

## コンクリート充填円形鋼管柱の弾塑性座屈解析法について

李 劍平\*・修行 稔\*\*

## A Numerical Method for Elastoplastic Buckling Analysis of Concrete Filled Tubular Columns

by

JianPin LI\* and Minoru SHUGYO\*\*

A numerical method for elastoplastic buckling analysis of concrete filled tubular columns is presented. The elastoplastic tangent stiffness matrix in the method is constructed by using the tangent coefficient matrix obtained by the numerical integration of the hardening moduli of the fibers about the member section to calculate the generalised plastic strain increments. The assumptions that a column deforms in a body and behaves according to the Bernoulli-Euler hypothesis are made in the analysis. The accuracy of the method is examined by comparing the results with available experimental results.

## 1. 序

近年建築構造物に対する要求が多様化し、合成・複合構造が目立っている。コンクリート充填鋼管は代表的な合成構造物の一つである。鋼管は充填されるコンクリートの効果で中空鋼管より局部座屈荷重が大きくなり、座屈後耐力の低下も少ない。また充填コンクリートは、鋼管の拘束効果により圧縮強度の増加が期待できる。このように、コンクリート充填鋼管柱は優れた強度と靱性を持ち、鋼管のみの場合に比べて部材の耐力や変形能力の著しい向上が期待できるため、構造部材としての利用価値が高い。ただ、コンクリート充填鋼管柱はRC柱やSRC柱に比べて断面が小さくなる傾向にあり、その力学的安定性が重要な課題になる。

コンクリート充填鋼管柱の研究の歴史は古い<sup>1)-3)</sup>。日本においても既に1975年に富井、崎野ら<sup>4)</sup>が当時の研究成果をまとめている。近年になって研究がますます活発化し、コンクリート充填鋼管の安定性について貴重な実験データが蓄積されるとともに、設計式の検

討もなされている<sup>5)-12)</sup>。しかしながら、これらの研究はほとんどが実験を主体とするものであり、汎用性のある数値解析法の開発に関するものは見られない。柱部材の力学的性状をさらに詳細に検討しその特性を明らかにするための一手段として、精度の高い汎用数値解析法は必須であると思われる。

本研究は、著者らがこれまで開発してきた鋼柱部材のための数値解析法を、コンクリート充填鋼管柱の解析に適用可能なように拡張するものである。座屈後挙動の解析にも適用できるように要素の座標変換マトリクスを逐次変更するとともに、数値解法としてRamm<sup>13)</sup>の示した変位増分法を採用し、一ステップに一回の不均衡力の修正を行う。解析例としてNeogiら<sup>2)</sup>および松井らの実験モデル<sup>11)</sup>について解析を行い、結果を比較する。

## 2. 解析方法

解析法の基本は、著者らが提案した弾塑性大変形解析法<sup>14)</sup>であるが、本論文ではコンクリート充填鋼管を

平成8年10月28日受理

\* 構造工学科 (Dept. of Structural Engineering)

\*\* 構造工学科 (Dept. of Structural Engineering)

対象としているため定式化に際して次のように仮定する。

- 1) 鋼管と充填コンクリートの間にすべりは発生せず両者は一体となって変形する。
  - 2) 部材の断面は変形後も平面を保持する。
  - 3) 部材の降伏には部材軸方向垂直応力のみが寄与するものとし、鋼管素材の応力ひずみ関係はひずみ硬化のある bilinear 形、充填コンクリートの応力～ひずみ関係は鋼管の拘束効果を考慮して降伏後強度が劣化しないモデルとする。
  - 4) 塑性変形成分は、軸力と二軸回りの曲げモーメントに対応する成分のみである。
  - 5) 断面の形は降伏後も不変であり、不安定状態は生じない。
  - 6) 部材を材軸方向に小さな要素に分割することを前提として一般化塑性ひずみ増分の各成分が要素内で線形に分布する。
  - 7) 要素端と要素中央部との相対変位の塑性成分は、要素端iまたはj側に集約されて生じるものとする。
- これらの仮定によって要素の弾塑性接線剛性行列が次のように得られる。

2. 1 要素の弾性接線剛性行列

要素の両端を*i, j*として*i*端の図心に原点をとり、材軸方向に*x*軸、これと右手系をなすように断面主軸方向に*y, z*軸をとる。要素を線材と考え、要素端力*Q*と要素端弾性変位*q<sup>e</sup>*を(1)式のように定義し、材軸方向変形を1次、曲げ変形を3次の関数で仮定すると、エネルギー法によって(2)式を満足する弾性接線剛性*K<sup>e</sup>*が得られる<sup>15)</sup>。

$$Q = [F_{xi} F_{yi} F_{zi} M_{xi} M_{yi} M_{zi} F_{xj} F_{yj} F_{zj} M_{xj} M_{yj} M_{zj}]^T$$

$$q^e = [u_i^e v_i^e w_i^e \theta_{xi}^e \theta_{yi}^e \theta_{zi}^e u_j^e v_j^e w_j^e \theta_{xj}^e \theta_{yj}^e \theta_{zj}^e]^T$$

(1)

$$dQ = K^e dq^e$$

(2)

仮定1)～2)より、部材の軸方向剛性、曲げ剛性およびねじり剛性を鋼管部と充填コンクリート部から別個に得られる値を単に加え合わせた値で評価すれば、形式上中空鋼管の*K<sup>e</sup>*がそのまま使用できる。

2. 2 要素の塑性接線係数行列

要素の両端断面を微小な繊維に分割する(図-1)。鋼管繊維の応力ひずみ関係を bilinear, 充填コンクリートの応力ひずみ関係を次式で近似する<sup>11)</sup>(図-2)。

$\epsilon_m \leq \epsilon \leq 0$  の場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 0.85F_c \left[ \frac{2\epsilon}{\epsilon_m} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \right)^2 \right] \\ E_c &= \frac{1.7F_c}{\epsilon_m} (1 - \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (3-a)$$

$\epsilon \leq \epsilon_m$  の場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 0.85F_c \\ E_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-b)$$

ここに、 $\epsilon_m$  は充填コンクリートの降伏ひずみ、 $F_c$  は同じく圧縮強度である。

ここで断面の一般化応力*F*と一般化ひずみ*Δ*を(4)

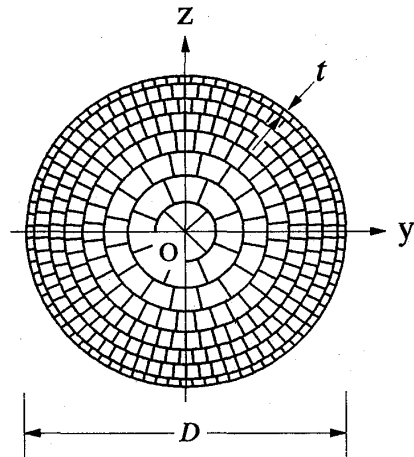


図-1 要素断面

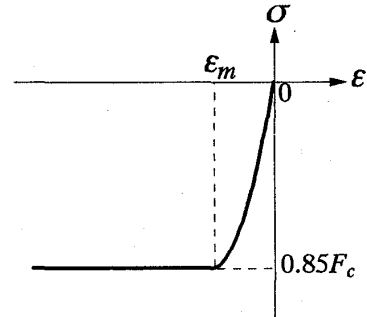


図-2 充填コンクリートの応力～ひずみ関係

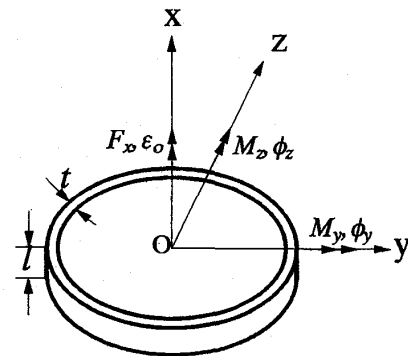


図-3 一般化応力と一般化ひずみ

式のように定義する(図-3).

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= [F_x \quad M_y \quad M_z]^T \\ \Delta &= [\varepsilon_0 \quad \phi_y \quad \phi_z]^T \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{F}$ の成分は軸力 $F_x$ と二軸回りの曲げモーメント $M_y, M_z$ ,  $\Delta$ の成分はこれらに対応する一般化ひずみである。一般化応力の増分と繊維の応力増分との関係、および一般化ひずみの増分と繊維のひずみ増分との関係はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} dF_x &= \int_{A_s} d\sigma_s dA_s + \int_{A_c} d\sigma_c dA_c \\ dM_y &= \int_{A_s} d\sigma_s z dA_s + \int_{A_c} d\sigma_c z dA_c \\ dM_z &= \int_{A_s} d\sigma_s y dA_s + \int_{A_c} d\sigma_c y dA_c \\ d\varepsilon &= d\varepsilon_0 + z d\phi_y - y d\phi_z \end{aligned} \quad (5)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon_0 + z d\phi_y - y d\phi_z \quad (6)$$

ここに、添字 $s$ は鋼管、 $c$ はコンクリートを示す。要素の現時点における要素端力 $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j$ からそれぞれの断面の一般化応力 $\mathbf{F}$ を求め、対応する一般化ひずみを $\Delta$ として断面に関する数値積分とNewton-Raphson法による収束計算を行うと、その断面の一般化応力増分 $d\mathbf{F}$ と一般化塑性ひずみ増分 $d\Delta^p$ を(7)式のように関係づける塑性接線係数マトリクス $\mathbf{s}'$ が求められる。

$$d\Delta^p = \mathbf{s}' d\mathbf{F} \quad (7)$$

さらに、仮定4)に従って、要素の*i*端および*j*端の塑性増分 $d\mathbf{q}_i^p, d\mathbf{q}_j^p$ を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} d\mathbf{q}_i^p &= [du_{xi}^p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad d\theta_{yi}^p \quad d\theta_{zi}^p]^T \\ d\mathbf{q}_j^p &= [du_{xj}^p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad d\theta_{yj}^p \quad d\theta_{zj}^p]^T \end{aligned} \quad (8)$$

*i*端断面の塑性接線係数マトリクス $\mathbf{s}'_i$ の9個の成分を用いて、新たな6次の正方行列 $\mathbf{s}^p_i$ を次式で定義する。

$$\mathbf{s}^p_i = \begin{bmatrix} (s'_{11})_i & 0 & 0 & 0 & (s'_{12})_i & (s'_{13})_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (s'_{21})_i & 0 & 0 & 0 & (s'_{22})_i & (s'_{23})_i \\ (s'_{31})_i & 0 & 0 & 0 & (s'_{32})_i & (s'_{33})_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

同様に、 $\mathbf{s}'_j$ に対応する6次の正方行列 $\mathbf{s}^p_j$ が定義できる。前述の仮定6)と7)によって要素の*i*端の塑性変形増分 $d\mathbf{q}_i^p$ が次式で得られる。

$$d\mathbf{q}_i^p = \frac{\ell}{2} \frac{3\mathbf{s}^p_i d\mathbf{Q}_i - \mathbf{s}^p_j d\mathbf{Q}_j}{4} \quad (10)$$

同様にして*j*端の塑性変形増分 $d\mathbf{q}_j^p$ が得られ、まとめて次のように表せる。

$$\begin{Bmatrix} d\mathbf{q}_i^p \\ d\mathbf{q}_j^p \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{8} \begin{bmatrix} 3\mathbf{s}^p_i & -\mathbf{s}^p_j \\ -\mathbf{s}^p_i & 3\mathbf{s}^p_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{Q}_i \\ d\mathbf{Q}_j \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{s}^p \begin{Bmatrix} d\mathbf{Q}_i \\ d\mathbf{Q}_j \end{Bmatrix} \quad (11)$$

### 2. 3 要素の弾塑性接線剛性行列

要素端変位増分 $d\mathbf{q}$ が弾性変位増分 $d\mathbf{q}^e$ と塑性変形増分 $d\mathbf{q}^p$ の合計として生じると仮定すると、(12)式に示す要素接線剛性行列 $\mathbf{K}^p$ が得られる。(12)式中の $\mathbf{I}$ は単位行列、 $\mathbf{R}$ は不平衡力である。 $\mathbf{R}$ は、本解法が塑性関節法の一つであるため要素端変位から要素端弾性変位成分のみが分離でき、これから得られる要素の内力を構造物全体で積算して外力から差し引くことにより得られる。数値解析は、問題が弾塑性という履歴依存系の計算になる場合もあることから、各ステップでの不平衡力の修正は一回に止め、反復修正を行わない変位増分法<sup>13)</sup>を用いて行う。

$$d\mathbf{Q} + \mathbf{R} = [\mathbf{I} + \mathbf{K}^e \mathbf{s}^p]^{-1} \mathbf{K}^e d\mathbf{q} \equiv \mathbf{K}^p d\mathbf{q} \quad (12)$$

### 3. 解析例

解析モデルは、図-4に示す偏心荷重を受けるコンクリート充填円形鋼管柱<sup>2),11)</sup>である。

柱の解析を行う前に、部材セグメントの曲げモーメント～曲率関係について調べた。例として鋼管直径 $D = 16.52\text{cm}$ 、厚さ $t = 0.45\text{cm}$ 、ヤング率 $E_s = 2100\text{t/cm}^2$ 、降伏応力 $\sigma_s = 3.60\text{t/cm}^2$ 、充填コンクリートの圧縮強度 $F_c = 417.0\text{kg/cm}^2$ 、応力ひずみ関係は鋼管についてはひずみ硬化係数 $H = E_s/100$ のbilinear形、充

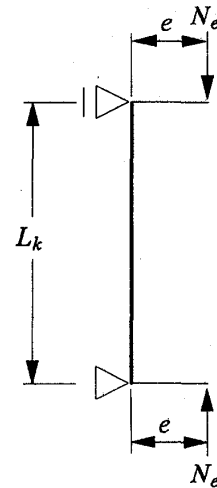


図-4 解析モデル

填コンクリートについては図-2において降伏ひずみ  $\epsilon_m = -0.0023$  のモデルとする。断面分割数は鋼管80, 充填コンクリート240である。

図-5は、軸力  $F_x/F_{sy} = 0.3$  の場合の曲げモーメント  $M_y/M_{syy}$  と曲率  $\Phi_y/\Phi_{syy}$  の関係である。ここに、 $F_{sy}$  は鋼管の初期降伏軸力、 $M_{syy}$  は鋼管のy軸に関する初期降伏モーメント、 $\Phi_{syy}$  は鋼管のy軸回り初期降伏曲率である。図-6は、図-5中の point 1~point 6の時点での断面降伏要素分布図である。負荷当初から充填コンクリートが引張降伏を起こしている。

図-7は、解析結果から得られた断面終局耐力曲線である。耐力は例えば図-5において除荷したときの残留曲率  $\Phi_{Ry}$  が  $\Phi_{Ry}/\Phi_{syy} = 1$  および  $\Phi_{Ry}/\Phi_{syy} = 2$  となるときのモーメントと定義した。加藤ら<sup>8)</sup>はコンクリート円形充填鋼管の断面終局耐力式として次式を提案している。

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{1}{\pi} \left[ F_{cy} \left( \pi - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) - 2F_{sy} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \\ M_y &= \frac{2}{\pi} \left( r_s F_{sy} \sin \theta + \frac{1}{3} r_c F_{cy} \sin^3 \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $F_x$  は軸力、 $M_y$  は曲げモーメント、 $F_{cy}$  は充填コンクリートの初期圧縮降伏軸力、 $F_{sy}$  は鋼管の初期降伏軸力、 $r_c$  は充填コンクリートの半径、 $r_s$  は鋼管板厚中心半径である。図-7において加藤らの提案式を一点鎖線で示しているが、残留曲率が  $\Phi_{Ry}/\Phi_{syy} = 2$  の場合の本解析値は加藤らの提案式に極めて近い値となる。

### 3. 1 P. K. Neogiら<sup>2)</sup>の実験モデル

モデルの寸法と材料定数は以下の通りである。原論文ではポンドとインチで示してあるものを ton と cm に換算した。コンクリート充填鋼管柱の長さ  $L_k = 332.7\text{cm}$ , 鋼管直径  $D = 16.92\text{cm}$ , 厚さ  $t = 0.72\text{cm}$ , 偏心  $e = 4.76\text{cm}$ , ヤング率  $E_s = 2078\text{t/cm}^2$ , 降伏応力  $\sigma_s = 3.13\text{t/cm}^2$ , 充填コンクリートの圧縮強度  $F_c =$

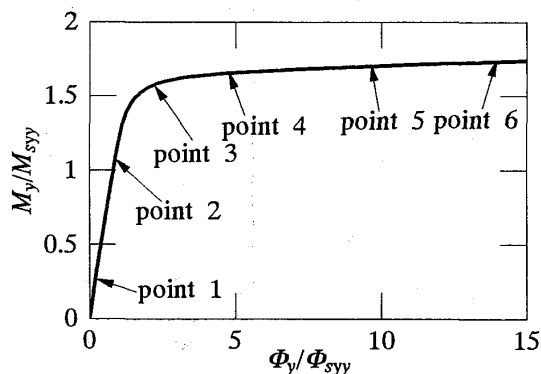


図-5  $M_y/M_{syy} \sim \Phi_y/\Phi_{syy}$  曲線 ( $F_x/F_{sy} = 0.3$ )

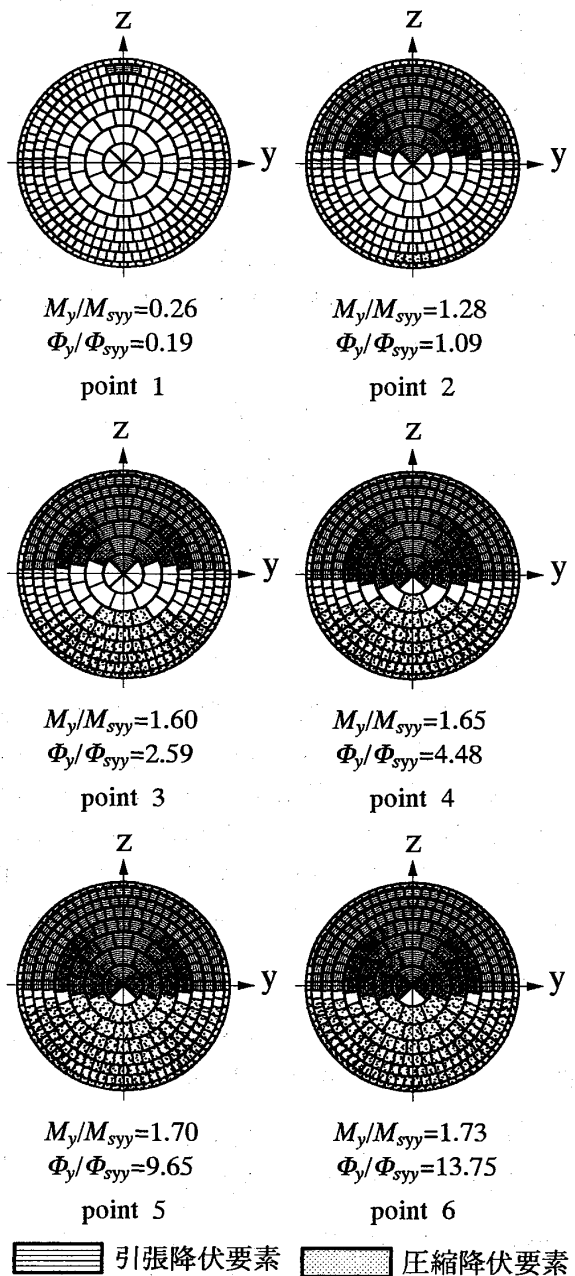


図-6 降伏要素断面図

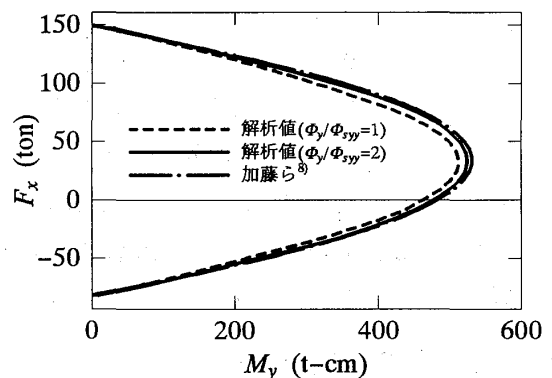


図-7 相互作用曲線

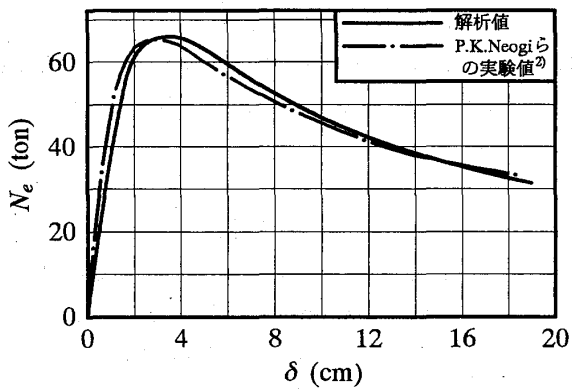


図-8 圧縮力～柱材中央水平変位関係

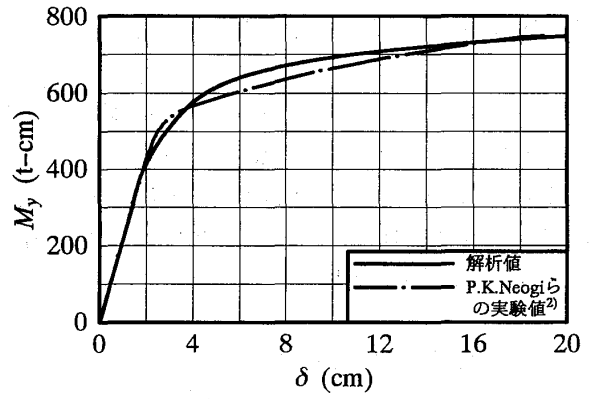


図-9 柱材中央曲げモーメント～水平変位関係

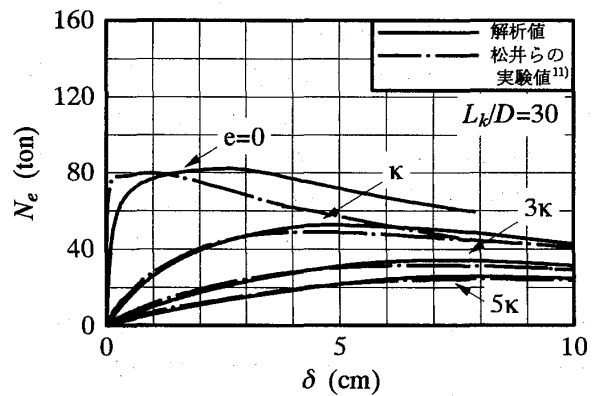
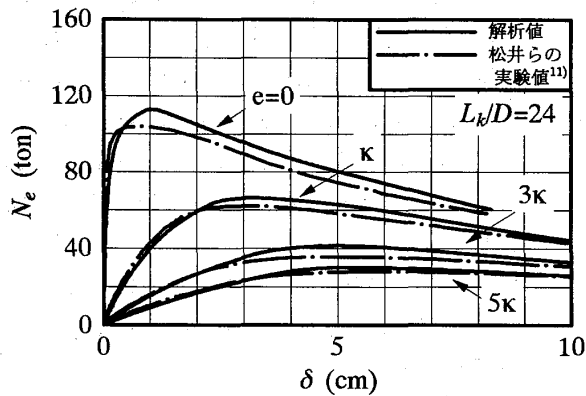
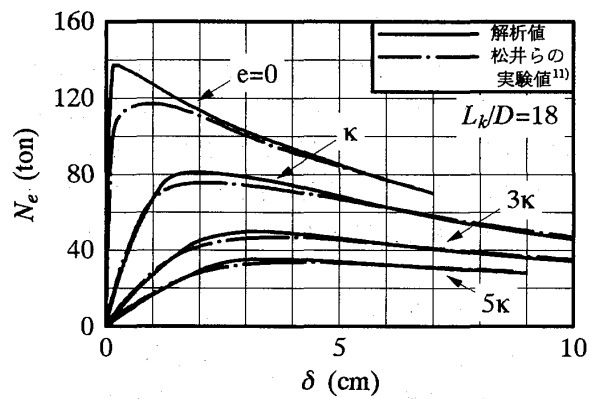
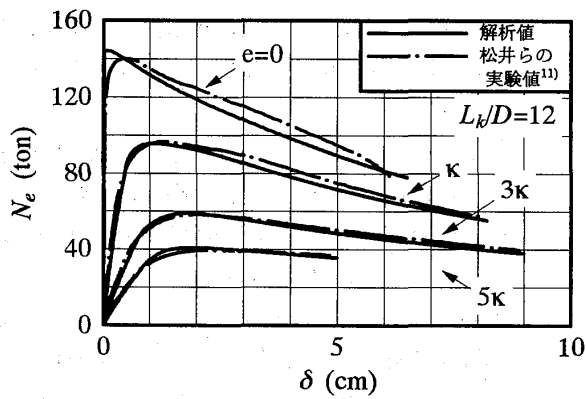
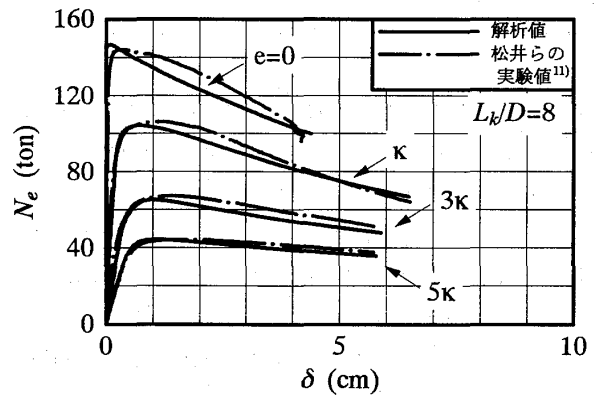
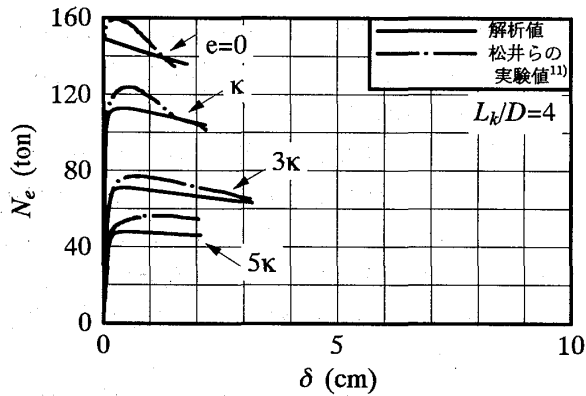


図-10 軸力～柱材中央水平変位関係

326.0kg/cm<sup>2</sup>, 応力ひずみ関係は鋼管については弾完全塑性形, 充填コンクリートについては図-2のモデルとした。

図-8に, P. K. Neogi らが行った座屈試験に対応する解析を行った結果得られた圧縮力と材中央水平変位関係を示す。解析は柱を軸方向に10分割して行った。

図-9は材中央曲げモーメントと材中央水平変位関係である。解析結果は実験値とよく一致している。

### 3. 2 松井ら<sup>11)</sup>の実験モデル

モデルの寸法と材料定数は以下の通りである。鋼管直径  $D=16.52\text{cm}$ , 厚さ  $t=0.45\text{cm}$ , ヤング率  $E_s=2100\text{t/cm}^2$ , 降伏応力  $\sigma_s=3.60\text{t/cm}^2$ , 充填コンクリートの圧縮強度  $F_c=417.0\text{kg/cm}^2$ , 応力ひずみ関係は鋼管についてはひずみ硬化係数  $H=E_s/100$  のbilinear形, 充填コンクリートについては図-2のモデルを用いた。

図-10に, 松井らが行った座屈試験に対応する解析を行った結果得られた圧縮力と材中央水平変位関係を示す。解析は柱を軸方向に10分割して行った。初期変位は偏心  $e=0$  の場合は柱の長さ  $L_k$  の1/4000を最大値とする正弦波と仮定し, 偏心  $e=1\kappa, 3\kappa, 5\kappa$  の場合は零とした。ここに  $\kappa=2.1\text{cm}$  である。 $L_k/D=4$  の場合に解析結果が実験値よりやや低いが, 全体的に解析結果は実験値と極めてよく一致している。

本解析の仮定から明らかなように鋼管, 充填コンクリートともに複合応力の相互作用効果を見逃すなど, かなりの理想化を行っているが, ここで得られた結果から勘案すると解析仮定は概ね妥当であり, 本解法は標準的なコンクリート充填円形鋼管柱の汎用数値解析法として十分な精度を有すると言えよう。

## 4. 結 語

コンクリート充填円形鋼管柱の弾塑性座屈解析を行うための汎用数値解析法を提示した。定式化に際して, 鋼管と充填コンクリートの間にはすべりが発生しないこと, 鋼管やコンクリートは生じる複合応力の相互作用効果を見逃すことなどかなりの理想化を行ったが, 種々の載荷条件下における柱の座屈および座屈後挙動に関する既往の実験結果と本解析法の結果は極めてよく一致し, 解析仮定がほぼ妥当なものであることを示した。

本解法は部材を材軸方向に小さな要素に分割することを前提にしており, 実用上は単一部材の解析にしか適用できない。今後, 本解法を一部材一要素程度のモデル化で適用できるよう検討を進める予定である。

## 謝 辞

本研究に際し, 九州大学教授松井千秋博士, 同助教授河野昭彦博士, 同助手津田恵吾博士から有益な御指摘と貴重な実験データをいただいた。ここに深く感謝の意を表す。

## 参考文献

- 1) Furlong, R. W.: Design of steel-encased concrete beam-columns, J. of Struct. Div., ASCE, Vol. 94, No. ST1, pp. 267-281, 1968. 1.
- 2) Neogi, P. K., Sen, H. K. and Chapman, J. C.: Concrete-Filled Tubular Steel Columns under Eccentric Loading, The Structural Engineer, Vol. 47, No. 5, pp. 187-195, 1969. 5.
- 3) Knowles, R. B. and Park, R.: Strength of Concrete Filled Steel Tubular Column, ASCE J. of Struct. Div., Vol. 95, No. ST12, pp. 2565-2587, 1969. 12.
- 4) 冨井政英, 崎野健治: 充てんコンクリート鋼管構造に関する研究の現状, その1. 部材の弾塑性性状, コンクリート工学, Vol. 13, No. 2, 1975. 2.
- 5) 松井千秋: コンクリート充填鋼管構造の構造性能と設計, 鋼構造論文集, Vol. 1, No. 2, pp. 11-24, 1994. 6.
- 6) 藤井 堅, 小寺親房, 山本博稔: ボンド型およびアンボンド型モルタル充填鋼管長柱の座屈強度特性, 鋼構造論文集, Vol. 1, No. 2, pp. 47-56, 1994. 6.
- 7) 加藤 勉: コンクリート充填鋼管短柱の圧縮強さ, 変形能力(コンクリート充填鋼管柱の 耐力, 変形能力の研究, I), 日本建築学会構造系論文集, 第468号, pp. 183-191, 1995. 2.
- 8) 加藤 勉: 曲げと圧縮をうけるコンクリート充填鋼管柱の耐力, 変形能力(コンクリート充填かお管柱の 耐力, 変形能力の研究, II), 日本建築学会構造系論文集, 第477号, pp. 157-166, 1995. 11.
- 9) Hesham Zien EI Din, Chiaki Matsui and Keigo Tsuda: Stability and Post-Buckling Behavior of Concrete Filled Square Tubular Columns, Journal of Structural Engineering. Vol. 39B, pp. 323-334, 1993. 3.
- 10) 若林 實, 吉田 望: 細長い合成柱の設計式, 日本建築学会構造系論文集, 第278号, pp. 27-36, 1979. 4.
- 11) 松井千秋, 津田恵吾, 尾崎 功, 石橋靖夫: コンクリート充填円形鋼管長柱の設計式について, 構

- 造工学論文集, Vol. 40B, pp. 403-410, 1994. 3.
- 12) Tanfang FANG, 中村 武: 充填型角形鋼管コンクリート長柱の圧縮耐力に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol. 40B, pp. 411-417, 1994. 3.
- 13) Ramm, E: The Riks/Wempner approach-an extension of the displacement control method in nonlinear analysis, Recent Advances in Nonlinear Computational Mechanics, Pineridge Press, 1982.
- 14) 修行 稔: 変断面角形鋼管柱の終局強度, 構造工学論文集, Vol. 38B, pp. 411-419, 1992. 3.
- 15) 修行 稔ほか3名: 鋼管構造部材の弾塑性接線剛性行列, 日本建築学会構造系論文報告集, 第400号, pp. 91-99, 1989.