

マトリックス演算ソフトウェア MATLAB による 不規則構造解析

河角省治* ・ 岡林隆敏**
崎山 毅***

Stochastic Structural Analysis by Numeric Computation Software MATLAB

by

Shouji KAWAKADO*, Takatoshi OKABAYASHI**
and Takeshi SAKIYAMA***

This paper is concerned with an application of mathematical softwares for calculating the variance of the static deflections and the internal forces of structural systems subjected to the stochastically distributed loads. The purpose of this paper is to explain the concept of the application. We used a numerical analysis software 'MATLAB' to obtain the numerical solution of this problem. The algorithm of the program using 'MATLAB' for calculating the co-variance response of structural systems are explained.

The calculating results show the standard deviations of the response of the displacements and the internal forces of fixed arch and 2-hinged arch under the stochastically distributed loads.

1. はじめに

道路橋活荷重、積雪荷重、積載荷重などの静的な外力は空間的に不規則に変動していると考えられる¹⁾。このような荷重を受ける構造物の信頼性解析では、構造物の静的応答の確率特性を求めることが基礎となる。一般に、このような確率論的解析は、確定論的解析と比べて極めて煩雑になる。さらに、確率論的解析の基本は解析的手法を基礎にしたものであり、解析の煩雑さが解析の障害となっていると考えることができる。

このような視点から、著者らは、構造-荷重系を伊藤型の確率微分方程式でモデル化し、これより誘導される共分散方程式を数値解析する方法を、はり、連続

ばり、アーチ、および平面ラーメンなどの構造系に適用してきた²⁾⁻⁵⁾。この解析法は、伝達マトリクス法を共分散行列に拡張した手法であり、各種の構造物に対して統一的な適用を可能にするものである。

また近年、パーソナルコンピュータの高性能化および計算機利用技術の飛躍的な発展に伴い、計算目的に応じた各種のパッケージソフトウェアが利用されてきている。一般に、これらのソフトウェアはコマンド機能による動作だけでなく、それぞれ固有の簡易言語によるプログラム機能による動作も可能としている。マトリクス演算ソフトウェア MATLAB は⁶⁾、制御設計や信号処理の支援ツール^{7),8)}として開発され、行列演算や関数演算が簡易なプログラミングで行えるとし

平成8年10月28日受理

* (株) PAL 構造 (PAL Co., Ltd.)

** 社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

*** 構造工学科 (Department of Structural Engineering)

てる。このことから、数値解析の汎用的なソフトウェアとしての利用も可能であると考えられる。

共分散方程式の数値解析法である確率伝達マトリックス法は²⁾⁻⁵⁾、伝達マトリックス法^{9),10)}を確率論的解析に拡張したものであり、マトリックス形式の連立方程式および微分方程式を解く問題に帰着される。そこで、この問題の数値解析に MATLAB を用いることにより、従来型のプログラム言語を用いる場合と比較して、より簡易なプログラムの記述により解析が行えるようになると考える。

本論文では、確率伝達マトリックス法の基礎方程式および解法の構成の整理を行い、また、これによる MATLAB のプログラムの記述を説明し、不規則構造解析が MATLAB を用いて実用的かつ汎用的に行えることを明確にした。本論文の計算例として、空間的に相関のある不規則分布荷重を受けるアーチの共分散応答を求めた。

2. 確率微分方程式

2.1 構造系の状態方程式

対象となる構造系は、伝達マトリックス法^{9),9)}が適用できる構造であり、直列型の s ($s=1, 2, 3, \dots$) 本の部材から構成されるものとする。また、始端の 0 節点と終端の s 節点には境界条件が与えられる。荷重は不規則分布荷重のみ作用するものとして弾性微小変形を考える。このとき、部材軸に沿った無次元座標 x を用いると、各部材の無次元状態変数ベクトル $\mathbf{Y}_k(x)$ 、および無次元外力ベクトル $\mathbf{F}_{yk}(x)$ により各部材の状態方程式は次のように表される。

$$\frac{d}{dx} \mathbf{Y}_k(x) = \mathbf{A}_{yk}(x) \mathbf{Y}_k(x) + \mathbf{F}_{yk}(x)$$

$$\text{境界条件: } \mathbf{Y}_k(0) = \mathbf{Y}_k^l, \mathbf{Y}_k(\ell_k) = \mathbf{Y}_k^r \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{A}_{yk}(x)$ は状態変数に関する係数行列であり、 ℓ_k は部材軸に沿った部材の無次元長さである。

以下に、各構造系の状態変数ベクトル、外力ベクトルおよび係数行列の構成を示す。

(1) はりおよび連続ばり

はりの状態量の無次元化は次のように考える。

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}/\ell_0 \\ y(x) &= \bar{y}(x)EI_0/p\ell_0^3 \\ \phi(x) &= \bar{\phi}(x)EI_0/p\ell_0^3 \\ M(x) &= \bar{M}(x)/p\ell_0^2 \\ Q(x) &= \bar{Q}(x)/p\ell_0 \\ q(x) &= \bar{q}(x)/p \\ \sigma_q^2 &= \bar{\sigma}_q^2\ell_0/p^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、次元量を $\bar{\quad}$ の記号で表し、 ℓ_0 は規準支間長、 EI_0 は規準曲げ剛性を表している。また、 p は一様分布荷重強度である。さらに、 $y(x)$ はたわみ、 $\phi(x)$ はたわみ角、 $M(x)$ は曲げモーメント、 $Q(x)$ はせん断力、 $q(x)$ は分布荷重、そして σ_q^2 は分布荷重の分散の無次元量を表している。

これらを用いて、状態変数ベクトルなどは、

$$\mathbf{Y}_k(x) = [y(x) \quad \phi(x) \quad M(x) \quad Q(x) \quad V_1 \cdots V_i]^T \quad (3-1)$$

$$\mathbf{F}_{yk}(x) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -q(x) \quad 0 \cdots 0]^T \quad (3-2)$$

$$\mathbf{A}_{yk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_M(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

のように表すことができる。ここに、 $a_M(x) = -EI_0/EI(x)$ である。

(2) アーチ

アーチの状態量の無次元化は次のように考える。

$$\left. \begin{aligned} x &= s/L \\ u(x) &= \bar{u}(s)/L \\ v(x) &= \bar{v}(s)/L \\ \phi(x) &= \bar{\phi}(s) \\ M(x) &= \bar{M}(s)L/EI_0 \\ N(x) &= \bar{N}(s)L^2/EI_0 \\ Q(x) &= -\bar{Q}_x(s)L^2/EI_0 \\ q_x(x) &= -\bar{q}_x(s)L^3/EI_0 \\ q_y(x) &= \bar{q}_y(s)L^3/EI_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

s は軸線座標、 L はアーチ軸長を表している。さらに、 $u(x)$ は接線方向変位、 $v(x)$ は半径方向変位、 $N(x)$ は軸力、 $q_x(x)$ は分布荷重の接線方向成分、 $q_y(x)$ は分布荷重の半径方向成分の無次元量を表している。その

他の量は、(1)連続ばりで定義しているものを用いる。
これらを用いて、状態変数ベクトルなどは、

$$\mathbf{Y}_k(x) = [u(x) \ v(x) \ \phi(x) \ N(x) \ Q(x) \ M(x)]^T \quad (5-1)$$

$$\mathbf{F}_{Yk}(x) = [0 \ 0 \ 0 \ q_x(x) \ q_y(x) \ 0]^T \quad (5-2)$$

$$\mathbf{A}_{Yk} = \begin{bmatrix} 0 & \theta(x) & 0 & 0 & b(x) & 0 \\ -\theta(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

のように表示できる。ここに、アーチ軸線の曲率半径を $R(x)$ として、

$$\begin{aligned} \theta(x) &= L/R(x), \quad \alpha(x) = EA_0 R(x)^2 / EI_0 \\ a(x) &= EA_0 / EA(x), \quad i(x) = EI_0 / EI(x) \\ b(x) &= a(x) / (\alpha(x)\theta(x)) \end{aligned}$$

さらに、 EA_0 は規準伸び剛性、 $EI(x)$ は曲げ剛性、 $EA(x)$ は伸び剛性である。

(3) 直列型剛節構造物

状態量などの無次元化を連続ばりと同じように考えると、各部材の状態変数ベクトルなどは、

$$\mathbf{Y}_k(x) = [u(x) \ v(x) \ \phi(x) \ N(x) \ Q(x) \ M(x)]^T \quad (6-1)$$

$$\mathbf{F}_{Yk}(x) = [0 \ 0 \ 0 \ q_x(x) \ q_y(x) \ 0]^T \quad (6-2)$$

$$\mathbf{A}_{Yk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_N(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_M(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

のようになる。ここに、 $\alpha_N(x) = EI_0 / \ell_0^2 EA(x)$ 、 $\alpha_M(x) = -EI_0 / EI(x)$ である。

2. 2 構造系の境界条件と節点行列

構造系の境界条件は、変位を規定する幾何学境界条件と断面力を規定する力学境界条件からなり、それらの1/2は既知量となり、残りの1/2が未知量となる。また、中間支点反力、バネ反力などの節点未知量は、始端では未知であり、終端では0の既知量となるようにする。

ここで、構造系始端の境界条件 \mathbf{Y}_0 の未知量からなる始端境界ベクトル $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ を、

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{B}_Y \tilde{\mathbf{Y}}_0 \quad (7)$$

のように用いる。ここに、 \mathbf{B}_Y は構造系の始端境界マトリックスであり、始端境界未知量を始端境界条件に展開するための行列である。

一方、終端では、境界条件 \mathbf{Y}_s の既知量からなる終端境界ベクトル $\tilde{\mathbf{Y}}_s$ は、

$$\mathbf{B}'_Y \mathbf{Y}_s = \tilde{\mathbf{Y}}_s = 0 \quad (8)$$

のように表示できる。ここに、 \mathbf{B}'_Y は終端境界マトリックスであり、終端境界条件から既知量のみを抽出するための行列である。これらの境界マトリックスを用いることにより、構造系の任意の境界値問題を解くことが可能になる³⁾。

また、構造系の状態変数は、 \bar{k} 部材の終端 $\mathbf{Y}_{\bar{k}}$ より $\bar{k}+1$ 部材の始端 $\mathbf{Y}_{\bar{k}+1}$ に k 節点の構造系の節点行列 \mathbf{P}_{Yk} により伝達される。

$$\mathbf{Y}_{\bar{k}+1} = \mathbf{P}_{Yk} \mathbf{Y}_{\bar{k}} \quad (9)$$

2. 3 不規則荷重のモデル化

不規則荷重を正規性確率場と仮定すると、応答量も正規性確率場となり、応答量 $\mathbf{Y}(x)$ の x 点の確率特性は、平均値 $E[\mathbf{Y}(x)]$ と平均値回りの変動 $\hat{\mathbf{Y}}(x)$ の共分散 $\mathbf{R}_Y(x) = E[\hat{\mathbf{Y}}(x)\hat{\mathbf{Y}}^T(x)]$ により完全に規定できる。本研究では、外力の平均値回りの変動に対する応答の共分散に着目する。以後、式の簡略化のために変数は平均値回りの変動を表すものとする。

\bar{k} 部材の外力ベクトル $\mathbf{F}_{Yk}(x)$ は、任意のパワースペクトル密度を有する定常確率過程ベクトル $\mathbf{Z}_k(x)$ と確定関数行列 $\mathbf{G}_{Yzk}(x)$ の積で表される非定常確率過程ベクトルとする²⁾。

$$\mathbf{F}_{Yk}(x) = \mathbf{G}_{Yzk}(x)\mathbf{Z}_k(x) \quad (10)$$

$\mathbf{Z}_k(x)$ のパワースペクトル密度または自己相関関数が既知の場合は、 $\mathbf{Z}_k(x)$ を白色雑音過程を入力とする線形微分方程式の定常解過程で近似的に表現することができ²⁾、次の荷重系の状態方程式を得る。

$$\frac{d}{dx} \mathbf{Z}_k(x) = \mathbf{A}_Z \mathbf{Z}_k(x) + \mathbf{N}_{Zk}(x) \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{N}_{Zk}(x)$ は平均値が0で、次のような性質を有する正規性白色雑音過程ベクトルである。

$$E[\mathbf{N}_{Zk}(x_1)\mathbf{N}_{Zk}^T(x_2)] = \mathbf{Q}_Z \delta(x_1 - x_2) \quad (12)$$

ここに、 \mathbf{Q}_Z は荷重強度行列である、また δ はディラックのデルタ関数である。

さらに、 $\mathbf{Z}_k(x)$ の共分散を $\mathbf{R}_{Zk}(x)$ とすると、 $\mathbf{Z}_k(x)$ に関する共分散方程式を得る。

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}_{Zk}(x) = \mathbf{A}_Z \mathbf{R}_{Zk}(x) + \mathbf{R}_{Zk}(x) \mathbf{A}_Z^T + \mathbf{Q}_Z \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{Z}_k(x)$ は定常確率過程としていることから、 $d\mathbf{R}_{Zk}(x)/dx=0$ となる。したがって、(13)式は次の連立方程式となり、 $\mathbf{R}_{Zk}(x)=\mathbf{R}_Z$ について解くことができる。

$$\mathbf{A}_Z \mathbf{R}_Z + \mathbf{R}_Z \mathbf{A}_Z^T + \mathbf{Q}_Z = 0 \quad (14)$$

なお、ここで定義した \mathbf{A}_Z 、 \mathbf{Q}_Z 、 \mathbf{R}_Z などの行列は、パワースペクトル密度または自己相関関数より決定できる²⁾。

2. 4 構造-荷重系の状態空間

構造系の状態変数 $\mathbf{Y}_k(x)$ と荷重系の状態変数 $\mathbf{Z}_k(x)$ を合成して、第 \bar{k} 部材の構造-荷重系の状態変数を

$$\mathbf{X}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k(x) \\ \mathbf{Z}_k(x) \end{bmatrix} \quad (15)$$

のように定義する。

構造系の状態方程式(1)式と荷重系の状態方程式(11)式および(10)式より、 \bar{k} 部材の構造-荷重系の状態方程式は、

$$\frac{d}{dx} \mathbf{X}_k(x) = \mathbf{A}_{Xk}(x) \mathbf{X}_k(x) + \mathbf{N}_{Xk}(x) \quad (0 \leq x \leq l_k)$$

$$\text{境界条件: } \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k^0, \mathbf{X}_k(l_k) = \mathbf{X}_k^s \quad (16)$$

のように、平均値 0 の白色雑音過程ベクトル $\mathbf{N}_{Xk}(x)$ を入力とする確率微分方程式で表示できる。ここに、

$$\mathbf{A}_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Yk}(x) & \mathbf{G}_{YZk}(x) \\ 0_{b,a} & \mathbf{A}_Z \end{bmatrix} \quad (17-1)$$

$$\mathbf{N}_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} 0_a \\ \mathbf{N}_{Zk}(x) \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

さらに、

$$\mathbf{E}[\mathbf{N}_{Xk}(x_1) \mathbf{N}_{Xk}^T(x_2)] = \mathbf{Q}_{Xk} \delta(x_1 - x_2) \quad (18-1)$$

$$\mathbf{Q}_{Xk} = \begin{bmatrix} 0_{a,a} & 0_{a,b} \\ 0_{b,a} & \mathbf{Q}_Z \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

のようになる。ここに、 $0_{i,j}$ は $(i \times j)$ の 0 行列を表して

いる。さらに、 a は構造系の次元数であり、 b は分布荷重系の次元数を表している。

この状態空間において、節点行列 \mathbf{P}_{Xk} は、次のようなブロックより構成される。

$$\mathbf{P}_{Xk} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{Yk} & 0_{a,b} \\ 0_{b,a} & \mathbf{I}_b \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここに、 \mathbf{I}_b は b 次元の単位行列である。

状態方程式(16)式の解は、始端境界条件を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k(x) &= \Phi_{Xk}(x, 0) \mathbf{A}(k-1, 0) \mathbf{X}_0 \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} \{ \Phi_{Xk}(x, 0) \mathbf{A}(k-1, j) \\ &\times \int_0^{l_j} \Phi_{Xj}(l_j, \lambda) \mathbf{N}_{Xj}(\lambda) d\lambda \\ &+ \int_0^x \Phi_{Xk}(x, \lambda) \mathbf{N}_{Xk}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (20)$$

のように表示できる。ここに、 $\mathbf{A}(j, i)$ は、 \bar{i} 部材終端より $\bar{j}+1$ 部材始端へ状態変数を伝達する行列であり、多部材の構造系では、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(j, i) &= \mathbf{P}_{Xj} \Phi_{Xj}(l_j, 0) \mathbf{P}_{Xj-1} \\ &\cdots \Phi_{Xi+1}(l_{i+1}, 0) \mathbf{P}_{Xi} \end{aligned} \quad (21)$$

また、 $\Phi_{Xk}(x_2, x_1)$ は $\mathbf{X}_k(x)$ の状態遷移行列である。さらに、相関のある荷重モデルにおいて、状態遷移行列 $\Phi_{Xk}(x_2, x_1)$ は

$$\Phi_{Xk}(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} \Phi_{Yk}(x_2, x_1) & \Phi_{YZk}(x_2, x_1) \\ 0_{b,a} & \Phi_{Zk}(x_2, x_1) \end{bmatrix} \quad (22)$$

のように分割できる。なお、 $\Phi_{Yk}(x_2, x_1)$ は構造系の状態遷移行列である。また、 $\Phi_{Zk}(x_2, x_1)$ は荷重系の状態遷移行列である。さらに、 $\Phi_{YZk}(x_2, x_1)$ は、荷重系に単位入力を加えたときの構造系の応答より構成される行列である。

2. 5 構造-荷重系の境界条件

構造-荷重系では、始端と終端の境界ベクトルを、

$$\tilde{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_0 \\ \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_s = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_s \\ \mathbf{Z}_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

に定義する。ここに \mathbf{Z}_0 、 \mathbf{Z}_s は荷重系(11)式の解の始端および終端における値である。また、境界マトリックスを用いて、始端と終端ベクトル \mathbf{X}_0 、 \mathbf{X}_s を

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}_X \tilde{\mathbf{X}}_0 \quad (24-1)$$

$$\mathbf{B}'_X \mathbf{X}_s = \tilde{\mathbf{X}}_s \quad (24-2)$$

のように表す。

3. 不規則構造解析

3. 1 共分散方程式

応答の共分散 $\mathbf{R}_X(x)$ は, $E[\mathbf{X}(x)\mathbf{X}^T(x)]$ で定義される. \bar{k} 部材の $\mathbf{R}_{Xk}(x)$ は,

$$\mathbf{R}_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Yk}(x) & \mathbf{R}_{YZk}(x) \\ \mathbf{R}_{ZYk}(x) & \mathbf{R}_Z \end{bmatrix} \quad (25)$$

のようなブロックより構成される. \mathbf{R}_Z は(14)式で与えられる荷重系の定常応答 $\mathbf{Z}_k(x)$ の共分散である. 本論文の目的である, 構造系の応答の共分散は, $\mathbf{R}_{Yk}(x)$ より求めることができる.

応答過程の共分散 $\mathbf{R}_{Xk}(x)$ は, 状態変数 $\mathbf{X}_k(x)$ と同じく, 節点においては, 節点行列により伝達される. \bar{k} 部材終端の共分散を \mathbf{R}_{Xk}^L , $\bar{k}+1$ 部材始端の共分散を \mathbf{R}_{Xk+1}^R とすると, k 節点の節点マトリックスを用いて,

$$\mathbf{R}_{Xk+1}^R = \mathbf{P}_{Xk} \mathbf{R}_{Xk}^L \mathbf{P}_{Xk}^T \quad (26)$$

のように伝達される.

この \bar{k} 部材の共分散 $\mathbf{R}_{Xk}(x)$ の空間的变化は, 応答の解過程(20)式を共分散の定義に代入し, 白色雑音過程ベクトルの性質を用いて積分を実行した後, 若干の式の変形を加えることにより, 次式の共分散方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{R}_{Xk}(x) &= \mathbf{A}_{Xk}(x) \mathbf{R}_{Xk}(x) + \mathbf{R}_{Xk}(x) \mathbf{A}_{Xk}^T(x) \\ &+ E[\mathbf{N}_{Xk}(x) \mathbf{X}_0^T] \mathbf{A}^T(k-1, 0) \\ &\quad \boldsymbol{\Phi}_{Xk}^T(x, 0) \\ &+ \boldsymbol{\Phi}_{Xk}(x, 0) \mathbf{A}(k-1, 0) E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] \\ &+ \mathbf{Q}_{Xk} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{境界条件: } \mathbf{R}_{Xk}^L = \mathbf{P}_{Xk-1} \mathbf{R}_{Xk-1}^R \mathbf{P}_{Xk-1}^T \quad (27)$$

また, 構造-荷重系の始端と終端の境界条件の共分散は,

$$\mathbf{R}_{X0} = E[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^T], \mathbf{R}_{Xs} = E[\mathbf{X}_s \mathbf{X}_s^T] \quad (28)$$

である.

(27)式の共分散方程式において, 始端境界条件の共分散 \mathbf{R}_{X0} が求められ, さらに, $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ およびこれの転置行列である $E[\mathbf{N}_{Xk}(x) \mathbf{X}_0^T]$ が得られると, この方程式は, 微分方程式の数値解法により解くことが可能になる.

3. 2 境界条件と外力の相関関数

応答の解過程 $\mathbf{X}(x)$ の終端における値は, (20)式を \bar{s} 部材に適用し $x = \ell_s$ とすることで得る. この式に,

右側より \bar{k} 部材で定義された白色雑音 $\mathbf{N}_{Xk}(x)$ をかけて, 白色雑音過程の性質(12)式を用いて積分を実行し, さらに, 境界条件(24)式の関係を用いると, 次式の関係を得る.

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{X}}_s \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] &= \mathbf{B}'_X \mathbf{A}(s, 0) \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] \\ &+ \mathbf{B}'_X \mathbf{A}(s, k+1) \boldsymbol{\Phi}_{Xk}(x, \ell_k) \mathbf{Q}_{Xk} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで, $E[\tilde{\mathbf{X}}_s \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ および $E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ は, 構造系と荷重系に関して分割され 2×2 の4つのブロックになり, それぞれに境界条件などを適用することにより, 連立方程式として解くことが可能になる. したがって,

$$E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_X^T(x)] = \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_X^T(x)] \quad (30)$$

を得ることができる.

3. 3 始端状態変数の共分散行列

終端境界の共分散 \mathbf{R}_{Xs} は始端境界の共分散 \mathbf{R}_{X0} と全区間の荷重項 \mathbf{P}_{Xs} によって,

$$\mathbf{R}_{Xs} = \mathbf{A}(s, 0) \mathbf{R}_{X0} \mathbf{A}^T(s, 0) + \mathbf{P}_{Xs} \quad (31)$$

のように表すことができる. \mathbf{P}_{Xs} は共分散方程式(27)式において初期条件を $\mathbf{R}_{X0} = 0$ のようにしたときの終端での解として計算できる. さらに, (31)式の各マトリックスは, 構造系と荷重系に関して分割され, 2×2 の4つのブロックになり, (31)式も4つの式に分割できる. 分割された式に, 境界条件(8), (9)式を用いると(31)式は連立方程式として解くことが可能になり, \mathbf{R}_{X0} を得ることができる.

4. MATLAB のプログラムの特徴

4. 1 MATLAB の特徴

MATLAB[®] は, UNIX, Macintosh, MS-Windows などのコンピュータシステムで稼動する制御設計や信号処理のためのアプリケーションであるが, 制御設計などの利用だけではなく, 数値解析の汎用的なソフトウェアとしての利用が考えられる. MATLAB の特徴は, 行列演算や各種関数などの機能を有する数値解析基本モジュールが提供されていることにある. さらに, 行列演算の表現は数式表現に準拠した極めて簡易なものである.

4. 2 MATLAB の関数機能

MATLAB のプログラムでは, FORTRAN におけるサブルーチンと同じように, 一連の処理を関数として定義できる. 関数を定義するファイルは拡張子 M を持つことから, M ファイルと呼ばれている. この関数

表-1 MATLAB の基本機能

記号	機能
+	加算
-	減算
*	乗算
'	共役転置
[,]	行列要素の定義
zeros()	0 行列を作る関数
eye()	単位行列を作る関数
inv()	逆行列を求める関数
expm()	行列の指数関数

表-2 関数 M ファイル

ファイル名	機能
type_AXXi	状態方程式の係数行列 A_{Xk}
LOD_QXXX	荷重強度行列 Q_{Xk}
type_PHY	構造状態遷移行列 Φ_{Xk}
CAL_RZZi	荷重系の共分散 R_z
CAL_CORi	境界条件と荷重の相関関数
DRMATi	共分散の導関数
RKMATi	マトリックス形式数値積分

機能を用いることにより、複雑に階層化されたプログラムも構築可能である。

本研究において使用した MATLAB の関数、および、本研究で作成した関数 M ファイルの概要を、以下に示す。

1) 基本モジュールの関数

表-1 に本研究において使用した行列演算の演算記号、および、基本モジュールの中の行列演算に関するものの概要を示す。

2) 関数 M ファイル

表-2 に本研究で作成した、関数 M ファイルの概要を示す。ここに、i は荷重系の次元数による種別であり、type は構造系の種別を意味するものである。これらの関数のプログラムの一部を図-1 に示す。なお、行先頭の数字はリスト識別のために付加した。さらに、リストにおける各行末の ; は計算結果の非表示を意味する MATLAB 固有の表現である。

リストの 1 行から 5 行は、確率伝達マトリックス法における共分散方程式の導関数を求める関数である。

リストの 6 行から 16 行は、境界条件と外力項の相関

```

%Differential coefficient Matrix
1. function [ dr ] =drmat(x,L,rx,ax,qx
    ,bb,lx1,lx2,prm)
2. ny=prm(1);
3. nz=prm(2);
4. xf=cal_cor2(x,L,ax,qx,bb,lx1,lxr,ny,nz);
5. dr=ax*rx+rx*ax'+xf+xf'+qx;

%Corelation function Matrix
6. function [ xf ] =cal_cor(x,L,ax,qx,
    ,bb,lx1,lx2,ny,nz)
7. hf=expm(ax*(L-x));
8. hb=expm(ax*x);
9. hh=lx1*hf*qx;
10. hyz=tke_myz(hh,ny,nz);
11. e12=-bb*hyz;
12. e11=zeros(ny);
13. e22=zeros(2);
14. e21=zeros(2,ny);
15. ss=set_mxx(ny,nz,e11,e12,e21,e22);
16. xf=hb*lxr*ee;
    
```

図-1 MATLAB の関数プログラムリスト

を求める関数であり、(30)式の計算に相当する。7 行および 8 行のように、行列の指数関数を用いることで、状態遷移行列を簡単に計算できる。10 行から 15 行では、構造系と荷重系をブロックに分割したのち、連立方程式をそれぞれについて解き、それらを合成する処理である。

これらの関数は、係数マトリックス ax の定義を変えるだけで、構造系および荷重系の変更に対応できるものとなっている。

5. MATLAB による不規則構造解析

5. 1 プログラムの概要

確率伝達マトリックス法のプログラムにおける処理プロセスを列記すると、以下のようになる。

- a) 部材の断面定数や荷重強度の定義。
- b) 始端境界マトリックス B_Y の定義。
- c) 終端境界マトリックス B'_Y の定義。
- d) 節点マトリックス P_{Xk} , P_{Yk} の定義。
- e) 係数マトリックス A_X の定義。
- f) 荷重強度マトリックス Q_X の定義。
- g) 格間伝達マトリックス $A(j, i)$ の定義。
- h) 境界値問題を連立方程式として解くための係数マトリックスの計算。
- i) $R_x(0)=0$ として、共分散方程式の初期値定義。

- j) 1 部材について, 共分散方程式を積分.
- k) 節点 1 で 2 部材に R_x を伝達.
- l) j), k) を順次繰り返して $P_x(s)$ を得る.

- m) 始端境界条件の共分散 $R_x(0)$ を計算.
- n) j), k) と同様の繰り返しで共分散応答 $R_{xk}(x)$ を得る.

これらの処理を実行するための関数は前節で説明した。MATLAB によるプログラムでは, 状態方程式の係数行列を定数係数とすることにより, 極めて簡単な記述になる。次節にそのことを示す。

```

%Continuous Beam
a. パラメータの設定
b. bl=...
c. br=...
d.1 py1=...
d.2 px1=...
e.1 ax1=bem_axx2(pr1);
e.2 ax2=bem_axx2(pr2);
f.1 qx1=lod_qxxx(pr1);
f.2 qx2=lod_qxxx(pr2);
g.1 h1=expm(ax1*L1);
g.2 h2=expm(ax2*L2);
g.3 lx0=eye(nx);
g.4 lx1=h2*px1;
g.5 lx2=px1;*h1
h.1 h12=bem_phy(pr2,L2)*py1;
h.2 h21=py1*bem_phy(pr1,L1);
h.3 bxb=(br*h12*bem_phy(pr1,L1)*bl);
h.4 bxt=inv(bxb);
h.5 bb=bl*bxt*br;
i. r0=zeros(nx);
j. [x,XR]=rkmat2(dv1,r0,ax1,qx1,bb,...);
k.1 r0=XR(n,:);
k.2 r0=px1*r0*px1';
l.1 [x,XR]=rkmat2(dv2,r0,ax2,qx2,bb,...);
l.2 r0=XR(n,:);
m. pyy=tke_myy2(r0,ny);
m. pyz=tke_myz2(r0,ny);
m. phx=h2*lx2;
m. hyz=tke_myz2(phx,ny);
m. phy=tke_myy2(r0,ny);
m. phz=tke_mzz2(r0,ny);
m. rzz=cal_rzz2(S,om,bt);
m. ryz=-bb*(hyz*rzz+pyz*inv(phz'));
m. ryy=-bb*(hyz*ryz'*phy'+phy*ryz*hyz'+
            +hyz*rzz*hyz'+pyy)*bb';
m. rzy=ryz';
m. r0=set_mxx2(ny,ryy,ryz,rzy,rzz);
n.1 [x,XR]=rkmat2(dv1,r0,ax1,qx1,bb,...);
n.2 r0=XR(n,:);
n.3 r0=px1*r0*px1';
n.4 [x,XR]=rkmat2(dv2,r0,ax2,qx2,bb,...);
    
```

図-2 MATLAB のプログラムリスト

5.2 MATLAB のプログラム

図-2 に 2 径間連続ばりに指数余弦関数型の自己相関を有する不規則荷重モデルが作用する場合を例題として作成した, 確率伝達マトリックス法のプログラムリストを示す。なお, 行先頭の符号はリスト識別のために付加した。これは前節で示した処理プロセスに対応するものである。

説明は省略するが, たかだか 40 ステップ程のコマンド処理により, 連続ばりの応答の共分散を得るプログラムである。また, 下位の関数の記述を含めても約 130 ステップの極めて簡単なものである。

5.3 MATLAB による解析例

図-3 および図-4 に MATLAB のプログラムを用いて求めた 2 ヒンジアーチと両端固定アーチの計算結果を示す。この計算例では, 構造系は開き角 60 度, 一様断面の円弧アーチであり, 不規則荷重は, 次式の指数余弦関数型の自己相関を有する荷重モデルとしている。

$$R_r(\lambda) = \sigma^2 e^{-\beta|\lambda|} \cos(\Omega\lambda) \quad (32)$$

図-3 は 2 ヒンジアーチの軸伸び, 横たわみ, たわみ角, 曲げモーメント, 軸力およびせん断力の応答の標準偏差であり, 一様分布荷重 $p=1$ が作用したときの応答の最大値 $\bar{u}_{\max}, \bar{v}_{\max}, \bar{\phi}_{\max}, \bar{M}_{\max}, \bar{N}_{\max}$, および \bar{Q}_{\max} で規準化している。

解析例では, スペクトルピーク幅パラメータを $h = \beta/\Omega = 0.1$ のように狭くした値に固定し, スペクトル中心周波数パラメータ $k = \Omega/2\pi L$ を種々変化させている。図の実線は $k=0.001$, 破線は $k=0.1$, 一点鎖線は $k=0.5$, そして, 点線は $k=2.0$ の場合である。

図-4 は両端固定アーチの解析結果を 2 ヒンジアーチの場合と同じように示したものである。これらの図より, 特に 2 ヒンジアーチの解析結果において, k の変化により応答が激しく変動する様子が分かる。

6. おわりに

本論文では, 確率伝達マトリックス法の基礎方程式

および解法の構成を、各種の構造系に対して統一的に表すような整理を行うことにより、汎用的な不規則構造解析法を提案した。また、この解析法の数値計算にマトリクス演算ソフトウェア MATLAB を用いることにより、プログラムの記述が極めて簡明となるこ

とを明確にした。また、プログラムリストを説明することにより、構造系および荷重系を変更する場合、境界マトリクス、節点マトリクス、およびいくつかの係数マトリクスを変更するだけで適用できる汎用性を有していることを明確にした。

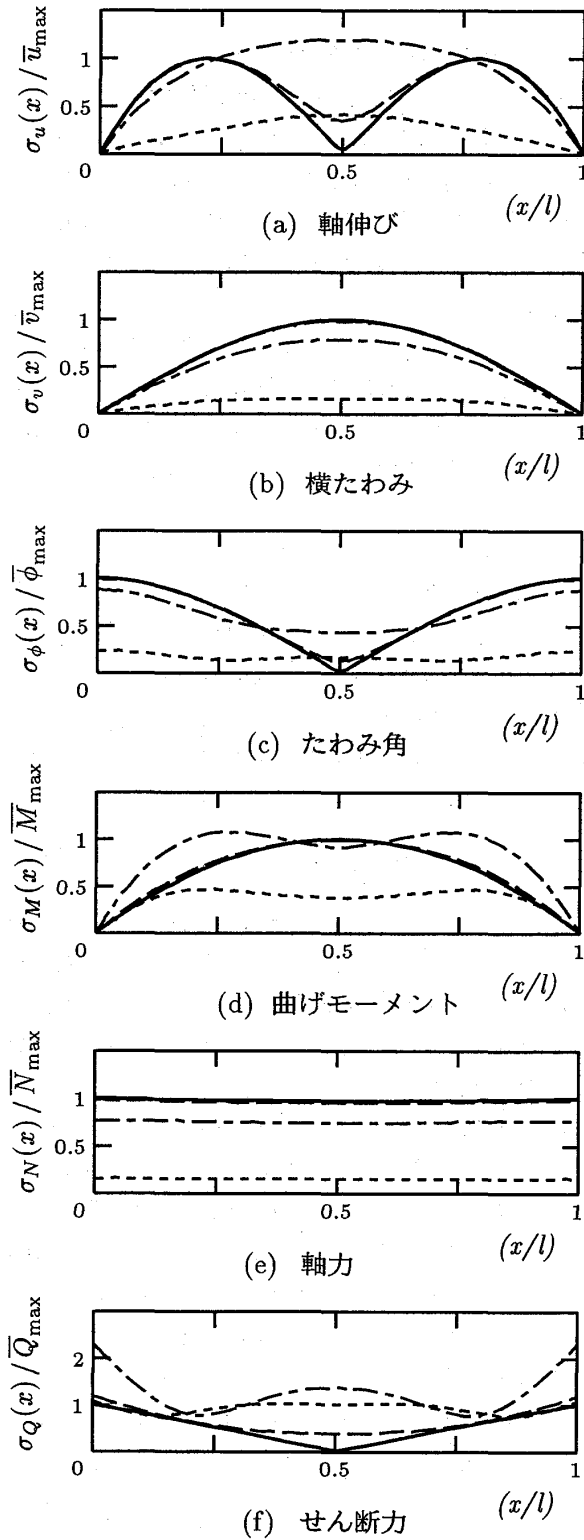


図-3 2 ヒンジアーチの応答の標準偏差

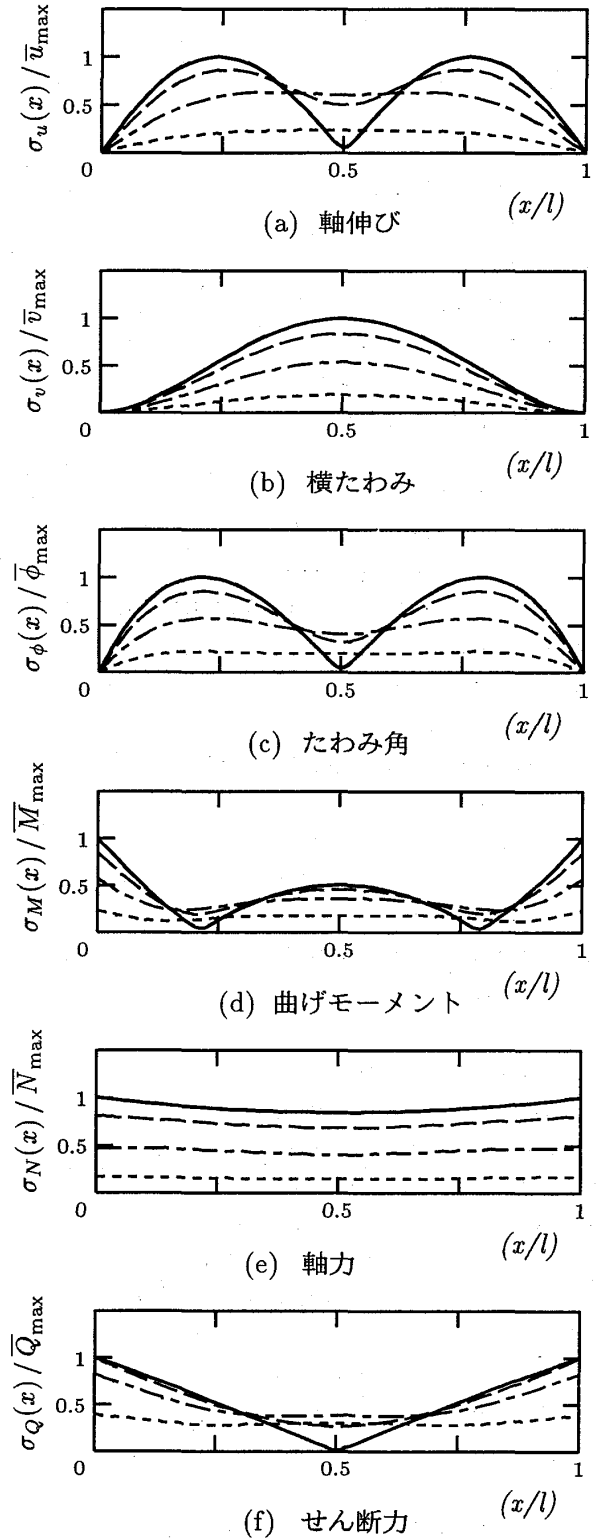


図-4 固定アーチの応答の標準偏差

本論文の解析例として、指数余弦関数型の荷重モデルで表現した不規則分布荷重を受けるアーチの共分散応答を求め、提案する解析法の有効性を確認した。

本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

- 1) 確率伝達マトリックス法の基礎方程式および解法の構成を、各種の構造系に対して統一的に表すことができた。このことにより、マトリックス演算ソフトウェア MATLAB を用いたプログラムを汎用的なものにすることができた。
- 2) MATLAB を用いた確率伝達マトリックス法のプログラムの計算により、不規則分布荷重を受けるアーチの共分散応答の数値解が、パーソナルコンピュータによりわずかの時間で得ることができる。
- 3) 確率伝達マトリックス法は、2点境界値問題にモデル化可能な構造系のための、実用的かつ汎用的な不規則構造解析法である。

参考文献

- 1) Madsen, H. O., krenk, S. and Lind, N. C.: *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., 1986.
- 2) 岡林隆敏, 浦川剛志, 吉田啓三: 相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第341号, pp. 155-162, 1984年1月.
- 3) 岡林隆敏, 河角省治, 吉田啓三: 不規則分布荷重を受ける連続ばりの分散・共分散解析, 土木学会論文集, No. 525/I-33, pp. 117-126, 1995年10月.
- 4) 岡林隆敏, 花井正美, 吉田啓三: 不規則分布荷重を受けるアーチ部材の分散・共分散応答解析, 不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化した場合(その1), 日本建築学会構造系論文報告集, 第423号, pp. 97-104, 1991年5月.
- 5) 河角省治, 岡林隆敏, 崎山毅: 不規則分布荷重を受ける直列型構造系の確率伝達マトリックス法による解析, 構造工学論文集, Vol. 42A, pp. 439-447, 1996年3月.
- 6) The MathWorks. Inc.: *MATLAB Reference Guide*, サイバネットシステム株式会社, 1993年5月.
- 7) Etter, D. M.: *Engineering Problem Solving with MATLAB*, PRENTICE HALL. Inc..
- 8) Ogata, K.: *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*, PRENTICE HALL. Inc..
- 9) 成岡昌夫, 遠田良喜: 伝達マトリックス法(コンピュータによる構造工学講座), 倍風館, 1975年3

月.

- 10) 大地洋三: マトリックス構造解析, コロナ社, 1979年8月.