

周期的な支点変動を受ける偏平ケーブルの応答解析

高橋和雄* ・ 花田博史**
鎌田智之*** ・ 松野進****

Response Analysis of a Small-sag Cable Driven by Harmonic End Load

by

Kazuo TAKAHASHI*, Hiroshi HANADA**
Tomoyuki KAMATA*** and Susumu MATSUNO****

Linear response of a suspended small-sag cable driven by harmonic end-load are presented. The basic equation is solved by a Galerkin method and the harmonic balance method. The accuracy of the present solution is discussed at first. Then, linear responses of a suspended cable are shown for various sag-to-span ratios.

1. まえがき

斜張橋の主桁あるいは塔が風荷重や走行荷重などによって振動するとケーブルに振幅の大きな局部振動が発生する可能性があることが指摘されている。これらの原因として係数励振振動が考えられる。この問題に関して、著者らは支点が拘束された単一ケーブルをモデルに動的安定性について解析している^{1),2)}。また、構造物においてケーブルの支点は完全拘束ではなく支点が動くことによってケーブルに変動張力が与えられると考え、ケーブルの支点が動きうる場合の解析も行っている³⁾。解析的手法ではなく数値シミュレーションによる解を求めている。しかし、その後の著者らの検討によって解析的手法の適用が可能であることが判明した。

そこで、本研究では支点が動きうる偏平ケーブルの解析的なアプローチを行う。まず、文献3)と同様に偏平ケーブルの支点が軸方向に動きうることを考慮して線形化した運動方程式に Galerkin 法を適用して離散

化を行い、1自由度系の常微分方程式に変換する。得られた運動方程式は非同次の Mathieu 方程式となる。運動方程式の一般解の周期関数をフーリエ級数を使って仮定し、調和バランス法を適用して連立線形代数方程式に変換する。この方程式を解いて振幅成分を求めることによって、周期的な支点変動を受ける偏平ケーブルの応答特性を明らかにする。

2. 運動方程式

左支点のみが水平方向に動きうる偏平ケーブル(サグ比 $\gamma = f/\ell < 1/8$)の線形化した運動方程式は次式で与えられる⁴⁾。

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (H_e + H_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K_e H_t \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 w : 垂直方向の変位、 t : 時間、 m : ケーブルの単位長さあたりの質量、 H_e : 初期水平張力、 H_t :

平成8年10月18日受理

* 社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

** 大学院修士課程社会開発工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

*** 前田建設工業(株) (Maeda Corporation)

**** 日立造船(株) (Hitachi Zosen Corporation)

変動水平張力の振幅, $K_e=8f/\ell^2$: 放物線ケーブルの曲率, f : ケーブルのサグ, ℓ : ケーブルのスパン, Ω : 変動水平張力の円振動数.

鉛直方向の変位の境界条件は $w(0)=0$, $w(\ell)=0$ で与えられる.

式(1)は非同次の Mathieu 方程式である.

3. 解 法

(1) 常微分方程式への変換

式(1)の解を1自由度系の変数分離形で仮定する.

$$w = \ell T(t) W(x) \quad (2)$$

ここに, $T(t)$: 未知の時間関数, $W(x)$: 境界条件を満足する座標関数.

座標関数 $W(x)$ は, 支点が動きうるケーブルの固有モードを用い, 式(1)で $H_t=0$ とした固有振動解析により得られる. すなわち,

$$W(x) = \sin \frac{\pi}{\ell} x \quad (3)$$

支点が動きうる場合のケーブルの固有振動形は, サグ比に無関係に弦の固有振動形と同じ正弦波で与えられる. また, 固有振動数もサグ比に無関係に弦の固有振動数と一致する.

式(1)に式(2)を代入した方程式に Galerkin 法を適用し離散化した後, 線形減衰力を考慮すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \ddot{T} + 2h\omega_1 \dot{T} + \omega_1^2(1 + \bar{H}_t \cos \bar{\omega}\tau) T \\ + \frac{32}{\pi^3} \gamma \bar{H}_t \cos \bar{\omega}\tau = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに, $\omega_1 = n_1/\pi n_0$: 第1次の無次元固有円振動数, $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m \ell^2}$: 弦の第1次の固有円振動数, n_1 : ケーブルの第1次の固有円振動数, $\gamma = f/\ell$: サグ比, $\bar{\omega} = \Omega/n_0$: 無次元加振円振動数, $\tau = n_0 t$: 無次元時間, $\bar{H}_t = H_t/H_e$: 無次元変動軸力の振幅, h : 減衰定数.

(2) 解の性質

式(4)の運動方程式は, 変動軸力の項(第4項)と強制力の項(第5項)を含む. したがって強制力の項より付随型の応答と, 変動軸力の項より分岐型の応答が発生する. 変動軸力が系に作用する場合, 不安定振動が現れるが, 式(4)は1自由度であるから不安定現象には単純共振のみが存在する. 単純共振は, 励振振動数が系の固有円振動数の2倍の整数分の1付近で生じる⁵⁾. すなわち,

$$\bar{\omega} = \frac{2\omega_1}{k} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (5)$$

ここで, $k=1$: 主不安定領域, $k \geq 2$: 副不安定領域.

つまり, 文献3)の数値シミュレーションで示したように変動軸力と強制外力が同時に作用するために, 不安定領域において単純共振が単独に生ずる分岐解と, 主共振と単純共振または単純共振どうしが連成するような形で生ずる付随解が存在する.

(3) 付随型の応答

文献3)より固有円振動数 ω_1 , 固有円振動数の $1/2(\omega_1/2)$, $1/3(\omega_1/3)$, $1/4(\omega_1/4)$ および $1/5(\omega_1/5)$ 付近などに付随型の応答が生じていることから, それに対応する $k=2, 4, 6, 8, 10, \dots$ の第1, 3, 5, 7, 9, ... 副不安定領域および強制振動による応答を求めるため, 周期解を次式で仮定する.

$$\begin{aligned} T = \frac{C_0}{2} + c_1 \cos \bar{\omega}\tau + s_1 \sin \bar{\omega}\tau \\ + c_2 \cos 2\bar{\omega}\tau + s_2 \sin 2\bar{\omega}\tau \\ + c_3 \cos 3\bar{\omega}\tau + s_3 \sin 3\bar{\omega}\tau \\ + c_4 \cos 4\bar{\omega}\tau + s_4 \sin 4\bar{\omega}\tau \\ + c_5 \cos 5\bar{\omega}\tau + s_5 \sin 5\bar{\omega}\tau \end{aligned} \quad (6)$$

ここに, $C_0, C_1, S_1, C_2, S_2, C_3, S_3, C_4, S_4, C_5, S_5$: 付随調波成分.

式(6)を式(4)に代入し, 調和バランス法を適用すれば11個の連立代数方程式が得られる.

$$\frac{1}{2} \omega_1^2 (C_0 + c_1 \bar{H}_t) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \bar{\omega}^2) c_1 + 2h\omega_1 \bar{\omega} s_1 \\ + \frac{1}{2} \omega_1^2 \bar{H}_t (C_0 + C_2) + \frac{32}{\pi^3} \gamma \bar{H}_t = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\omega_1^2 - \bar{\omega}^2) s_1 - 2h\omega_1 \bar{\omega} c_1 + \frac{S_2}{2} \omega_1^2 \bar{H}_t = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - 4\bar{\omega}^2) c_2 + 4h\omega_1 \bar{\omega} s_2 \\ + \frac{1}{2} \omega_1^2 \bar{H}_t (C_1 + C_3) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - 4\bar{\omega}^2) s_2 - 4h\omega_1 \bar{\omega} c_2 \\ + \frac{1}{2} \omega_1^2 \bar{H}_t (S_1 + S_3) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - 9\bar{\omega}^2) c_3 + 6h\omega_1 \bar{\omega} s_3 \\ + \frac{1}{2} \omega_1^2 \bar{H}_t (C_2 + C_4) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - 9\bar{\omega}^2) s_3 - 6h\omega_1 \bar{\omega} c_3 \\ + \frac{1}{2} \omega_1^2 \bar{H}_t (S_2 + S_4) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$(\omega_1^2 - 16\bar{\omega}^2)c_4 + 8h\omega_1\bar{\omega}s_4 + \frac{1}{2}\omega_1^2\bar{H}_t(c_3 + c_5) = 0 \quad (14)$$

$$(\omega_1^2 - 16\bar{\omega}^2)s_4 - 8h\omega_1\bar{\omega}c_4 + \frac{1}{2}\omega_1^2\bar{H}_t(s_3 + s_5) = 0 \quad (15)$$

$$(\omega_1^2 - 25\bar{\omega}^2)c_5 + 10h\omega_1\bar{\omega}s_5 + \frac{c_4}{2}\omega_1^2\bar{H}_t = 0 \quad (16)$$

$$(\omega_1^2 - 25\bar{\omega}^2)s_5 - 10h\omega_1\bar{\omega}c_5 + \frac{s_4}{2}\omega_1^2\bar{H}_t = 0 \quad (17)$$

これらの式は、線形連立代数方程式であるので連立一次方程式の解法を用いて解けば、各振幅成分が得られ、式(6)に代入して最大応答 T_{\max} が求められる。

(4) 分岐型の応答

分岐型の応答の不安定領域の境界を求める。

(a) $k=1$ の主不安定領域の場合

式(4)の解を次のように仮定する。

$$T = c_{1/2} \cos \frac{1}{2}\bar{\omega}\tau + s_{1/2} \sin \frac{1}{2}\bar{\omega}\tau \quad (18)$$

ここに、 $c_{1/2}$ 、 $s_{1/2}$ ：分岐調波成分。

式(16)を式(4)に代入し、調和バランス法を適用すると次の2個の連立代数方程式が得られる。

$$\left(\omega_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2\right)c_{1/2} + h\omega_1\bar{\omega}s_{1/2} + \frac{c_{1/2}}{2}\omega_1^2\bar{H}_t = 0 \quad (19)$$

$$\left(\omega_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2\right)s_{1/2} - h\omega_1\bar{\omega}c_{1/2} - \frac{s_{1/2}}{2}\omega_1^2\bar{H}_t = 0 \quad (20)$$

上の2式を行列表示する。

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}\bar{H}_t\right)\omega_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2 & h\omega_1\bar{\omega} \\ -h\omega_1\bar{\omega} & \left(1 - \frac{1}{2}\bar{H}_t\right)\omega_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{1/2} \\ s_{1/2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$c_{1/2}$ と $s_{1/2}$ が 0 以外の解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}\bar{H}_t\right)\omega_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2 & h\omega_1\bar{\omega} \\ -h\omega_1\bar{\omega} & \left(1 - \frac{1}{2}\bar{H}_t\right)\omega_1^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2 \end{vmatrix} = 0$$

これを解くと、以下の条件式を得る。

$$\bar{\omega}^2 = 4\omega_1^2 - 8h^2\omega_1^2 \pm 2\omega_1^2\sqrt{16h^4 - 16h^2 + \bar{H}_t^2} \quad (22)$$

ω_1 、 h および \bar{H}_t の値を代入し $\bar{\omega}$ を求めることによって主不安定領域の境界線を得ることができる。

(b) $k=3,5,7,\dots$ の副不安定領域の場合

(a)と同様に解を次のように仮定する。

$$T = c_{k/2} \cos \frac{k}{2}\bar{\omega}\tau + s_{k/2} \sin \frac{k}{2}\bar{\omega}\tau \quad (23)$$

ここに、 $c_{k/2}$ 、 $s_{k/2}$ ：分岐調波成分。

式(4)に代入し、調和バランス法を適用して連立代数方程式を導き、(a)と同様に条件式を求めると、次式となる。

$$\bar{\omega}^2 = \frac{4\omega_1^2(1 - 2h^2 \pm 2h\sqrt{h^2 - 1})}{k^2} \quad (24)$$

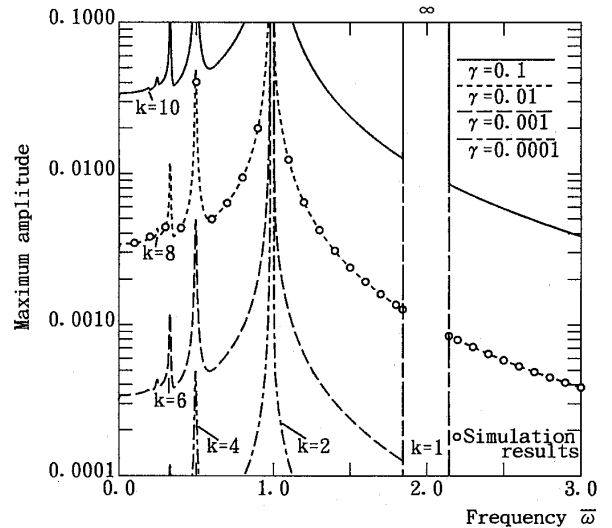


Fig. 1 Response curves ($\bar{H}_t=0.3$, $h=0.005$, $\omega_1=1.0$)

Table 1 Unstable regions

k	Occurrence condition	Response type
1	$\bar{\omega}=2\omega_1$	bifurcation type
2	$\bar{\omega}=\omega_1$	incidental type
4	$\bar{\omega}=\frac{1}{2}\omega_1$	incidental type
6	$\bar{\omega}=\frac{1}{3}\omega_1$	incidental type
8	$\bar{\omega}=\frac{1}{4}\omega_1$	incidental type
10	$\bar{\omega}=\frac{1}{5}\omega_1$	incidental type

式(24)より減衰定数 h が $0 < h < 1$ ならば ω^2 は虚数, $h \geq 1$ ならば $\omega^2 < 0$ となり解が存在しないので分岐応答は発生しない. 従って, 本ケースでは副不安定領域は存在しない.

4. 解析結果

Fig. 1 は, 無次元変動軸力の振幅 $\bar{H}_t = 0.3$, 減衰定数 $h = 0.005$ の場合の応答振幅と無次元加振円振動数との関係をサグ比をパラメータに示している. 縦軸は, スパン長で無次元化したケーブルの中央点の無次元応答振幅, 横軸は弦の 1 次の固有円振動数で無次元化した無次元加振円振動数である. また, サグ比 $\gamma = 0.01$ の場合の数値シミュレーションの値を○でプロットしている. 解析解とシミュレーション解は完全に一致する. したがって, 解析解の精度は十分であると言える.

サグ比が大きくなると, それに比例して強制力も増すために応答振幅が大きくなる. 固有円振動数 $\omega_1 = 1.0$ 付近では, 変動軸力による第 1 副不安定領域 ($k = 2$) と強制振動による主共振が連成し, サグ比の大きさに無関係に応答振幅が増大する. 図のように強制項の影響が支配的な付随応答となっている. また, 加振円振動数 $\omega_1/2(0.05)$, $\omega_1/3(0.33)$, $\omega_1/4(0.25)$, $\omega_1/5(0.20)$ 付近には, それぞれ第 3 ($k=4$), 第 5 ($k=6$), 第 7 ($k=8$), 第 9 ($k=10$) 副不安定領域が発生し, 幅の狭い共振が現れる. この場合も強制外力が支配的な応答となっている. 固有円振動数の 2 倍 ($2\omega_1 = 2.0$) 付近では主不安定領域が分岐応答として現れており, この領域では振幅は無限大となっており変動軸力による係数励振振動が支配的である. したがって, $2\omega_1$ の付近の主不安定領域は減衰の効果が期待できない振動と言える. Table 1 に不安定領域の発生領域と応答の型をまとめた.

5. ま と め

本研究で得られた結果をまとめると以下の通りである.

1. 支点が動く場合の偏平ケーブルの応答を解析的手法で求めることができ, 解析解の精度は十分である.
2. 不安定領域には, 強制振動による主共振または他の不安定領域と連成された形で現れる付随型と, 特定の振動数領域で単独に現れる分岐型がある.
3. 分岐型の不安定領域は, 固有円振動数の 2 倍 ($2\omega_1$) 付近で生じる主不安定領域のみ現れ, 分岐型副不安定領域は現れない.

なお, 計算には長崎大学総合情報処理センターの

FACOM V-1200を使用したことを付記する.

参考文献

- 1) 高橋和雄・一ノ瀬寛幸・町田健一郎・夏秋義広: 変動軸力を受けるケーブルの動的安定性, 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 921~928, 1992.
- 2) Takahashi, K.: Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Load, Journal of Sound and Vibration, Vol. 144, pp. 323~330, 1991.
- 3) 高橋和雄・鎌田智之・町田健一郎・松野 進: 支点が動きうるサグ比の小さいケーブルの動的安定性, 土木学会論文集, No. 495/I-28, pp. 127~130, 1994. 7.
- 4) Perkins, N. C.: Discussion of Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Load, Journal of Sound and Vibration, Vol. 156, No. 2, pp. 363~365, 1992.
- 5) Bolotin, V. V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.