

MATLAB言語による道路橋交通振動の解析

岡 林 隆 敏* ・加 賀 敏 明**
甲 斐 利 彦***

HIGHWAY BRIDGE VIBRATION ANALYSIS BY MATLAB

by

Takatoshi OKABAYASHI*, Toshiaki KAGA**, and Toshihiko KAI***

MATLAB is a matrix based system for engineering calculations and a kind of language designed solely to do matrix manipulation. This study, we apply MATLAB programing to the numerical analysis for highway bridge vibration problems under MATLAB programing of the bridge vibration such as the simulation of road roughness, the deterministic response analysis, the stochastic response analysis and the optimal design of tuning mass dampers are treated. The numerical calculation methods of the covariance equations by Runge-Kutta method and Pade approximate method are proposed. Using by MATLAB, programing environment can be rapidly improved.

1. はじめに

近年, 多くの分野で数式処理ソフトウェア MATLAB, Mathematica, Maple, HiQ などが使用されるようになってきた。特に, 制御工学の分野では, MATLAB 言語¹⁾の使用が一般的になっている。MATLAB は現在に至るまで米国やヨーロッパの多くの大学, 研究所において教育, 研究のため使われ改良が加えられてきた²⁾。MATLAB は, マトリックス演算を中心に行うために開発された言語であるが, さらに複雑な連立微分方程式を容易に解くことができる。BASIC, FORTRAN, C 言語などの高級言語と比べ, 通常のプログラミングを書くことなく, 問題を解くプロセスを数学的に紙面に書いたように表示できるようになっている。MATLAB の豊富な関数群によるプログラムの簡略化だけでなく, MATLAB の持つグラフィック機能により開発環境は著しく向上する。また, TOOLBOX と呼ばれている特定分野の解法を集めたものが, 数多く用意されている³⁾。TOOLBOX とは,

特定の種類の問題を解くために MATLAB 関数(m-ファイル)を包括的に集めることによって, MATLAB 環境を拡張するものである。さらにこの TOOLBOX を使用者自身が作成できるような拡張性がありこれが大きな特徴となっている。著者らはこれまで, MATLAB を構造解析や不規則振動論等に適用し, 解析を行ってきた。本論文では, 道路橋交通振動の解析における適用例について報告する。

2. MATLAB の概要と作成したプログラム

MATLAB は1980年に開発され, 当初 FORTRAN であったものが現在ではC言語による記述⁴⁾が行われている。MATLAB のプログラミングはベクトルやマトリックス演算を行う際, 紙面に書くように入力でき, プログラム開発環境が著しく向上する。MATLAB の構成は基礎的な計算を行う基本モジュールと, それに処理機能を付加させる拡張 TOOLBOX により構成されている。制御用の基本的な処理を行う Control

平成7年10月27日受理

* 社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

** 大学院海洋生産科学研究科海洋生産開発学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

*** (株)大日本コンサルタント (Nippon Engineering Consultants Co. Ltd.)

System TOOLBOX, 非線形系の最小化または最大化, 線形計画法などを行う Optimization TOOLBOX⁴⁾, フィルターの設計, 離散フーリエ変換, 不規則信号の統計処理を行う Signal Processing TOOLBOX⁵⁾, H_∞制御などのロバスト制御系を設計する Robust Control TOOL BOX⁶⁾ などがある. 立体的な三次元グラフの作成, 色の濃淡を利用し 2 次元グラフを 3 次元グラフに拡張するなどのグラフィック機能⁷⁾を持っている. このような特色をもつ MATLAB の機能をさらに向上させるために, 著者らは, Table 1 のようなプログラムを作成した.

Table 1 Program for bridge vibration analysis

Deterministic response analysis
Simulation of road roughness Time variable differential equation by Runge-Kutta method
Random response analysis
Covariance equation by Runge-Kutta method Covariance equation by pade method Optimum design of TMD

3. 時刻歴応答解析

(1) 橋梁-車両-路面系の方程式

Fig. 1 のような路面凹凸を含む橋梁上を 1 自由度でモデル化された車両が走行するときの橋梁および車両の方程式は,

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) q_k(t) \quad (1)$$

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\mu_{kz} \phi_k(vt) \ddot{z}(t) \quad (2)$$

$$\ddot{z}(t) + 2h_0 \omega_0 \{\dot{z}(t) - \dot{y}(vt, t) - \dot{r}(t)\} + \omega_0^2 \{z(t) - y(vt, t) - r(t)\} = 0 \quad (3)$$

ここで, $y(x, t)$: x 点の橋梁の変位応答, $\phi_k(x)$: k 次の振動モード, $q_k(t)$: 基準座標, $z(t)$: 車両の垂直変位, $r(t)$: 路面凹凸, $\omega_k, \omega_0, h_k, h_0$: それぞれ, 橋梁および車両の固有振動数と減衰定数, μ_{kz} : 橋梁の k 次の有効質量 m_k と車両の質量 m_0 との質量比, v : 車両の走行速度である.

次のような状態変数を導入すると,

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \cdots q_n(t)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{q}(t)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(t)^T \quad z(t) \quad \dot{z}(t)]^T \quad (5)$$

(2) (3) 式は, 次の状態方程式で記述することができ

る.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(t) \mathbf{r}(t) \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{A}_1(t)$: 橋梁-車両系の係数マトリックス, $\mathbf{B}_1(t)$: 外力マトリックス, $\mathbf{r}(t)$: 路面凹凸 $r(t)$ とその時間微分 $\dot{r}(t)$ から構成される外力ベクトルである. なお, 図中の m_0, k_0, c_0 はそれぞれ車両の質量, バネ定数および, 減衰係数である.

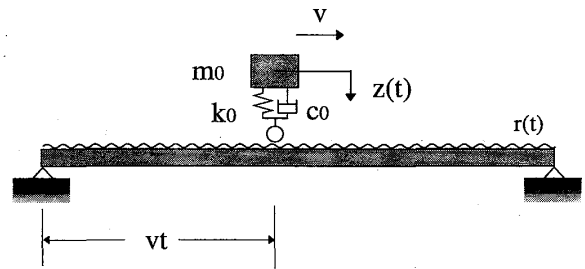


Fig. 1 Bridge-vehicle system.

(2) 路面凹凸のモデル化

路面凹凸のパワースペクトル密度⁸⁾ は,

$$S_r(\omega) = S_0(\omega^2 + \beta^2) \quad (7)$$

で近似することができる. ここで, $S_0 = 2\pi v A$, $\beta = 2\pi v a$ である.

長崎県の荒川橋で決定した路面凹凸のパワースペクトル密度を Fig. 2 に示した.

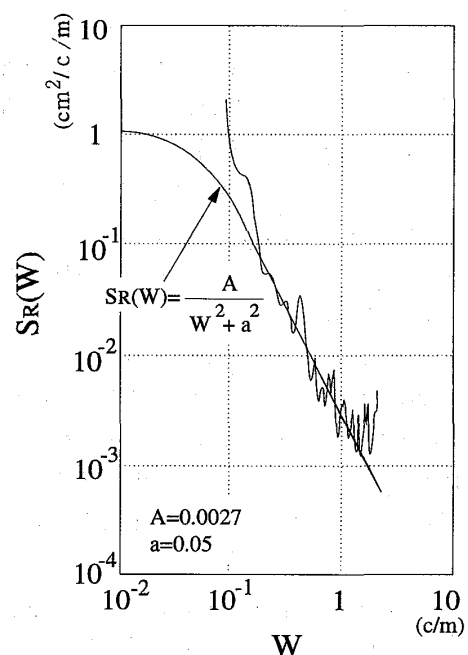


Fig. 2 Power spectral density of road roughness.

パワースペクトル密度が与えられた場合、路面凹凸は次のような三角級数モデル⁹⁾により合成することができる。

$$r(t) = \sum_{k=1}^m a_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \quad (8)$$

$$\sigma_k^2 = 4S_r(\omega) \cdot \Delta\omega$$

$$\omega_k = \omega_L + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega, \Delta\omega = (\omega_U - \omega_L)/m \quad (9)$$

なお、 a_k ：平均値 0，標準偏差 σ_k を有する正規乱数， ϕ_k ：0～2 π の一様乱数， ω_L ， ω_U ：合成する波形の凹凸数の下限と上限， m ：周波数の分割数である。

(3) プログラムの概要

シミュレーションを行うために、路面凹凸を発生させるプログラムを示した。橋梁-車両系の方程式は不規則な外力を入力とする時変系の方程式になる。定数係数の応答計算を解くプログラムは、lsim として準備されているが、時変係数系のプログラムはない。そこで、このためのプログラムを時変係数系の Runge-Kutta 法により作成した。それぞれ、Program 1 と Program 2 である。プログラム中の、% はコメント行、; はその行の区切りの記号である。function はファンクションサブプログラムを記述するためのものである。

①路面凹凸の発生

Program 1 は、路面凹凸を発生させるプログラムである。メインファイルでは、 T ：路面凹凸を発生させる時間、 dt ：時間刻み、 f_l ， f_u ：下限と上限の周波数、 m ：周波数分割数、 v ：車両の速度、 A ， a ：路面のパラメータ、 n ：乱数の初期条件である。ファンクションファイル(1)は、波形を合成するルーチンである。一般的なパワースペクトル密度をファンクションファイル(2)で定義することにより、一般的なスペクトルにも対応できる。

②不規則外力を入力とする時変係数系のための

Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法¹⁰⁾を橋梁-車両系に適用した場合を考える。(6)式は一般的に次式で表すことができる。

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad (10)$$

Runge-Kutta 法では、この式を次のように差分表示する。

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{6} \{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\} \quad (11)$$

ここに、

$$k_1 = \Delta t f(x, t)$$

$$k_2 = \Delta t f(x + k_1/2, t + \Delta t/2)$$

$$k_3 = \Delta t f(x + k_2/2, t + \Delta t/2)$$

$$k_4 = \Delta t f(x + k_3, t + \Delta t)$$

Program 2 は①の路面凹凸を外乱とした場合の、橋梁中点の変位応答を求めるためのものである。ただし、橋梁は 1 次振動のみを考慮している。その内容は、メインファイルで(3)式の $\omega_0 h_0$ ，時刻： t_0 ，ポイント数： n ，時間刻み： d を入力し、路面凹凸の情報 *rr.mat* をよびだす。これらを引数として初期条件を求めるファンクションファイル(1)に入力し *lsim* 関数により橋梁直前の車両の初期条件 x_0 を求める。Runge-Kutta 法によるファンクションファイル(2)では、車両-橋梁系のパラメータおよび方程式を定義したファンクションファイル(3)とのあいだで、(11)式より、橋梁中点の変位応答 $y(x, t)$ を求める。これを説明すると、まず最初にメインファイルより車両の初期値 x_0 が他のパラメータとともに入力される。これらはファンクションファイル(3)に入力され x が求められ再びファンクションファイル(2)にもどされ k_1 が求まる。これが(11)式の値である。同じように k_2 ， k_3 ， k_4 も決まる。これらの値から次の点の x_0 が決定される。これは、

Program-1 Simulation of road roughness.

Main file

```
%ROAD ROUGHNESS
T=10.0; dt=0.01; fu=6.0; fl=0; m=50; v=10;
A=0.0027; a=0.05; n=1;
[rr,t]=road(T,dt,fu,fl,m,v,A,a,n);
plot(t,rr)
```

Function file (1)

```
function [rr,t]=road(T,dt,fu,fl,m,v,A,a,n)
wu=2*pi*fu; wl=2*pi*fl; ns=T/dt+1;
dw=(wu-wl)/m;
randn('seed',n); ra=randn(1,m);
rand('seed',n+1); rb=rand(1,m);
t=0:dt:T;
r=zeros(size(t)); rd=zeros(size(t));
for k=1:m
w=w1+(k-1/2)*dw;
sgm=sqrt(4*psd(w,v,A,a)*dw);
ak=sgm*ra(k); fai=2*pi*rb(k);
r=r+ak.*(sin(w*t+fai));
rd=rd+w*ak.*(cos(w*t+fai));
end
rr=[rr;r;rd];
```

Function file (2)

```
function sx=psd(w,v,A,a)
s0=2*pi*v*A; bb=2*pi*v*a;
sx=s0/(w^2+bb^2);
```

Program-2 Runge-Kutta method for vectol equation.

Main file

```
%BRIGDE VIBRATION
f0=3.0; w0=2*pi*f0; h0=0.03;
t0=0; n=401; d=0.01; L=40;
load rr.mat;%ROAD ROUGHNESS
RV1=rr(1:2,1:401);RB1=RV1';
x0=vehicle(w0,h0,RV1);
RV2=rr(1:2,402:803);RB2=RV2';
[t,Y]=runge(t0,n,d,x0,RB2);
y=sin(pi*(L/2)/L)*Y(1,:);
plot(t,y)
```

Function file (1) (Initial condition)

```
function x0=vehicle(w0,h0,RV)
t=0:0.01:4;
a=[0 1;-w0^2 -2*h0*w0]; b=[0 0;w0^2 2*h0*w0];
c=[1 0];d=[0 0];
r=RV';
[y,x]=lsim(a,b,c,d,r,t);
x0=[zeros(1,2) x(401,:)];
```

Function file (2) Runge-Kutta method

```
%RUNGE-KUTTA METHOD FOR
%VECTOR EQUATION
function [t,Y]=runge(t0,n,d,x0,RB2)
Y(:,1)=x0;
t(1)=t0;th=t0;
for k=2:n
    t(k)=th;
    Y(:,k)=x0;
    k1=func(th,x0,RB2,d)*d;
    th=th+d/2; kk1=x0+k1/2;
    k2=func(th,kk1,RB2,d)*d;
    kk2=x0+k2/2;
    k3=func(th,kk2,RB2,d)*d;
    th=th+d/2; kk3=x0+k3;
    k4=func(th,kk3,RB2,d)*d;
    x0=x0+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

Function file (3)

```
function x=func(th,x0,RB2,d)
nnn=round(th/d+0.1*d);
DDD=[RB2(nnn+1,:)];
%BRIDGE PARAMETER
L=40; EI=24.41*10^8; M=10.68*10^4;
g=9.8; h=0.02; m=M/2;
w=(pi/L).^2*sqrt(EI/(M/L/g));
%VEHICLE PARAMETER
h0=0.03; f0=3.0; w0=2*pi*f0;
m0=20*10^3; v=10;
%MATRIX(A,B)
Rm=m0/m;
F=sin(pi/L*v*th);
a1=-w^2-w0^2*Rm*F^2;
a2=-2*h*w-2*h0*w0*Rm*F^2;
a3=w0^2*Rm*F;
a4=2*h0*w0*Rm*F;
a5=w0^2*F; a6=2*h0*w0*F;
a7=-w0^2; a8=-2*h0*w0;
A=[0 1 0 0;a1 a2 a3 a4;
    0 0 0 1;a5 a6 a7 a8];
b1=-Rm*w0^2*F-Rm*2*h0*w0*F;
b2=[w0^2 2*h0*w0];
B=[zeros(1,2);b1;zeros(1,2);b2];
x=A*x0+B*DDD;
```

(5)式の橋梁の状態ベクトル, 車両の変位, 速度, および路面凹凸から状態変数ベクトル $X(t)$ を,

$$X(t) = \begin{bmatrix} q(t)^T & \dot{q}(t)^T & z(t) & \dot{z}(t) & r(t) \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

と定義すると, (2), (3), (12)式は次のように白色雑音過程を入力とする伊藤型の微分方程式で表すことができる.

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)n(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (14)$$

$A(t)$, $B(t)$ マトリックスの要素は省略する. 詳細は文献8)を参照されたい.

(2) 共分散方程式

橋梁振動の分散を求める. 応答の分散は,

$$E[y(t)^2] = \phi^2(t)E[q^2(t)] \quad (15)$$

となり, 状態マトリックス $X(t)$ の共分散の要素より求められる.

応答 $x(t)$ の平均値回りの変動のみに着目すると, $X(t)$ の共分散は,

$$R_x(t) = E[X(t)X(t)^T] \quad (16)$$

と定義できる. したがって, (14)式に対応する共分散方程式は,

(11)式の $x(t+\Delta t)$ に相当する. この作業を $n-1$ 回繰り返して Y としてメインファイルにもどし, これと橋梁のモード $\sin(\frac{\pi}{2})$ の積により, 橋梁中点の変位応答 y をプロットさせる.

4. 不規則応答解析

(1) 確率微分方程式

(7)式のパワースペクトル密度を有する定常確率過程は, 強度 σ^2 を有する白色雑音 $n(t)$ を入力とする次のような路面系モデルで示すことができる.

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = n(t) \quad (12)$$

ただし, $\sigma^2 = 4\pi^2 v A$ である.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_x(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{R}_x(t) + \mathbf{R}_x(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)^T\sigma^2, \\ \mathbf{R}_x(t_0) &= \mathbf{R}_{x0}\end{aligned}\quad (17)$$

また、初期条件は、車両が無限遠点から発進し、定常状態に達した後に車両は橋梁に進入するものとする。車両が橋梁の $x=t$ 点に位置し、定常な接地力を加えるものとする、定常応答解析の問題になる。この場合(17)式は次の連立方程式になる。

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{R}_x(t) + \mathbf{R}_x(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{B}(t)^T\sigma^2 = \mathbf{0} \quad (18)$$

(3) プログラムの概要

ここでは(2)で論じた共分散方程式の Runge-Kutta 法と Pade 近似による解析プログラムの説明を行うが、プログラムの構成は Program 2 の橋梁-車両系のプログラムとほぼ同じであるため使用する関数及びマトリックスの違いについて述べるにとどめる。

① Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法による不規則応答解析のプログラムを、Program 3 に示す。メインファイルは Program 2 とほぼ同じである。初期条件を求めるファンクションファイル(1)では、係数マトリックス A と外力マトリックス B が共分散方程式の係数に変わり、(18)式のリアプノフ関数により車両の初期条件を求めている。Runge-Kutta 法によるファンクションファイル(2)は、Program 2 と同一であるため、式の部分は省略する。共分散方程式のファンクションファイル(3)では、橋梁-車両系の方程式に代わり、(17)式が定義されている。ただし、係数マトリックス A 、外力マトリックス B の要素の定義については省略する。

② Pade 近似

Pade 近似¹¹⁾は Runge-Kutta 法に比べ数値積分において無条件安定な解析を行える。

共分散方程式(17)式を差分表示すると、2 次の Pade 近似式 $e^{A_k d}$ を用いて、

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k &= e^{A_k h} \mathbf{R}_{k-1} e^{A_k h T} + \frac{1}{2} [\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T \\ &\quad + e^{A_k h} \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}^T e^{A_k h T}] \sigma^2 h\end{aligned}\quad (19)$$

$$e^{A_k d} = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A}_k \right) \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2} \mathbf{A}_k \right)^{-1} \quad (20)$$

と表せる。

Pade 近似による不規則応答解析のプログラムを、Program 4 に示す。ただし、メインファイル、初期値を求めるファンクションファイルは省略する。Pade 近似によるファンクションファイル(1)では、(19) (20) 式を定義し、共分散方程式(17)式の係数マトリックス A と

Program-3 Runge-Kutta method for covariance equation.

<p>Main file</p> <pre>t0=0; n=401; d=0.01; R0=vehicle; [t,XR]=runge(t0,n,d,R0); plot(t,sqrt(XR(:,1)))</pre>
<p>Function file (1) Initial condition</p> <pre>function R0=vehicle %MATRIX(A0,B0,Q0) A=[0 1 0;-w0^2 -2*h0*w0 -(2*h0*w0*bv-w0^2); 0 0 -bv]; B=[0;2*h0*w0;1]; Q=B*(sgm^2)*B'; %INITIAL CONDITION R0=lyap(A,Q); R0=[zeros(1,5);zeros(1,5);zeros(3,2)*R0];</pre>
<p>Function file (2) Runge-Kutta method</p> <pre>%RUNGE-KUTTA METHOD FOR %COVARIANCE EQUATION function [t,XR]=runge(t0,n,d,R0);</pre>
<p>Function file (3)</p> <pre>function PP=func(th,P) %MATRIX(A,B,Q) A=[0 1 0 0 0;a1 a2 a3 a4 a5;0 0 0 1 0; a6 a7 a8 a9 a10;0 0 0 0 -bv]; B=[0 b1 0 b2 1]'; sgm=sqrt(2*pi*s0); Q=B*(sgm^2)*B'; PP=A*P+P*A'+Q;%CovarianceEquation</pre>

Program-4 Pade method for covariance equation.

<p>Function file (1) Pade method</p> <pre>%PADE METHOD FOR %COVARIANCE EQUATION function [t,XR]=pade(t0,n,d,R0) b=R0(:);XR(1,:)=b'; t(1)=t0;th=t0; for k=2:n [A,Q]=func(th); A1=inv(eye(size(A))-0.5*A*d); B1=eye(size(A))+0.5*A*d; C=A1*B1; R0=C*R0*C'+A1*Q*A1'*d; th=th+d; b=R0(:);XR(k,:)=b'; t(k)=th; end</pre>
<p>Function file (2)</p> <pre>function [A,Q]=func(th,P) A=[0 1 0 0 0;a1 a2 a3 a4 a5;0 0 0 1 0; a6 a7 a8 a9 a10;0 0 0 0 -bv]; B=[0 b1 0 b2 1]'; sgm=sqrt(2*pi*s0); Q=B*(sgm^2)*B';</pre>

外力マトリックス B を定義したファンクションファイル(2)との間で $n-1$ 回のループをまわし、橋梁の変位分散を求める。ただし、これらのマトリックスの要素の定義については省略する。

5. 動吸振器の最適設計

(1) 橋梁-動吸振器-車両系の方程式

Fig. 3 に示すモデルを考える。橋梁の振動を k 次振動まで考慮した橋梁-車両-動吸振器-路面系の基礎方程式¹²⁾は、

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k\omega_k\dot{q}_k(t) + \omega_k^2q_k(t) = -\mu_{kz}\phi_k(vt)\ddot{z}(t) - \mu_{kd}\phi_k(a)\ddot{d}(t) \quad (k=1, \dots, n) \quad (21)$$

$$\ddot{d}(t) + 2h_d\omega_d\{\dot{d}(t) - \dot{y}(vt, t)\} + \omega_d^2\{d(t) - y(a, t)\} = 0 \quad (22)$$

$$\ddot{z}(t) + 2h_0\omega_0\{\dot{z}(t) - \dot{y}(vt, t) - \dot{r}(t)\} + \omega_0^2\{z(t) - y(vt, t) - r(t)\} = 0 \quad (23)$$

ここで、 $d(t)$: 動吸振器の変位、 ω_d , h_d : 動吸振器の固有振動数と減衰定数、 μ_{kd} : 橋梁の k 次の有効質量 m_k と動吸振器の質量 m_d との質量比であり、その他の文字に関しては、(1) (2) (3) 式で定義したとおりである。

この場合の状態変数ベクトルを(4)式の $q(t)$ により

$$X(t) = [q(t)^T \dot{q}(t)^T d(t) \dot{d}(t) z(t) \dot{z}(t) r(t)]^T \quad (24)$$

と定義すると、状態方程式および共分散方程式は(6)式と(17)式と同じ形になる。係数マトリックスについては省略する。詳細は文献(8)を参照されたい。

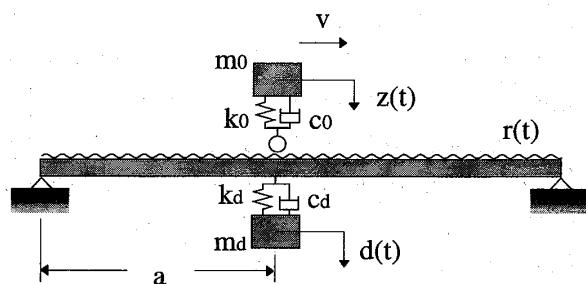


Fig. 3 Bridge-damper-vehicle system.

(2) 古典的設計法

古典的な動吸振器の設計法はまず、特定の橋梁と動吸振器の質量比 μ_1 、また、橋梁の振動数 f_1 を決める。外力から橋梁の変位応答に至る周波数伝達関数 $|H(i\omega)|$ の最大値が最小になるように、すなわち、

$$\max_{\omega=0 \sim \infty} |H(i\omega)| \rightarrow \min \quad (25)$$

として、動吸振器のパラメータを決める。この結果、最適同調パラメータは、

$$f_d^* = \frac{f}{1+\mu}, \quad h_d^* = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \quad (26)$$

となる。

(3) H_2 による設計法

最適設計は、まず、必要なパラメータである動吸振器の固有円振動数および減衰定数に、初期値として適当なパラメータを与える。共分散方程式の変数マトリックスの要素となる橋梁中点の変位の分散が、 $\sigma_y^2 \rightarrow \min$ となるまで計算を繰り返す。そして、その変数を動吸振器のパラメータ h_d, ω_d 、目的関数を $E[y^2(t)]$ として最適 $\alpha = [\omega_d \ h_d]$ を求める。この計算には、Optimization TOOLBOX の fminu 関数¹³⁾を用いる。fminu は準ニュートン法の Frecher-Powell 法を用いている。このプログラムが Program 5 である。ただし、各マトリックスの要素の定義については省略する。また、このフローチャートを Fig. 4 に示す。

Program-5 Optimum damper design.

Main file
<pre>X=fminu('func',X0) A=[0 1 0 0 0 0; a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27; 0 0 0 1 0 0 0; a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47; 0 0 0 0 0 1 0; a61 a62 a63 a64 a65 a66 a67; 0 0 0 0 0 0 a77]; B=[0 b2 0 b4 0 b6 0]; D=zeros(7,1); w=[0:0.01:7]*rad; iu=1; C=B*B'*sgm; R=lyap(A,A',C); sgmax=sqrt(R(1,1))</pre>
Function file
<pre>function fmax=func(xd); R=lyap(A,A',C); fmax=R(1,1)*1000</pre>

6. 解析例

路面凹凸、橋梁及び車両の諸元について説明する。Table 2 は、(7)式で述べた路面凹凸のパワースペクトル密度の定数を示す。Table 3 は解析の対象とした橋梁のパラメータで橋梁の支間は 40m である。Table 4 は車両の諸元である。

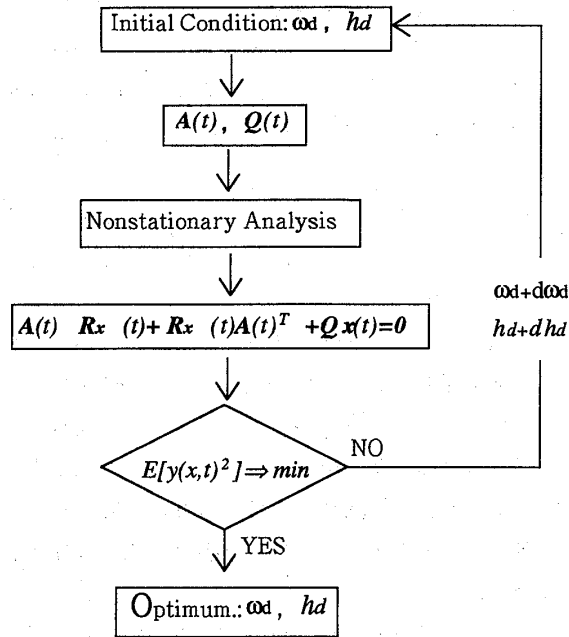


Fig. 4 Flowcart of the optimum design of TMD.

Table 2 Parameters of the road roughness

$A(\text{cm}^2/\text{m})$	0.0027
a	0.05

Table 3 Characteristics of the bridge

Span (m)	40.0
Weight (kg)	10.68×10^4
Flexural rigidity ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	24.41×10^8
Damping constant	0.02 (1st~5th)

Table 4 Characteristics of the vehicle

Weight (t)	20
Frequency (Hz)	3.0
Damping constant	0.03

(1) 路面凹凸

Fig. 5 は Program 1 により求めた路面凹凸のシミュレーション波形である。凹凸の波形を移動する車両から見たものである。

(2) 時刻歴応答

Fig. 6 は Program 2 による橋梁中点の時刻歴応答波形である。走行車両は橋梁の 40m 手前から路面凹凸上を走行し定常状態になってから、橋梁に進入するものとする。

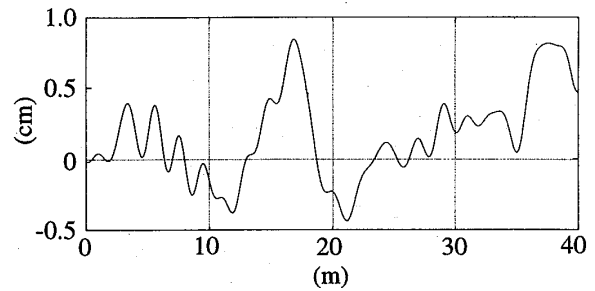


Fig. 5 Road roughness.

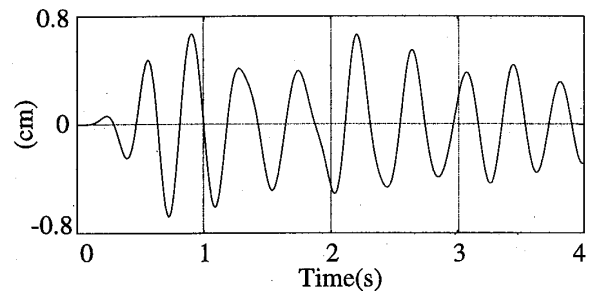


Fig. 6 Time history of bridge vibration.

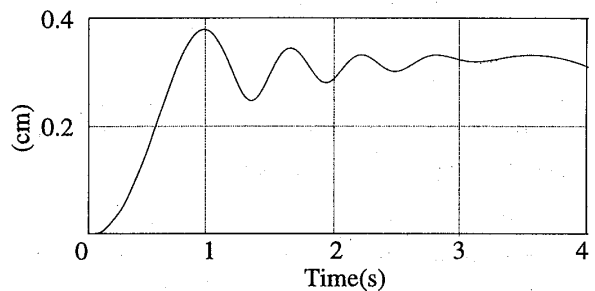


Fig. 7 R. m. s. response of bridge.

(3) 不規則応答

車両が橋梁上を走行することにより、橋梁の不規則振動は非定常な確率過程となる。不規則応答解析の目的は変位応答の分散の時間的変化を求めることにある。

Fig. 7 は Program 4 の Pade 近似による不規則応答解析の変位分散を示す。Program 3 の Runge-Kutta 法による方法でもほぼ同じ結果が得られるが、Pade 近似は無条件安定なアルゴリズムであるので、安定した解が得られる。

(4) 動吸振器の最適設計

Program 5 の最適設計により動吸振器のパラメータを求めた。Fig. 8 は、この値を用いて、最適な動吸振器を計算し、その動吸振器を設置した場合の時刻歴応答を示したものである。動吸振器を設置した場合の応答が実線で、動吸振器を設置していない場合が破線である。Fig. 9 は、同じ計算を不規則応答解析に

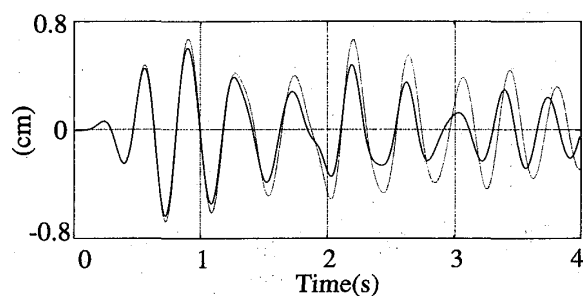


Fig. 8 Time history of bridge vibration with TMD.

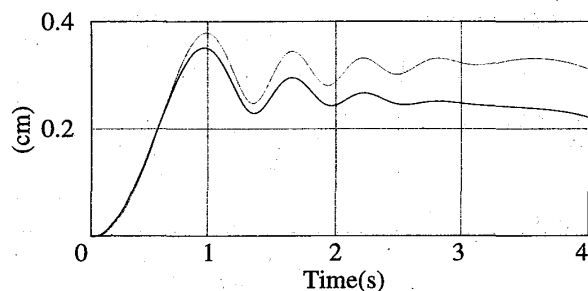


Fig. 9 R. m. s. response of bridge with TMD.

いて行ったものである。

7. ま と め

本研究では、MATLAB を走行車両による道路橋振動解析に適用し、これらの解析で用いられるプログラムを作成した。それらのプログラムは、確定論による応答解析、Runge-Kutta 法と Pade 近似法による不規則応答解析、 H_2 ノルム法による動吸振器の最適設計である。これらのプログラムは橋梁の重量、支間及び減衰定数、車両の固有振動数、減衰定数などを簡単に変えることができ、それに合わせ各方程式のシステムマトリックスや外力マトリックスが自動的に変化するようにできている。これらを「不規則解析 TOOLBOX」にしたいと考えている。従来の言語である FORTRAN, BASIC および C 言語による、走行車両による道路橋振動のプログラムの開発と比べると、MATLAB によるプログラム開発環境は著しく向上する。

参考文献

- 1) 小国 力：MATLAB と利用の実際，サイエンス社，1995.
- 2) 阿部 寛：やさしい Mac の数値数式処理プログラム，(株)毎日コミュニケーションズ，1990.
- 3) The Math Works. Inc: MATLAB Reference Guide, サイバネットシステム株式会社，1993.

- 4) The Math Works. Inc: Optimization TOOLBOX, サイバネットシステム株式会社，1994.
- 5) The Math Works. Inc: Signal Processing TOOLBOX 入門編，サイバネットシステム株式会社，1994.
- 6) The Math Works. Inc: ROBUST-CONTROL TOOLBOX 入門編，サイバネットシステム株式会社，1993.
- 7) The Math Works. Inc: Image Processing TOOLBOX, サイバネットシステム株式会社，1994.
- 8) 橋梁振動の計測と解析編集グループ：橋梁振動の計測と解析，技報堂出版株式会社，1993.
- 9) 星谷 勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974.
- 10) 芳村敏夫，横山 隆，日野順市：基礎振動工学，共立出版株式会社，1992.
- 11) D. MTrujillo: The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equations using Pade Approximations, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp 259-270, 1975.
- 12) 岡林隆敏：交通振動制御の可能性—II. 道路橋に設置する動吸振器の効果について—，第2回土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART A, pp 195-202, 1993. 8.