内管が軸方向に運動する同心環状流路内の十分に発達した層流熱伝達

(第4種境界条件の場合のヌッセルト数について)

茂地　徹*・東井上　真　哉**
Y. Lee***

Fully Developed Laminar Heat Transfer in a Concentric Annulus With an Axially Moving Core

(Nusselt Numbers for the Case of Fourth Kind Boundary Condition)

by

Toru SHIGECHI*, Shinya HIGASHIIUE** and Y. LEE***

Fundamental solutions of the fourth kind thermal boundary condition (i.e., constant heat flux specified on one wall and constant temperature specified on the other wall) were obtained analytically for the hydrodynamically and thermally developed laminar flow in a concentric annulus with an axially moving core. The relationship of Nusselt numbers between the fourth kind boundary condition and the first kind one was examined.

1. まえがき

前報[1]では，第4種の境界条件，つまり，(i)内管の表面熱流束と外管の表面温度が一定に保たれている場合と(ii)内管の表面温度と外管の表面熱流束が一定に保たれている場合，に関して，内管が軸方向に運動する偏心環状流路内の十分に発達した層流熱伝達をバイポーラ座標系で解析し，表面温度，表面熱流束およびヌッセルト数に及ぼす内管と外管の半径比，内管の偏心率および内管の相対速度の影響を理論的に検討した結果について報告した．

本研究では，内管が軸方向に運動する同心環状流路内の十分に発達した層流熱伝達の第4種境界条件の場合のヌッセル数は既報[2]で報告した第1種境界条件の場合のヌッセル数と等価であることを，両者の温度の厳密解に基づいて検討した結果について報告する．

記　号

a　：温度伝導率

$h_{ii}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の熱伝達係数([**CASE A**]，内管表面)

$h_{oi}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の熱伝達係数([**CASE A**]，外管表面)

$h_{io}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の熱伝達係数([**CASE B**]，内管表面)

$h_{oo}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の熱伝達係数([**CASE B**]，外管表面)

k　：熱伝導率

$Nu_{jj}^{(1)}$　：第1種境界条件の場合のヌッセルト数

平成8年10月18日受理

* 機械システム工学科 (Dept. of Mechanical Systems Engineering)
** 大学院修士課程機械システム工学専攻 (Graduate Student, Dept. of Mechanical Systems Engineering)
*** オタワ大学工学部 (Fac. of Engineering, Univ. of Ottawa)

（定義は既報[2]参照）

$Nu_{jj}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合のヌッセルト数 $\equiv h_{jj}^{(4)}\cdot 2(R_o-R_i)/k$

q　：壁面熱流束

r　：半径座標

r^*　：無次元半径座標 $\equiv r/R_o$

R　：半径

T　：温度

u　：流体速度

u_m　：流体平均速度

z　：軸方向座標

α　：内管と外管の半径比 $\equiv R_i/R_o$

$\theta^{(1)}$　：第1種境界条件の場合の無次元温度

$\theta^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の無次元温度

$\theta_{bi}^{(1)}$　：第1種境界条件の場合の無次元バルク温度（定義は既報[2]参照）

$\theta_{bo}^{(1)}$　：第1種境界条件の場合の無次元バルク温度（定義は既報[2]参照）

$\theta_{bi}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の無次元バルク温度（[**CASE A**]）

$\theta_{bo}^{(4)}$　：第4種境界条件の場合の無次元バルク温度（[**CASE B**]）

添　字

i　：内管

o　：外管

2．伝 熱 解 析

第4種境界条件の場合の解析の物理モデルは既報[2]と同一であるので省略する．解析に際して，次のように仮定する．

1．流体は物性値一定のニュートン流体であり，流れは非圧縮・定常層流で流体力学的及び熱的に十分発達している．
2．体積力，粘性逸散及び軸方向の熱伝導は無視できる．
3．内管は軸方向に一定速度で運動している．

仮定によりエネルギー式及び境界条件は円筒座標系で以下のように表わされる．第4種境界条件として，(i)内管の表面熱流束と外管の表面温度が一定の場合 [**CASE A**] と(ii)内管の表面温度と外管の表面熱流束が一定の場合 [**CASE B**]，の二通りを設定する．

エネルギー式：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{u}{a}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{1}$$

第4種の境界条件：

[**CASE A**]

$$\begin{cases} r=R_i: -k\left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right|_{Ri}=q_i \\ r=R_o: T=T_o \end{cases} \tag{2}$$

[**CASE B**]

$$\begin{cases} r=R_i: T=T_i \\ r=R_o: +k\left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right|_{Ro}=q_o \end{cases} \tag{3}$$

ここに，壁面熱流束 q_i と q_o の符号は，それぞれ管表面から流体に向かう方向を正とする．

二通りの境界条件 [**CASE A**] と [**CASE B**] に対してそれぞれ次式で定義する無次元温度 $\theta^{(4)}$ を導入する．

$$[\textbf{CASE A}]: \theta^{(4)}\equiv(T-T_o)/[q_i(R_o-R_i)/k] \tag{4}$$

$$[\textbf{CASE B}]: \theta^{(4)}\equiv(T-T_i)/[q_o(R_o-R_i)/k] \tag{5}$$

第4種の境界条件に関しても環状流路内の十分に発達した流れに対して第1種の境界条件の場合と同様に，一方の表面(内管または外管)から入ってくる熱はすべて他方の表面(外管または内管)から出ていくので[3]，$\theta^{(4)}$ の z 方向の温度勾配は零となる，つまり

$$\frac{\partial\theta^{(4)}}{\partial z}=0 \tag{6}$$

となるから，式(1)のエネルギー式は次のような熱伝導型の微分方程式となる．

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta^{(4)}}{\partial r^*}\right)=0 \tag{7}$$

ここに，$r^*\equiv r/R_o$ である．境界条件は次のように無次元化される．

[**CASE A**]

$$\begin{cases} r^*=\alpha: \dfrac{\partial\theta^{(4)}}{\partial r^*}=\left[\dfrac{-1}{1-\alpha}\right] \\ r^*=1: \theta^{(4)}=0 \end{cases} \tag{8}$$

[**CASE B**]

$$\begin{cases} r^*=\alpha: \theta^{(4)}=0 \\ r^*=1: \dfrac{\partial\theta^{(4)}}{\partial r^*}=\left[\dfrac{1}{1-\alpha}\right] \end{cases} \tag{9}$$

式(7)を式(8)あるいは式(9)の条件で解けば，無次元温度の厳密解が次のように得られる．

$$[\textbf{CASE A}]: \theta^{(4)}=\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right]\ln r^* \tag{10}$$

[CASE B]：$\theta^{(4)}=\left[\dfrac{1}{1-\alpha}\right]\mathbf{ln}(r^*/\alpha)$ (11)

無次元バルク温度 $\theta_{bj}^{(4)}$ は次式のように定義される．

$$\theta_{bj}^{(4)}\equiv\left[\frac{2}{1-\alpha^2}\right]\int_{\alpha}^{1}\left(\frac{u}{u_m}\right)\theta^{(4)}r^*dr^* \quad (12)$$

ここに，添字 j に関しては，[CASE A] の場合には $j=i$，[CASE B] の場合には $j=o$，ととる．なお，流体速度 u と流体平均速度 u_m の比 u/u_m は，既報[2] の式(3)で与えられている．

式(10)から式(12)で示される無次元温度と既報[2] で得られた第1種境界条件の場合の無次元温度 $\theta^{(1)}$ および無次元バルク温度 $\theta_{bj}^{(1)}$ との間には，次の関係が成り立つことがわかる．

[CASE A]

$$\theta^{(4)}=\left[\frac{\alpha\mathbf{ln}(1/\alpha)}{1-\alpha}\right]\theta^{(1)} \quad \left(\theta^{(1)}\equiv\frac{T-T_o}{T_i-T_o}\right) \quad (13)$$

$$\theta_{bi}^{(4)}=\left[\frac{\alpha\mathbf{ln}(1/\alpha)}{1-\alpha}\right]\theta_{bi}^{(1)} \quad \left(\theta_{bi}^{(1)}\equiv\frac{T_b-T_o}{T_i-T_o}\right) \quad (14)$$

[CASE B]

$$\theta^{(4)}=\left[\frac{\mathbf{ln}(1/\alpha)}{1-\alpha}\right]\theta^{(1)} \quad \left(\theta^{(1)}\equiv\frac{T-T_i}{T_o-T_i}\right) \quad (15)$$

$$\theta_{bo}^{(4)}=\left[\frac{\mathbf{ln}(1/\alpha)}{1-\alpha}\right]\theta_{bo}^{(1)} \quad \left(\theta_{bo}^{(1)}\equiv\frac{T_b-T_i}{T_o-T_i}\right) \quad (16)$$

以上より，第4種境界条件の場合の熱伝達係数 $h_{jj}^{(4)}$ およびヌッセルト数 $Nu_{jj}^{(4)}$ は次のように計算される．

[CASE A]

内管表面では $h_{ii}^{(4)}$ と $Nu_{ii}^{(4)}$ は次のように定義される．

$$h_{ii}^{(4)}\equiv\frac{q_i}{(T_i-T_b)} \quad (17)$$

$$Nu_{ii}^{(4)}\equiv\frac{h_{ii}^{(4)}\cdot 2(R_o-Ri)}{k} \quad (18)$$

式(4)を適用して無次元化すると，式(18)は次式のように表される．

$$Nu_{ii}^{(4)}=\left[\frac{2}{\theta_{ii}^{(4)}-\theta_{bi}^{(4)}}\right] \quad (19)$$

ここで，式(13)および式(14)の関係と内管の表面温度は第1種境界条件の場合には，

$$\theta_{ii}^{(1)}=1 \quad (20)$$

であることを考慮すると，式(18)で定義されるヌッセルト数 $Nu_{ii}^{(4)}$ は次式で示されるように第1種境界条件の場合のヌッセルト数 $Nu_{ii}^{(1)}$ と等しくなる．

$$Nu_{ii}^{(4)}=\left[\frac{1-\alpha}{\alpha\mathbf{ln}(1/\alpha)}\right]\left[\frac{2}{1-\theta_{bi}^{(1)}}\right]=Nu_{ii}^{(1)} \quad (21)$$

一方，外管表面では $h_{oi}^{(4)}$ と $Nu_{oi}^{(4)}$ は次のように定義される．

$$h_{oi}^{(4)}\equiv\left(-k\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{Ro}\right)/(T_b-T_o) \quad (22)$$

$$Nu_{oi}^{(4)}\equiv\frac{h_{oi}^{(4)}\cdot 2(R_o-R_i)}{k} \quad (23)$$

ここで，内管と外管に関するエネルギーバランスから次の関係が得られる．

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{Ro}=\left(\frac{R_i}{R_o}\right)q_i=\alpha q_i \quad (24)$$

したがって，式(23)で定義されるヌッセルト数 $Nu_{oi}^{(4)}$ は次式で示されるように第1種境界条件に対するヌッセルト数 $Nu_{oi}^{(1)}$ と等しくなる．

$$Nu_{oi}^{(4)}=\left[\frac{2\alpha}{\theta_{bi}^{(4)}}\right]=\left[\frac{2(1-\alpha)}{\mathbf{ln}(1-\alpha)}\right]\left[\frac{1}{\theta_{bi}^{(1)}}\right]=Nu_{oi}^{(1)} \quad (25)$$

[CASE B]

内管表面では $h_{io}^{(4)}$ と $Nu_{io}^{(4)}$ は次のように定義される．

$$h_{io}^{(4)}\equiv\left(k\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{Ri}\right)/(T_b-T_i) \quad (26)$$

$$Nu_{io}^{(4)}\equiv\frac{h_{io}^{(4)}\cdot 2(R_o-R_i)}{k} \quad (27)$$

ここで，内管と外管に関するエネルギーバランスから次の関係が得られる．

$$k\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{Ri}=\left(\frac{R_o}{R_i}\right)q_o=\frac{q_o}{\alpha} \quad (28)$$

したがって，式(27)で定義される内管表面のヌッセルト数 $Nu_{io}^{(4)}$ は次式で示されるように第1種境界条件に対するヌッセル数 $Nu_{io}^{(1)}$ と等しくなる．

$$Nu_{io}^{(4)}=\left[\frac{2}{\alpha\theta_{bo}^{(4)}}\right]=\left[\frac{2(1-\alpha)}{\alpha\mathbf{ln}(1/\alpha)}\right]\left[\frac{1}{\theta_{bo}^{(1)}}\right]=Nu_{io}^{(1)} \quad (29)$$

一方，外管表面では $h_{oo}^{(4)}$ と $Nu_{oo}^{(4)}$ は次のように定義される．

$$h_{oo}^{(4)}\equiv\frac{q_o}{(T_o-T_b)} \quad (30)$$

$$Nu_{oo}^{(4)}\equiv\frac{h_{oo}^{(4)}\cdot 2(R_o-R_i)}{k} \quad (31)$$

式(5)を適用して無次元化すると，式(31)は次式のように表される．

$$Nu_{oo}^{(4)}=\left[\frac{2}{\theta_{oo}^{(4)}-\theta_{bo}^{(4)}}\right] \quad (32)$$

ここで，式(15)および式(16)の関係と外管の表面温度は第1種境界条件の場合には，

$$\theta_{oo}^{(1)}=1 \tag{33}$$

であることを考慮すると，式(31)で定義されるヌッセルト数 $Nu_{oo}^{(4)}$ は次式で示されるように第1種境界条件に対するヌッセルト数 $Nu_{oo}^{(1)}$ と等しくなる．

$$Nu_{oo}^{(4)}=\left[\frac{1-\alpha}{\ln(1/\alpha)}\right]\left[\frac{2}{1-\theta_{oo}^{(1)}}\right]=Nu_{oo}^{(1)} \tag{34}$$

以上の解析により，同心環状流路の場合には，第1種境界条件の場合のヌッセルト数 $Nu_{jj}^{(1)}$ と第4種境界条件の場合のヌッセルト数 $Nu_{jj}^{(4)}$ に関して，次の関係が成り立つことが明らかである．

$$\boxed{Nu_{ii}^{(1)}=Nu_{io}^{(1)}=Nu_{ii}^{(4)}=Nu_{io}^{(4)}} \tag{35}$$

$$\boxed{Nu_{oo}^{(1)}=Nu_{oi}^{(1)}=Nu_{oo}^{(4)}=Nu_{oi}^{(4)}} \tag{36}$$

したがって，第4種境界条件の場合のヌッセルト数 $Nu_{ii}^{(4)}$, $Nu_{oi}^{(4)}$, $Nu_{io}^{(4)}$ および $Nu_{oo}^{(4)}$ の値は，$Nu_{ii}^{(1)}$ と $Nu_{oo}^{(1)}$ の値のみで計算することができる．

3．む　す　び

内管が軸方向に運動する同心環状流路内で流体の速度場と温度場が十分に発達した層流熱伝達を第4種の境界条件に対して解析し，温度の厳密解に基づいて第4種境界条件の場合のヌッセルト数と第1種境界条件の場合のヌッセルト数の関係を定量的に明らかにした．第4種の境界条件の場合のヌッセルト数の値は第1種の境界条件のヌッセルト数のみの値を用いて決定することができる．

参考文献

1）茂地・他3名，長崎大学工学部研究報告，**26**, (1996), 165.

2）茂地・他4名，長崎大学工学部研究報告，**25**, (1995), 75.

3）M. L. Trombetta, *Int. J. Heat Mass Transfer,* **14**, (1971), 1161.