁に加わるため、橋梁振動が発生する。これらの振動エネルギーは、橋脚から地盤を通じて沿道一帯に伝搬し、建物の共振等により沿道住民に被害をもたらす。このような振動障害の対策の一つとして、道路橋の振動制御が考えられる。

一般に、振動制御の技術には、構造物の減衰を高めるもの、動吸振器など付加装置を設置するパッシブな振動制御³⁾、さらに、積極的に振動を抑制する力を発生して振動を制御するアクティブ振動制御^{4) 5)}があ

る。本研究は、アクティブ振動制御を対象としたものである。道路橋振動のアクティブ制御を行う場合、制御系の設計において基本となるのが、状態フィードバックである。状態フィードバックとは制御対象の状態量がすべて得られる場合、その状態量から制御量を求め、振動を抑制する制御方法である。しかし、実際の制御において、すべての状態量が得られることは希であるので、制御対象の直接測定可能な観測量から全ての状態変数を推定することが必要になる。この測定できない状態量を推定する機構がカルマンフィルタ^{6) 7)}であり、制御対象が雑音によって乱されるような場合の状態推定に適用される。

路面凹凸により加振された走行車両による、道路橋のアクティブ振動制御を考える場合、橋梁に設置した検出器（加速度計）から橋梁と車両の状態変数を推定

平成7年4月28日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**大学院修士課程土木工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

***佐賀県土木課 (Saga Prefectural Office)

****大学院博士課程海洋生産開発学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

して、これを状態フィードバックする必要がある。しかし、車両の状態変数は直接測定することはできない。本研究では、橋梁、車両および路面凹凸の推定にカルマンフィルタを適用した。本研究では、橋梁モデルは、より現実に近い振動解析モデルで考えるために、有限帯板法^{8) 9) 10)}を用いて2次元モデルを構成した。車両は、1自由度系でモデル化した¹¹⁾。路面凹凸として、白色雑音がフィルターである路面系に作用し、その出力を考えている。本研究では、1点の変位、速度を観測した場合、橋梁の各次振動の状態変数、車両の状態変数および路面凹凸をカルマンフィルタにより推定したものである。

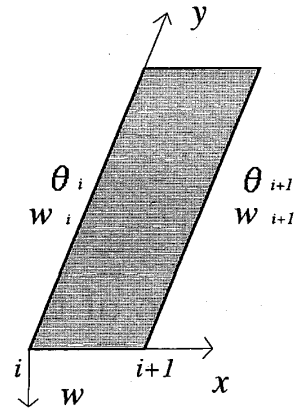


Fig. 2 Coordinate of the finite strip

2. 有限帯板法による振動解析

1) 有限帯板法による橋梁のモデル化

変位を、境界条件を満足するはりの振動モードで。級数表示し、 r 次までの項数でこれらを近似するものとする。図-1に、帯板のモデルを示す。ここで、帯板は、 n 分割されているものとする。図-2に示すような*i*および*i+1*接線ではさまれた帯板の変位 $w(x, y)$ は、次式で表される。

$$w(x, y) = S(x, y)\delta = [S_1 \dots S_r][\delta_1^T \dots \delta_r^T]^T \tag{1}$$

ここで、 $S_k(x, y)$ は、次式で定義される変位関数である。

$$S_k(x, y) = [\phi_1(x)\phi_2(x)\phi_3(x)\phi_4(x)]Y_k(y) \tag{2}$$

$\phi_1(x)\phi_2(x)\phi_3(x)\phi_4(x)$ は帯板の横方向の3次関数、 $Y_k(y)$ は境界条件を満足する縦方向の変位関数である。また、 δ_k は、*i*および*i+1*接線におけるたわみとたわみ角より構成されるベクトルである。

$$\delta_k = [w_i \theta_i \ w_{i+1} \ \theta_{i+1}]^T \tag{3}$$

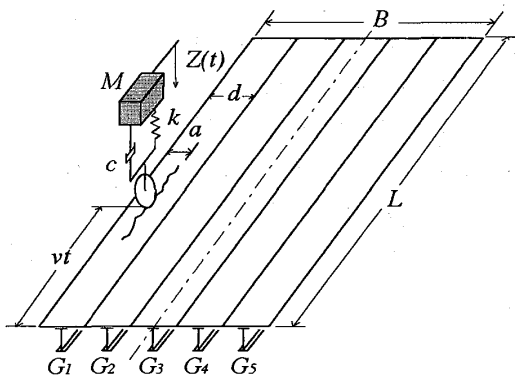


Fig. 1 Bridge-vehicle system

2) 振動解析

縦方向の変形を*m*次振動モードとした場合、非減衰自由振動の方程式は、次式で与えられる。

$$M_m \ddot{q}_m(t) + K_m q_m(t) = 0 \tag{4}$$

ここに、 $q_m(t)$ は、系における接線のたわみとたわみ角のベクトルである。 M_m は、系の質量マトリックス、 K_m は、系の剛性マトリックスである。

$q_m(t)$ が、調和振動していると仮定すると、

$$q_m(t) = \Psi_m \exp(i\omega_m t) \tag{5}$$

となり、 MK 型固有値方程式を解くことにより、*m*次振動の縦方向の振動数に対する、横方向の固有円振動数 ω_m が求められ、対応する振動モードベクトル Ψ_m が決まる。なお、横方向の振動数は *n* 次まで考慮するものとする。これらを固有円振動数マトリックスと振動モードマトリックスとして、次式で定義する。

$$\Omega_m = \begin{bmatrix} \omega_{1m}^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_{(2n+2)m}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_m = [\Psi_{1m} \ \dots \ \Psi_{(2n+2)m}] \tag{6}$$

3. 橋梁-車両-路面系の方程式

1) 橋梁の運動方程式

橋梁の変形を *m* 次振動モードで表した場合、接線の変位とたわみ角の全要素から構成される接線ベクトルを $q_m(t)$ とする。これは、振動モード Ψ_m と基準座標 $p_m(t)$ を用いて、次式で表せる。

$$q_m(t) = \Psi_m p_m(t) \tag{7}$$

i 接線と *i+1* 接線にはさまれた帯板要素の動的変位

は、

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^r S_k(x, y) [q_k(t)]_i \quad (8)$$

ここで、 $[q_k(t)]_i$ は、 $q_k(t)$ ベクトルの i 接線と $i+1$ 接線の変数より構成されるベクトルである。

橋梁に外力が作用し、さらに減衰を考慮した場合、橋梁の運動方程式は次式で与えられる。

$$M_m \ddot{q}_m(t) + D_m \dot{q}_m(t) + K_m q_m(t) = Q_m(t) \quad (9)$$

ここで、 M_m : 系の質量マトリックス、 D_m : 系の減衰係数マトリックス、 K_m : 系の剛性マトリックス、 $Q_m(t)$: 橋梁に作用する m 次の荷重ベクトルである。

コレスキー分解により(9)式を対角化する。その結果、次式を得る。

$$\dot{p}_k(t) + H_k \dot{p}_k(t) + \Omega_k p_k(t) = L_k^{-1} Z_k^T S_k(x, y)^T F(t) \quad (10)$$

ここで、 H_k , Ω_k , L_k : k 次の換算減衰係数マトリックス、固有振動マトリックス、換算質量マトリックス、 $F(t)$: 帯板 ($j, j+1$) に作用する車両の接地力、 Z_k : k 次の着目点のモードマトリックスである。

次に基準座標 $p_k(t)$ を合成したベクトル

$$p(t) = [p_1(t)^T \dots p_r(t)^T]^T \quad (11)$$

を用いると、次の式を得る。

$$\dot{p}(t) + H \dot{p}(t) + \Omega p(t) = L^{-1} Z^T S(a, vt)^T F \quad (12)$$

ここで、 H, Ω, L, Z はそれぞれ、 H_k, Ω_k, L_k, Z_k を1次から r 次まで対角に配置したマトリックスである。

2) 車両系の方程式

車両の垂直変位を $z(t)$ とすると、車両の接地力は、次のように表せる。

$$F(t) = -(M_s + M_u)g - M_s \ddot{z}(t) \quad (13)$$

ここで、 M_s, M_u は、それぞれ車両のばね上質量とばね下質量である。また、 g は重力加速度である。本解析では、車両の質量を全てばね上質量で考える。動的変動のみを考慮すると、(13)式は次のようになる。

$$F(t) = -M_s \ddot{z}(t) \quad (14)$$

車両が、橋梁から $x=a$ のレーンを走行する場合、車両の方程式は、車両直下の橋梁のたわみ $w(a, vt, t)$ 、路面凹凸 $r(t)$ を考慮して、次のようになる。

$$\ddot{z}(t) + 2h_0\omega_0(\dot{z}(t) - \dot{w}(a, vt, t) - \dot{r}(t)) + \omega_0^2(z(t) - w(a, vt, t) - r(t)) = 0 \quad (15)$$

ここに、 h_0, ω_0 はそれぞれ車両の減衰定数、固有

円振動数である。

3) 路面凹凸系の方程式

路面凹凸を図-3のようなパワースペクトル密度を有する正規確率過程でモデル化する。 $x=vt$ で変換した、時間軸に対するパワースペクトル密度は、

$$S_r(\omega) = \frac{S_0}{\omega^2 + \beta^2} \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 $S_0 = 2\pi vA$, $\beta = 2\pi va$, $A = 1.0 \times 10^{-3}$ (cm²/m), $a = 0.05$ である。このパワースペクトル密度を有する定常解過程は、強度 σ^2 を有する白色雑音 $n(t)$ を入力する路面系の応答で表現できる。

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = n(t) \quad (17)$$

ここで、白色雑音過程の特性は、平均値が0で、自己相関関数が

$$E[n(t_1)n(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (18)$$

である。なお、 $\sigma^2 = 2\pi S_0$ である。

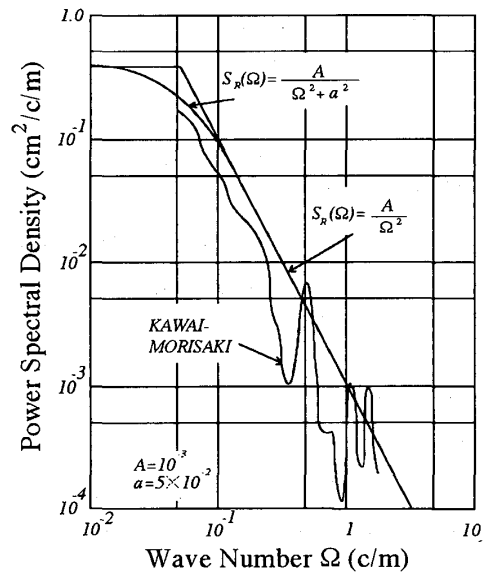


Fig. 3 Power spectral density of the road surface irregularities

4. 確率微分方程式と共分散方程式

1) 確率微分方程式

橋梁の振動は r 次振動まで考慮し、橋梁系の状態変数ベクトルを、次のように定義する。

$$P(t) = [p(t)^T \dot{p}(t)^T]^T \quad (19)$$

また、車両を1自由度系でモデル化した場合、車両-路面系の状態変数は、次のようになる。

$$V(t) = [z(t) \dot{z}(t) r(t)]^T \quad (20)$$

これらの状態変数を合成して、橋梁-車両-路面系の状態変数 $X(t)$ を、次のように定義する。

$$X(t) = [P(t)^T V(t)^T]^T \quad (21)$$

この状態変数を用いると、橋梁-車両-路面系の状態方程式は、次のようになる。

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)n(t) \quad (22)$$

任意の点の橋梁の変位と速度を求める場合、観測方程式は、一般に、次のようになる。

$$Y(t) = CX(t) \quad (23)$$

ここで、 $A(t)$ はシステムマトリックス、 $B(t)$ は外力係数マトリックス、 C は観測マトリックスである。

2) 共分散方程式

橋梁-車両-路面系の状態方程式が(22)式で表せるとき、帯板 ($i, i+1$) の変位応答の分散は、次式で与えられる。

$$E[w^2(x, y, t)] = S(x, y) Z^t E[P(t)P(t)^T] Z^{tT} S(x, y)^T \quad (24)$$

ここに、 $E[\]$ は平均のための演算子である。この式における $E[P(t)P(t)^T]$ は、

$$R_x(t) = E[X(t)X(t)^T] \quad (25)$$

の要素として求められる。橋梁上を車両が走行することによる、橋梁-車両-路面系の共分散の時間的変化は、次の共分散方程式で支配されている。

$$\begin{aligned} \dot{R}_x(t) &= A(t)R_x(t) + R_x(t)A(t)^T + B(t)\sigma^2 B(t)^T \\ R_x(t_0) &= R_{x0} \end{aligned} \quad (26)$$

この場合に、共分散方程式の初期条件は、次のように考える。車両は無限遠点から発進し、定常状態に達してから橋梁に進入する。車両が進入するまで橋梁は制止しているものとする。この条件の下では、車両-路面系は、橋梁系と独立である。従って、初期条件となる車両-路面系の共分散は、定常状態の共分散方程式を解くことにより求められる。

$$A_V R_V + R_V A_V^T + B_V \sigma^2 B_V^T = 0 \quad (27)$$

ここで、 A_V 、 B_V は、車両-路面系における、システムマトリックスと外力係数マトリックスである。

5. カルマンフィルタによる状態推定

道路橋のアクティブ制御を考える場合、橋梁に設置した検出器(加速度計)から橋梁と車両の状態変数を推定して、これを状態フィードバックする必要がある。

本研究では、橋梁に設置した1点の検出器(加速度計)から得られる橋梁振動の変位と速度を観測量とし、これよりカルマンフィルタを用いて橋梁-車両-路面系の状態変数を推定する。カルマンフィルタによる状態推定の概要を図-4に示した。カルマンフィルタを適用するためには、観測量に付加する雑音が理論的に必要である。そこで、本研究では、観測量に仮想的な雑音を付加させ、カルマンフィルタを構成している。

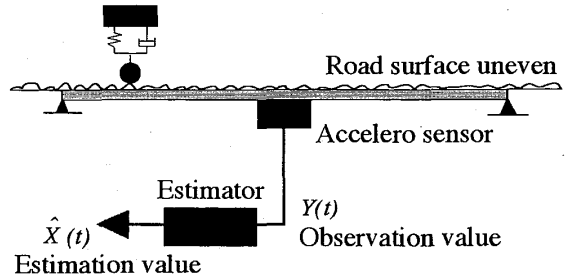


Fig. 4 State estimation by the Kalman filter

(23)式に仮想的な雑音 $v(t)$ を付加させ、観測量を次式のように表す。

$$Y_v(t) = CX(t) + v(t) \quad (28)$$

$v(t)$ は、観測雑音を想定した白色雑音ベクトルで、確率特性は、平均値0で、自己相関関数は、次のようになる。

$$E[v(t_1)v(t_2)^T] = \sum_v \delta(t_1 - t_2) \quad (29)$$

(28)式を用いて、カルマンフィルタは次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= \{A(t) - G_k(t)C\} \hat{X}(t) + G_k(t) Y_v(t) \\ \hat{X}(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $\hat{X}(t)$ は推定状態変数で、 $G_k(t)$ はフィードバックゲインであり、次式で表せる。

$$G_k(t) = S(t) C^T \Sigma_v^{-1} \quad (31)$$

この式の $S(t)$ は、(29)式の Riccati 方程式、

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= A(t)S(t) + S(t)A(t)^T - S(t)C^T \Sigma_v^{-1} C S(t) \\ &\quad + B(t)\sigma^2 B(t)^T \\ S(t_0) &= S_0 \end{aligned} \quad (32)$$

より求められる。

6. 橋梁と車両の緒元と振動特性

解析の対象とした橋梁は、阪神高速道路高架橋の鋼単純活荷重合成桁であり、その緒元を表-1に示す。

Table 1 Characteristics of the bridge

Structure type	Composite girder
Structure standing	The first grade bridge
Bridge length	27.0m
Span length	26.4m
Width	17.6m
Traffic lane	4 lane load
Design load	TL-20

Table 2 Section constant of orthotropic plate

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
$D_x(\text{kg} \cdot \text{m})$	$14.8 \cdot 10^6$	$14.8 \cdot 10^6$	$14.8 \cdot 10^6$	$14.8 \cdot 10^6$	$14.8 \cdot 10^6$
$D_y(\text{kg} \cdot \text{m})$	$886.9 \cdot 10^6$	$205.1 \cdot 10^6$	$205.1 \cdot 10^6$	$205.1 \cdot 10^6$	$886.9 \cdot 10^6$
$D_{xy}(\text{kg} \cdot \text{m})$	$3.0 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^6$	$3.0 \cdot 10^6$
$D_1(\text{kg} \cdot \text{m})$	0	0	0	0	0
$d_k(\text{kg} \cdot \text{m})$	1.925	3.850	3.850	3.850	1.925

Table 3 Characteristics of the vehicle

Weight(t)	20
Frequency(Hz)	3.0
Damping constant	0.03

Table 4 Frequencies and damping constant

Damping	0.02				
Natural frequency(Hz)	1 st	2 nd	3 rd	4 th	4 th
	3.64	5.01	7.62	12.41	15.55

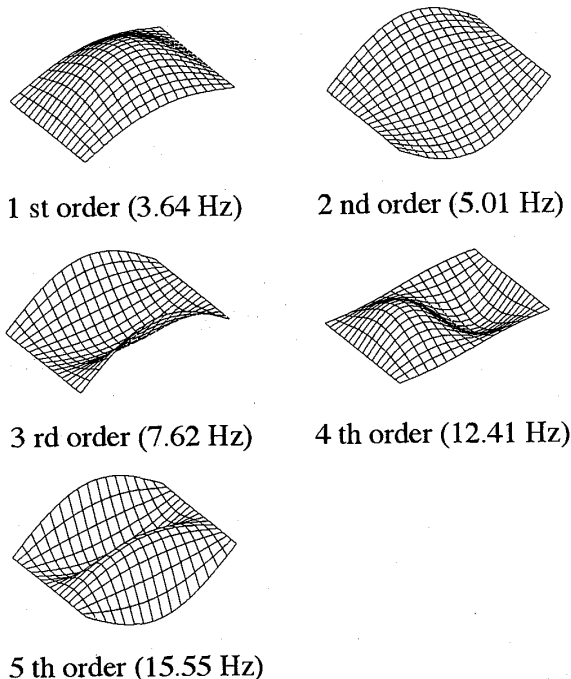


Fig. 5 Vibration modes of the bridge

この橋梁を直方異方性板でモデル化する。断面定数は表-2のようになる。このモデルを用い、振動解析を行った。橋梁上を走行する車両は単一車両とし、1自由度のばね質点系でモデル化した。その車両の諸元を表-3に示す。解析より得た橋梁の固有振動数を表-4に、振動モードを図-5に示す。応答解析では、5次振動までを考慮した。また、橋梁の減衰定数はすべて0.02とした。

7. 数値解析と考察

応答解析では、車両は一定の速度 $v=10$ (m/sec) で橋梁の幅員中央を走行した場合を考えた。着目点は車両走行上の支間中点とし、観測雑音に含まれる雑音の割合は、最大応答に対して、標準偏差で5%であるものとした。

初期条件を考慮しなかった場合と初期条件を考慮した場合について、カルマンフィルタによる状態推定を行なった。計算は、初期条件を考慮しない場合と、初期条件を考慮した場合について行った。それぞれの図の実線はカルマンフィルタによる推定値であり、点線はシミュレーションによる応答値である。

(1) 初期条件を考慮しない場合

1) 橋梁各次振動の状態推定

図-6は橋梁の各次振動の推定を示した。また、図-7には橋梁系の状態推定を示した。図-6をみると、各次振動ともシミュレーションによる応答値とカルマンフィルタによる推定値の波形には、ほとんど差は認められない。両者の波形はほとんど一致しており、カルマンフィルタによる推定が良くできている。図-7においても、橋梁の変位応答と速度応答のそれぞれの推定値はシミュレーションの応答波形とほとんど一致しており、良好な状態量推定を行っていることが分かる。

2) 車両の状態推定

図-8は車両系の状態推定を示したものである。初期条件を考慮していないので、車両系の応答は0から始まっている。最初の0.2秒間で、カルマンフィルタによる推定値が、ほとんど変動がみられないのに対し、シミュレーションの応答値ではすぐに変化が現れている。a) 車両の変位応答をみると、全体的に両者の波形にはずれがみられる。状態量の推定は良好であるとは言えない。しかし、車両の振動数は、3 Hzに近い変動となっている。b) 車両の速度応答では、変位応答ほど波形に違いはみられず、0.9秒から1.9秒の間では、かなり両者の波形が近い値をとっている。速度応答でも、変位応答の時と同様に振動数は等しくな

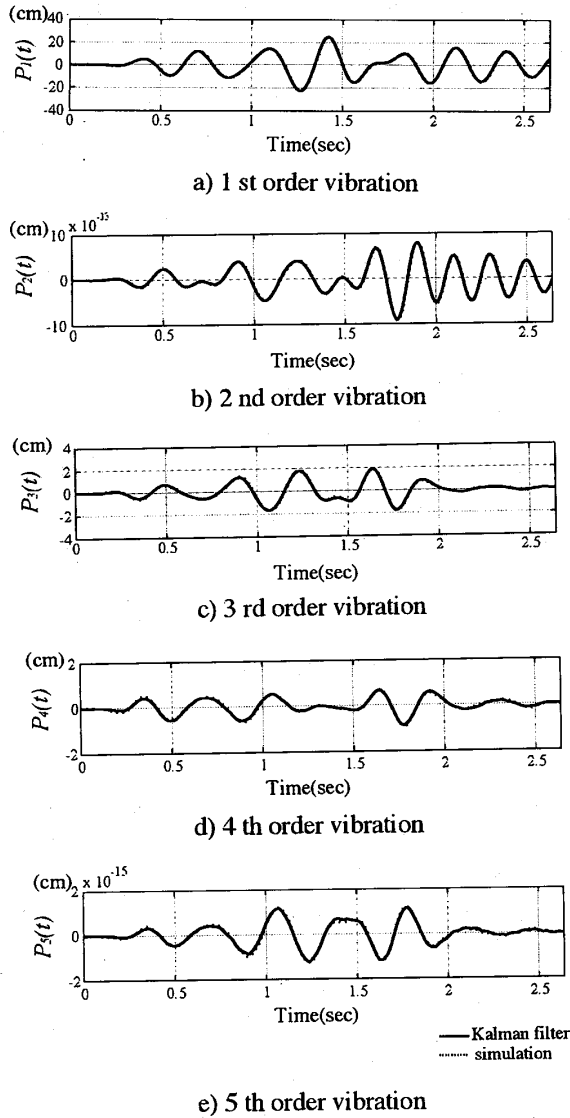


Fig. 6 State estimation of the bridge (not considered the initial values)

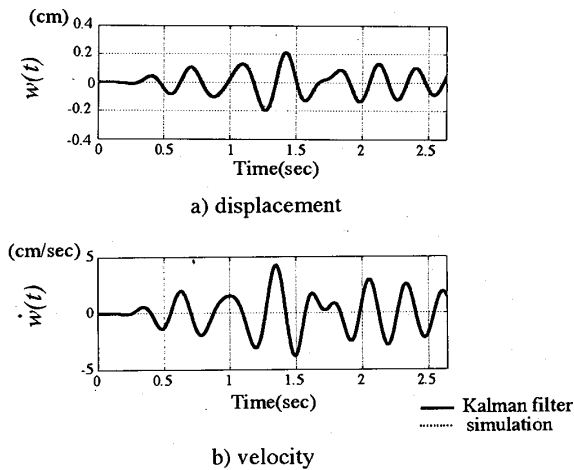


Fig. 7 State estimation of the bridge (not considered the initial values)

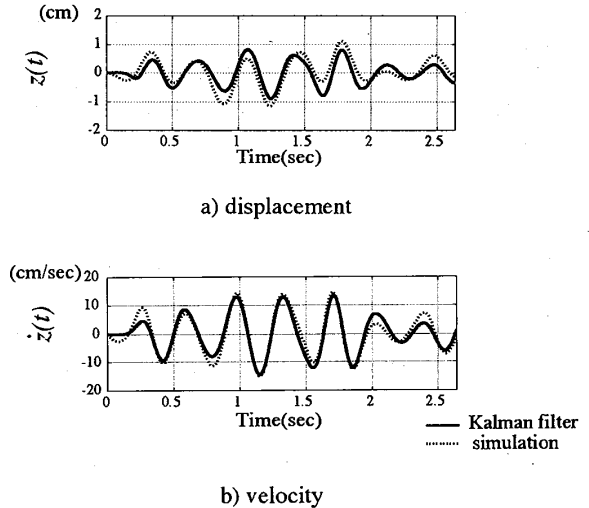


Fig. 8 State estimation of the vehicle (not considered the initial values)

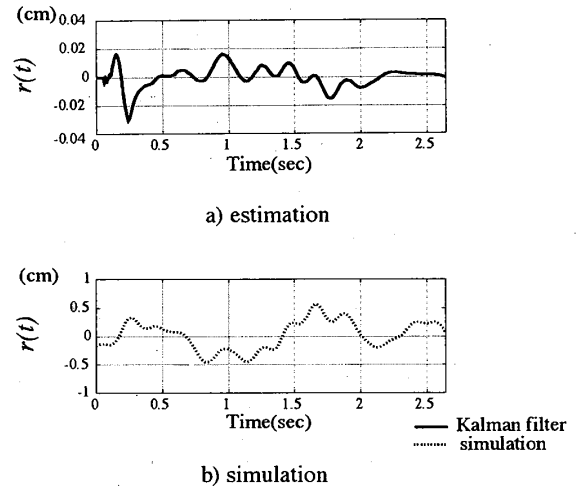


Fig. 9 Estimation of road surface irregularities (not considered the initial values)

っている。変位応答に比べると比較的状态量の推定ができていないが、正確な推定はできていない。

3) 路面凹凸の状態推定

図-9は路面凹凸の状態推定を示したものである。a)の推定値の波形では、最も変動している所でも0.03cm程度で、b)のシミュレーションによる波形の振幅レベルとは大きく違っている。路面凹凸に関しては、カルマンフィルタによる推定ができていない。

(2) 初期条件を考慮した場合

1) 橋梁各次振動の状態推定

図-10は橋梁の各次振動の推定を示したものである。図-11は橋梁系の状態推定を示したものである。図-10、図-11ともに、シミュレーションによる応答値とカルマンフィルタによる推定値の波形に、大きな

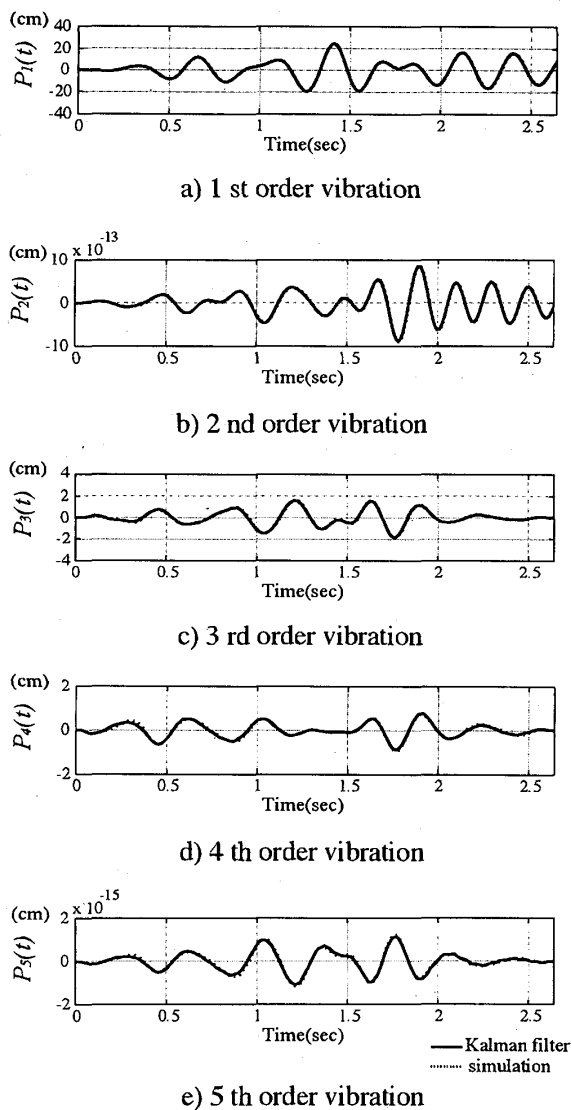


Fig. 10 State estimation of the bridge (considered the initial values)

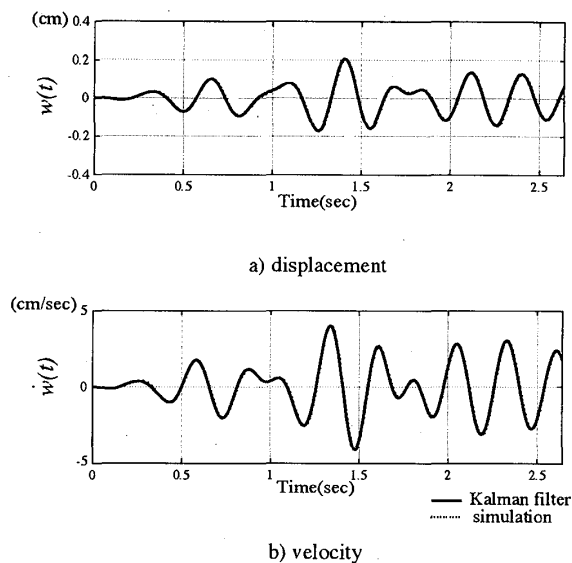


Fig. 11 State estimation of the bridge (considered the initial values)

違いはみられなかった。初期条件を考慮しなかった場合と同様に、カルマンフィルタによる状態推定は良い結果が得られた。

2) 車両の状態推定

図-12は車両系の状態推定を示したものである。初期条件を考慮したので、車両系の応答は車両が橋梁に載った時点 ($t=0$) ですでに振動している。a) 車両の変位応答では、最初の0.2秒間はカルマンフィルタによる推定値とシミュレーションによる応答値の波形がほぼ一致している。しかし、それ以後は初期条件を考慮しなかった場合と対して変わらない波形となっている。b) 車両の速度応答でも、最初の0.2秒間で両者の波形の一致がみられる。しかし、それ以外は初期条件を考慮しなかった場合と同じ傾向を示してい

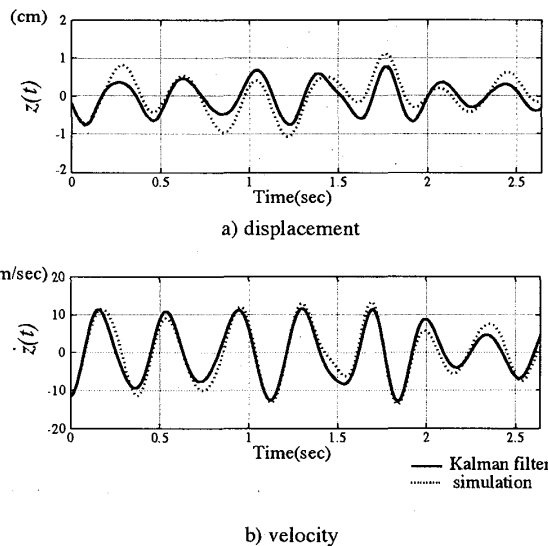


Fig. 12 State estimation of the vehicle (considered the initial values)

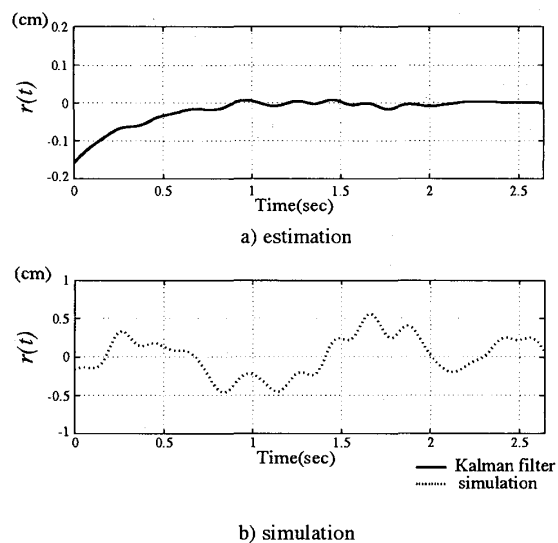


Fig. 13 Estimation of road surface irregularities (considered the initial values)

る。車両系の状態推定は、初期条件を考慮した場合でも、変位応答の推定は十分にはできていない。

3) 路面凹凸の状態推定

図13は路面凹凸の状態推定を示したものである。図-9のa)に比べると振幅レベルは大きくなっている。しかし、シミュレーションによる波形との比較では、まだ振幅レベルは小さい。推定した路面凹凸波形の変動も、シミュレーションと異なる傾向を示している。

8. まとめ

本研究は、直交異方性板でモデル化したプレートガーダー橋に対して、アクティブ制御を行う場合に必要な量となる状態量の推定を、カルマンフィルタを用いて行い、その有効性を検討した。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 橋梁の上部構造を直交異方性板でモデル化し、橋梁方向だけでなく幅員方向の振動性状が表現可能な2次元の解析モデルを構成した。

(2) 路面凹凸を、白色雑音過程を入力するフィルタの出力でモデル化し、橋梁-車両-路面系の方程式を確率微分方程式で表現した。このことにより、カルマンフィルタの基礎方程式を定式化することができた。

(3) 橋梁-車両-路面系の状態推定にカルマンフィルタを適用した場合、橋梁の各次振動の状態変数および橋梁系の状態変数は、初期条件を考慮しなかった場合でも、考慮した場合でも良好な推定結果が得られた。

(4) カルマンフィルタを用いた車両の状態推定では、変位応答は、初期条件を考慮しなかった場合でも、考慮した場合でも良好といえる結果は得られなかった。速度応答は、橋梁の場合ほど正確な推定はできていないが、比較的良い推定結果がでていいる。路面凹凸の状態推定は、初期条件を考慮しなかった場合でも、考慮した場合でも良い結果が得られなかった。

解析結果より、観測量に観測雑音が混在するとした

カルマンフィルタでは、橋梁の各次振動と車両の状態変数の推定が可能である。この結果を踏まえて、さらに問題点を解決するとともに、今後は、より現実的な振動解析を行うために、車両を2自由度でモデル化し、カルマンフィルタの有効性を検証する。

参考文献

- 1) 山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答-衝撃係数-に関する考察，土木学会論文報告集148号，pp.40~50，1967,12.
- 2) 梶川康男・大嶋信太郎：周辺環境への影響を考慮した高架橋の防振効果に関する一解析法，土木学会論文報告集，第341号 pp.79~88，1984,4.
- 3) 制震構造-理論と実際-，小堀，鹿島出版会，1993年.
- 4) 矢作枢・吉田和彦：高架橋における交通振動のアクティブコントロール，土木学会論文報告集，第356号-3，pp.435-444，1985,4.
- 5) 小堀鐸二，坂本光男：アクティブ・マス・ドライバースystem，制振構造の現状-高層建物の制振-，日本建築学会関東支部構造部会，1989,12.
- 6) 白石昌武：入門現代制御理論，所学出版，1987年11月.
- 7) 有本卓：カルマン・フィルター，産業図書，昭和52年1月.
- 8) 草間晴幸・谷山健：有限帯板法，日刊工業新聞社，1994年4月.
- 9) Y. K. Cheung : finite strip method in structural analysis, PERGAMON PRESS, 1976.
- 10) 岡林隆敏・竹下渡・小西保則：単一車両によるプレートガーダー橋の不規則振動解析，構造工学論文集 Vol.37A，pp.965~973，1991年3月.
- 11) 橋梁振動の計測と解析，技報堂出版，1993年.