

内管が軸方向に運動する同心環状流路内の 非ニュートン流体の十分に発達した層流の解析

茂地 徹*・桃木 悟*
東井上 真哉**・Y. Lee***

An Analysis on Fully Developed Laminar Flow of Power-Law Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli with Axially Moving Cores

by

Toru SHIGECHI*, Satoru MOMOKI*, Shinya HIGASHIUE**
and Y. LEE***

The fully developed laminar flow of a power-law non-Newtonian fluid in a concentric annulus with an axially moving core is studied analytically. Applying the shear stress described by the power-law model, the exact solutions for the momentum equation are obtained in terms of definite integrals. The effects of the radius ratio, the relative velocity of the core and the flow index of a power-law non-Newtonian fluid on the velocity distribution and friction factor are discussed.

1. まえがき

環状流路内の流動と伝熱の研究は、内管と外管がともに静止(固定)している場合には高温ガス炉や二重管熱交換器などの熱流動設計に関連して重要であるため古くから数多くの研究が行われてきたが、内管のみが軸方向に動く場合は応用面での要請が少なく研究もほとんど行なわれてこなかった。しかし、最近、押し出し・引き抜き・圧延などの金属やプラスチック材料の製造過程での材質制御に関連する伝熱問題や長いトンネル内を走行する列車の熱環境問題等への応用が見込まれ、内管が軸方向に運動する場合の流動・伝熱特性に関する知見が必要とされるようになった。著者らは既に、内管が軸方向に運動する同心および偏心環状流路の場合について、ニュートン流体の層流と乱流の場合に対して理論解析を行い、流動と伝熱に関する重要

な知見を公表している^{1)~5)}。

本研究では、内管が軸方向に運動する同心環状流路内を非ニュートン流体が十分に発達した層流で流れる場合の速度場を解析し、流体の速度分布と摩擦係数に及ぼす内管と外管の半径比、内管の相対速度および指数法則で記述された非ニュートン流体の流れの指数の影響を理論的に明らかにした結果について報告する。

主要記号

f	摩擦係数, 式(4)
F	無次元数, 式(15)
m	粘性の指数, 式(3)
n	流れの指数, 式(3)
P	圧力
r	半径方向座標 (Fig. 1)

平成9年4月25日受理

*機械システム工学科 (Dept. of Mechanical Systems Engineering)

**ダイフク株式会社 (DAIFUKU, Co. Ltd)

***オタワ大学工学部 (Fac. of Engineering, Univ. of Ottawa)

- r^* 無次元半径座標, 式(7)
 - R 半径
 - R_m 最大速度の生じる半径
 - Re^* 一般化されたレイノルズ数, 式(5)
 - u 流体の軸方向速度
 - u^* 無次元速度, 式(8)
 - u_m 流体の平均速度, 式(6)
 - U 内管の軸方向速度
 - U^* 内管の相対速度 $\equiv U/u_m$
 - z 軸方向座標
 - α 内管と外管の半径比 $\equiv R_i/R_o$
 - α_{max} 最大速度の生じる半径比 $\equiv R_m/R_o$
 - ξ 半径方向の無次元座標 $\equiv (r^* - \alpha)/(1 - \alpha)$
 - ρ 密度
- 添 字
- cr 臨界値
 - i 内壁, 内壁側
 - o 外壁, 外壁側

2. 流動解析

Fig. 1 に示す物理モデルを考える。流動の解析に際して次の仮定を設定する。

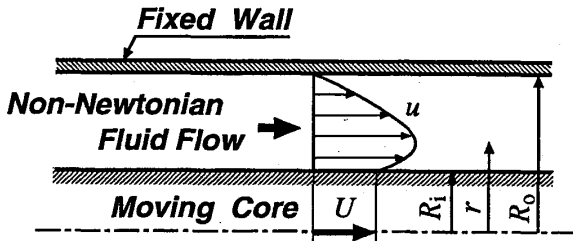


Fig. 1 Schematic of a concentric annulus with an axially moving core

- (1) 流れは非圧縮・定常層流で流体力学的に十分発達している。
- (2) 流体は非ニュートン流体で、せん断応力は Ostwald-de Waele⁶⁾ の指数法則 (power-law model) で表わされ、物性値は一定とする。
- (3) 体積力は無視できる。
- (4) 内管は軸方向に速度一定で運動している。

2.1 基礎式

以上の仮定により、同心環状流路に対する運動方程式と境界条件は次式のように書くことができる。

運動方程式：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) = -\frac{dP}{dz} \quad (1)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r=R_i : u=U \\ r=R_o : u=0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、式(1)の左辺のせん断応力 τ は次式の power-law model で与えられる。

$$\tau = -m \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \frac{du}{dr} \quad (3)$$

ここに、 m は流体の粘性の指数 (consistency index), n は流れの指数 (flow index) と呼ばれるが、 m と n は次元を有する定数である。 $n=1$ の場合はニュートン流体に相当し、 m は通常の粘性係数 (viscosity) と一致する。

摩擦係数 f と一般化されたレイノルズ数 Re^* は、それぞれ次式で計算される。

$$f \equiv \frac{(R_o - R_i)}{\rho u_m^2} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (4)$$

$$Re^* \equiv \frac{\rho u_m^{2-n} \{ 2(R_o - R_i) \}^n}{m} \quad (5)$$

ここに、 u_m は流体の平均速度であり次式で定義される。

$$u_m \equiv \frac{1}{\pi(R_o^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} u \cdot 2\pi r dr \quad (6)$$

2.2 速度分布

速度場の解析に際して次の無次元数を導入する。

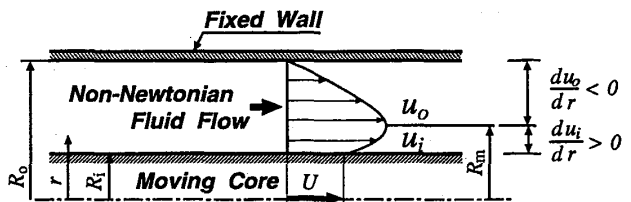
$$r^* \equiv r/R_o \quad (7)$$

$$u^* \equiv u/u_m \quad (8)$$

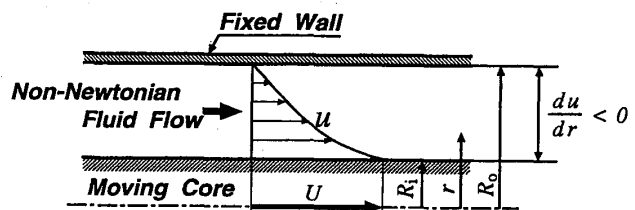
$$\alpha \equiv R_i/R_o \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (9)$$

$$U^* \equiv U/u_m \quad (10)$$

内管が軸方向に運動する場合の環状流路内の流体の速度分布として、Fig. 2 の (a) CASE A と (b) CASE B



(a) CASE A



(b) CASE B

Fig. 2 Velocity profiles assumed in this analysis

に示すように環状流路内に最大速度を有する場合とそうでない場合の二種類が想定され、それぞれ式(3)のせん断応力の適用の仕方が異なるので、以下、**CASE A** と **CASE B** の場合に分けて取り扱う。

2.2.1 CASE A (流体の最大速度が環状流路内に存在する場合)

この場合には、せん断応力 τ は次式で計算される。

$$\tau = -m \left(\frac{du_i}{dr} \right)^n \quad (R_i \leq r \leq R_m) \quad (11)$$

$$\tau = m \left(-\frac{du_o}{dr} \right)^n \quad (R_m \leq r \leq R_o) \quad (12)$$

$$(1) \quad R_i \leq r \leq R_m \quad (\alpha \leq r^* \leq \alpha_{\max})$$

式(11)を適用し、さらに式(7)～式(10)の無次元数を用いると運動方程式と境界条件は次のように変換される。

運動方程式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \left(\frac{du_i^*}{dr^*} \right)^n \right] = -2F \quad (13)$$

境界条件：

$$r^* = \alpha : u_i^* = U^* \quad (14)$$

ここに、 F は次式で定義される無次元数である。

$$F \equiv fRe^* / [2(1-\alpha)]^{n+1} \quad (15)$$

最大速度の位置 ($r^* = \alpha_{\max}$) では速度勾配が零であることから次式の条件が課せられる。

$$r^* = \alpha_{\max} : \frac{du_i^*}{dr^*} = 0 \quad (16)$$

式(13)を式(16)の条件で1回積分すると次式が得られる。

$$\frac{du_i^*}{dr^*} = F^{1/n} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{r^*} - r^* \right)^{1/n} \quad (17)$$

さらに、式(17)を式(14)の条件で積分すると次式の解が得られる。

$$u_i^* = U^* + F^{1/n} \int_{\alpha}^{r^*} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} - \zeta \right)^{1/n} d\zeta \quad (18)$$

$$(2) \quad R_m \leq r \leq R_o \quad (\alpha_{\max} \leq r^* \leq 1)$$

式(12)を適用し、さらに式(7)～式(10)の無次元数を用いると運動方程式と境界条件は次のように変換される。

運動方程式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \left(-\frac{du_o^*}{dr^*} \right)^n \right] = 2F \quad (19)$$

境界条件：

$$r^* = 1 : u_o^* = 0 \quad (20)$$

最大速度の位置 ($r^* = \alpha_{\max}$) では速度勾配が零であることから次式の条件が課せられる。

$$r^* = \alpha_{\max} : \frac{du_o^*}{dr^*} = 0 \quad (21)$$

式(19)を式(21)の条件で1回積分すると次式が得られる。

$$\frac{du_o^*}{dr^*} = -F^{1/n} \left(r^* - \frac{\alpha_{\max}^2}{r^*} \right)^{1/n} \quad (22)$$

さらに、式(22)を式(20)の条件で積分すると次式の解が得られる。

$$u_o^* = F^{1/n} \int_{r^*}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} \right)^{1/n} d\zeta \quad (23)$$

ここで、 $r^* = \alpha_{\max}$ における速度の適合条件より

$$r^* = \alpha_{\max} : u_i^* = u_o^* \quad (24)$$

であるから、式(24)に式(18)と式(23)の速度を適用すると F に関して次の第1番目の関係式が得られる。

$$F = \left[\frac{U^*}{\int_{\alpha_{\max}}^1 \left(r^* - \frac{\alpha_{\max}^2}{r^*} \right)^{1/n} dr^* - \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{r^*} - r^* \right)^{1/n} dr^*} \right]^n \quad (25)$$

なお、未だ確定していない α_{\max} の値を決定するためには、さらに F に関して式(25)とは別の関係式が必要であるが、これは環状流路を流れる流体の流量バランスから以下のように得られる。

式(6)を無次元化すると次式が得られる。

$$\int_{\alpha}^1 u^* r^* dr^* = \frac{1-\alpha^2}{2} \quad (26)$$

式(26)は、さらに u_i^* と u_o^* を用いると次式のように書くことができる。

$$\int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} u_i^* r^* dr^* + \int_{\alpha_{\max}}^1 u_o^* r^* dr^* = \frac{1-\alpha^2}{2} \quad (27)$$

式(18)の u_i^* と式(23)の u_o^* を式(27)に代入すると、 F に関して次の第2番目の関係式が得られる。

$$F = \left[\frac{\frac{(1-\alpha^2)}{2} - \frac{(\alpha_{\max}^2 - \alpha^2)}{2} U^*}{\int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} r^* \left\{ \int_{\alpha}^{r^*} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} - \zeta \right)^{1/n} d\zeta \right\} dr^* + \int_{\alpha_{\max}}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} \right)^{1/n} d\zeta \right\} dr^*} \right]^n \quad (28)$$

ここで、式(25)と式(28)から F を消去すると、 U^* 、 α 、 α_{\max} および n に関して次式の関係が得られる。

$$U^* = \left(\frac{1-\alpha^2}{2} \right) / \left[\left(\frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha^2}{2} \right) + \frac{\int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} r^* \left\{ \int_{\alpha}^{r^*} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} - \zeta \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^* + \int_{\alpha_{\max}}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^*}{\int_{\alpha_{\max}}^1 \left(r^* - \frac{\alpha_{\max}^2}{r^*} \right)^{\frac{1}{n}} dr^* - \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{r^*} - r^* \right)^{\frac{1}{n}} dr^*} \right] \quad (29)$$

したがって、この式から、半径比 α 、流れの指数 n および内管の相対速度 U^* の一組の値に対して、 α_{\max} の値を誤差範囲に確定することができる。

2.2.2 CASE B (流体の最大速度が内壁上に存在する場合)

この場合には、せん断応力 τ は次式で計算される。

$$\tau = m \left(-\frac{du}{dr} \right)^n \quad (R_i \leq r \leq R_o) \quad (30)$$

運動方程式と境界条件は、式(30)を適用し、さらに式(7)～式(10)の無次元数を用いると次式のように変換される。

運動方程式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[r^* \left(-\frac{du^*}{dr^*} \right)^n \right] = 2F \quad (31)$$

境界条件：

$$\begin{cases} r^* = \alpha & : u^* = U^* \\ r^* = 1 & : u^* = 0 \end{cases} \quad (32)$$

式(31)を1回積分し、さらに、 $F > 0$ の制限を課すと次式が得られる。

$$\frac{du^*}{dr^*} = - \left(F r^* + \frac{C_B}{r^*} \right)^{\frac{1}{n}} = - F^{\frac{1}{n}} \left(r^* + \frac{C}{r^*} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (33)$$

ここに、 C_B および C は積分定数であり、 $C_B = FC$ の関係がある。

式(33)を式(32)の2番目の境界条件で積分すると次式が得られる。

$$u^* = \int_{r^*}^1 \left(F \zeta + \frac{C_B}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta = F^{\frac{1}{n}} \int_{r^*}^1 \left(\zeta + \frac{C}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \quad (34)$$

式(32)の1番目の境界条件を式(34)に適用すると次式が得られる。

$$U^* = \int_{\alpha}^1 \left(F \zeta + \frac{C_B}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta = F^{\frac{1}{n}} \int_{\alpha}^1 \left(\zeta + \frac{C}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \quad (35)$$

一方、式(34)を式(30)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(F \zeta + \frac{C_B}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^* \\ & = F^{\frac{1}{n}} \int_{\alpha}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta + \frac{C}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^* \end{aligned}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{2} \quad (36)$$

式(35)と式(36)から F を消去すると、 C を未知数とする次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} U^* & \left[\int_{\alpha}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta + \frac{C}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^* \right] \\ & = \frac{1-\alpha^2}{2} \left[\int_{\alpha}^1 \left(\zeta + \frac{C}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right] \end{aligned} \quad (37)$$

したがって、定数 C の値は一組のパラメータ (α , n , U^*) に対して式(37)から決定することができる。また、得られた定数 C から、 F は次式で計算することができる。

$$F = \left[\frac{\frac{1-\alpha^2}{2}}{\int_{\alpha}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta + \frac{C}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^*} \right]^n \quad (38)$$

2.3 速度と摩擦係数の計算方法

一組のパラメータ (α , n , U^*) が指定された場合に、速度分布の形状が **CASE A** と **CASE B** のどちらの場合に属するかは次のようにして判定する。まず、指定されたパラメータ (α , n) に対して、**CASE A** において $\alpha_{\max} = \alpha$ となる U^* の値 $U_{\alpha_{\max}=\alpha}^*$ を計算する (【付録 A】参照)。次に、与えられた U^* の値が $U^* \leq U_{\alpha_{\max}=\alpha}^*$ の場合には **CASE A**、 $U^* > U_{\alpha_{\max}=\alpha}^*$ の場合には **CASE B** と判定する。なお、 $U^* = 0$ は **CASE A** に属する。

速度 u^* と摩擦係数 f は以下のように計算する。

(a) **CASE A** の場合には、指定された一組のパラメータ (α , n , U^*) に対して、まず、式(29)から α_{\max} を決定し、次に式(28)から F (すなわち fRe^*) を計算する。このようにして得られた α_{\max} と F を用いて式(18)と式(23)を数値積分すれば、速度 u_i^* と u_o^* が求まる。

(b) **CASE B** の場合には、指定された一組のパラメータ (α , n , U^*) に対して、まず、式(37)から C を決

定し、次に式(38)から F (すなわち fRe^*) を計算する。
 このようにして得られた C と F を用いて式(34)を数値積分すれば、速度 u^* が求まる。

なお、内管が軸方向に運動している場合と静止している場合 ($U^* = 0$) との fRe^* の比 $fRe^*/fRe^*_{(U^*=0)}$ は式(28)と【付録 B】から、次式で計算される。

$$fRe^*/fRe^*_{(U^*=0)} = \left[1 - \left(\frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) U^* \right]^n \quad (39)$$

ここで、 α_{\max} は式(29)から計算する。

2.4 速度分布と摩擦係数の計算結果と考察

Fig. 3 は環状部断面の速度分布に及ぼす流れの指数 n の影響を半径比 $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8$ の場合と内管の相対速度 $U^* = -2.0, 0, +2.0$ の場合をまとめて示したものである。縦軸は u/u_m 、横軸は半径方向の無次元座標 ξ であり、横軸の左端 ($\xi = 0$) は内管表面、

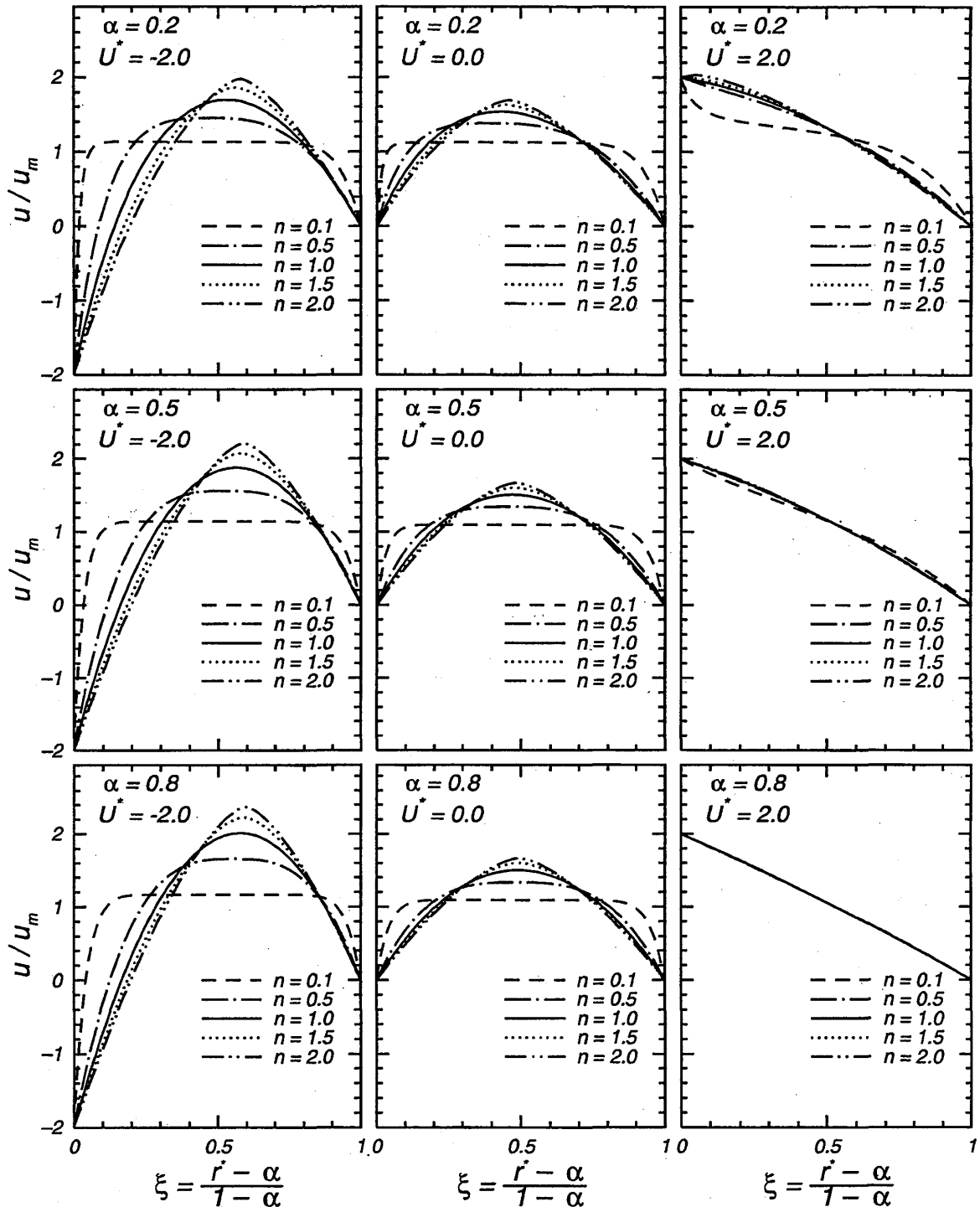


Fig. 3 Effect of n on velocity profile

右端 ($\zeta=1$) は外管表面を表す。 $n=1$ はニュートン流体の場合に相当する。図から、 U^* が零または負の場合には、 n が1より小さい場合には $n=1$ の場合と較べて最大速度が小さくなるが、 n が1より大きい場合には $n=1$ の場合と較べて最大速度は大きくなる、ことがわかる。つまり、 n が大きくなるにしたがい速度分布は最大値がより大きい放物線となるが、 n が小さくなると環状部断面中央で平坦な分布を有する台

形状の速度分布となる。 U^* が正 ($U^*=2$) の場合には、内管が流体を引っ張る効果の方が強いので速度分布は直線的となり、とくに α が小さい場合 ($\alpha=0.2$) を除けば、 n の影響は顕著にはみられない。

Fig. 4 は環状部断面の速度分布に及ぼす内管の相対速度 U^* の影響を半径比 $\alpha=0.2, 0.5, 0.8$ の場合と流れの指数 $n=0.5, 1.0, 1.5$ の場合をまとめて示したものである。縦軸と横軸は Fig. 3 と同じである。図か

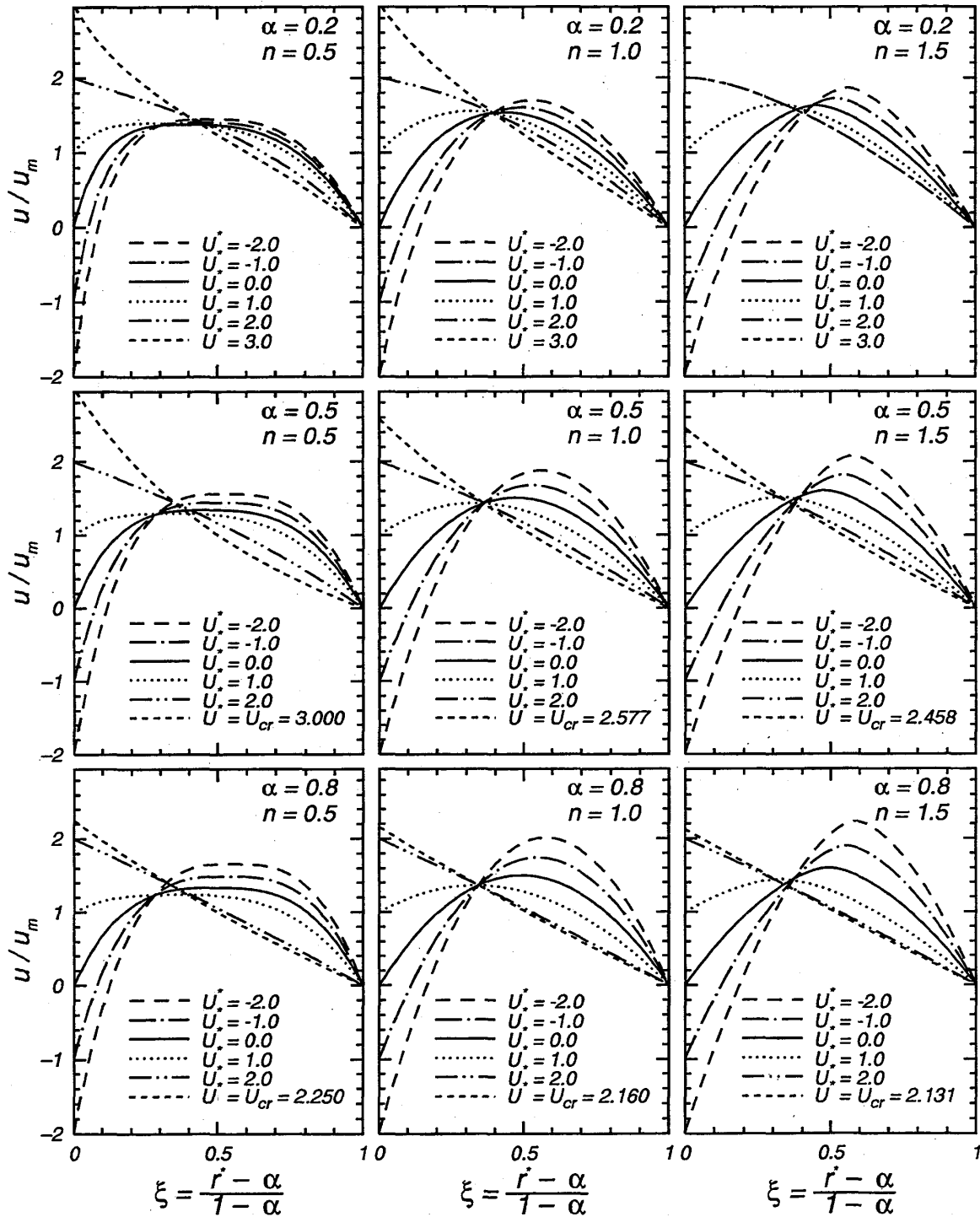


Fig. 4 Effect of U^* on velocity profile

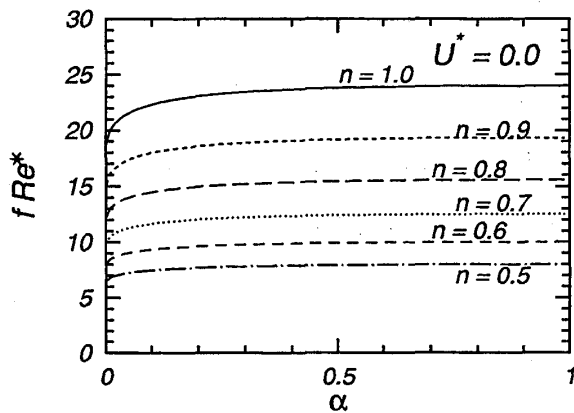
ら、 U^* が大きくなるにつれて内管が流体を引っ張る効果が強くなるので、速度分布は α や n の大きさにかわらず放物線状から直線状に変化していくことがわかる。

Fig. 5 は内管の相対速度 $U^* = 0$ の場合に摩擦係数の流れの指数 n ($0.5 \leq n \leq 1.5$) による変化をみるために、縦軸に fRe^* 、横軸に半径比 α をとって示したものである。図から、 n が一定の場合には fRe^* は $\alpha = 1$ で最大値をとり、 n が増加すると fRe^* の値も大きくなることわかる。

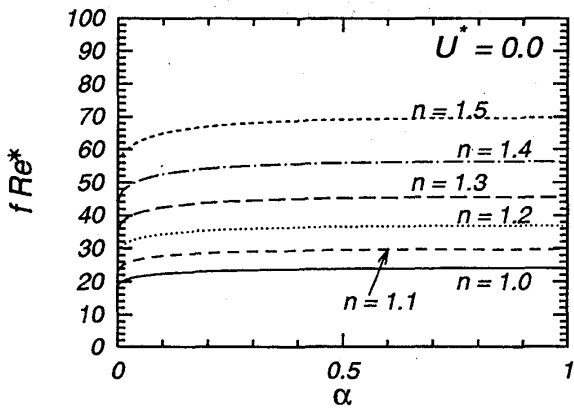
Fig. 6 は内管が軸方向に運動している場合と静止している場合 ($U^* = 0$) との fRe^* の比 $fRe^*/fRe^*(U^*=0)$ に及ぼす流れの指数 n と内管の相対速度 U^* の影響を示したものである。式(9)および図から明らかなように、 U^* が正の場合には縦軸の比 $fRe^*/fRe^*(U^*=0)$ は 1 より小さくなるが、 U^* が負の場合には逆の傾向を示す。また、 U^* の効果は n が大きいほど強くなる。

3. むすび

内管が軸方向に運動する同心環状流路内を流れる非ニュートン流体の十分に発達した層流の速度場を指数



(a) $n \leq 1$



(b) $n \geq 1$

Fig. 5 fRe^* vs α for $U^* = 0$

法則 (power-law model) を用いて解析した。流体の速度分布と摩擦係数に及ぼす内管と外管の半径比 α 、流れの指数 n および内管の相対速度 U^* の影響を、パラメータ α, n および U^* の広い範囲にわたって明らかにした。

参考文献

- 1) T. Shigechi, et al., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, (1990), 2029.
- 2) T. Shigechi & Y. Lee, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34**, (1991), 2593.
- 3) Y. Lee & T. Shigechi, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**, (1992), 3488.
- 4) T. Shigechi, et al., *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, **115**, (1993), 1061.
- 5) T. Shigechi, et al., *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, **118**, (1996), 205.
- 6) R. B. Bird, et al., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons(1960), 11.

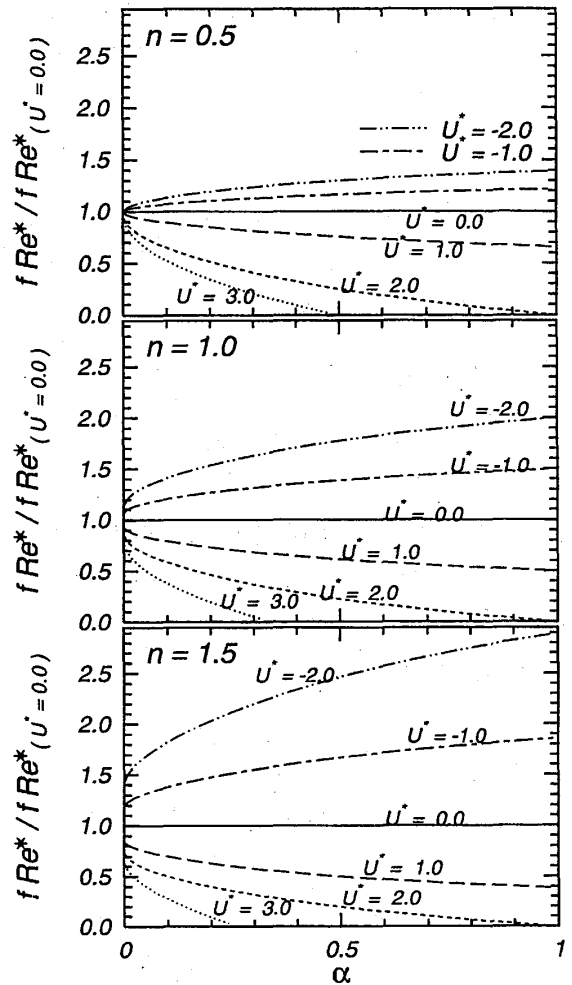


Fig. 6 fRe^* ratio vs α

【付録 A : CASE A において $\alpha_{\max} = \alpha$ となる場合】

式(9)において $\alpha_{\max} = \alpha$ とおけば $\alpha_{\max} = \alpha$ となる場合の U^* の値 $U_{\alpha_{\max} = \alpha}^*$ が与えられた (α, n) に対して次式のように計算される。

$$U_{\alpha_{\max} = \alpha}^* = \left[\frac{1 - \alpha^2}{2} \right] \frac{\int_{\alpha}^1 \left(r^* - \frac{\alpha^2}{r^*} \right)^{\frac{1}{n}} dr^*}{\int_{\alpha}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha^2}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^*}$$

また、式(9)より次の関係が得られる。

$$fRe_{\alpha_{\max} = \alpha}^* = [2(1 - \alpha)]^{n+1} \left[\frac{U_{\alpha_{\max} = \alpha}^*}{\int_{\alpha}^1 \left(r^* - \frac{\alpha^2}{r^*} \right)^{\frac{1}{n}} dr^*} \right]^n$$

【付録 B : $U^* = 0$ の場合の α_{\max} と fRe^* の値】

$U^* = 0$ の場合、速度 u_i^* と u_o^* は式(18)と式(23)より次式のようにになる。

$$u_i^* = F^{\frac{1}{n}} \int_{\alpha}^{r^*} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} - \zeta \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta$$

$$u_o^* = F^{\frac{1}{n}} \int_{r^*}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta$$

これらの式を式(24)に代入すると次式が得られる。

$$\int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} - \zeta \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta = \int_{\alpha_{\max}}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta$$

この式を解けば、 $U^* = 0$ の場合の α_{\max} を決定することができる。

$fRe_{U^* = 0}^*$ の値は、式(29)で $U^* = 0$ とおけば次式のように定まる。

$$fRe_{U^* = 0}^* = [2(1 - \alpha)]^{n+1}$$

$$\times \left[\frac{(1 - \alpha^2)}{2} \frac{1}{\int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} r^* \left\{ \int_{r^*}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} - \zeta \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^* + \int_{\alpha_{\max}}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\zeta - \frac{\alpha_{\max}^2}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^*} \right]^n$$

$n = 1$ (ニュートン流体) の場合には、 $U^* = 0$ の場合の α_{\max} と fRe^* の値は、それぞれ次のようになる。

$$n = 1 : \alpha_{\max} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\ln \alpha^2}}$$

$$fRe^* = \frac{16(1 - \alpha)^2}{1 + \alpha^2 - \left[\frac{\alpha^2 - 1}{\ln \alpha} \right]}$$

【付録 C : $fRe^* = 0$ の場合の U^* の臨界値 U_{cr}^* 】

CASE B の場合には、 $fRe^* = 0$ の条件で U^* の臨界値 U_{cr}^* が存在する。 U_{cr}^* の値は式(35)と式(36)で、それぞれ $F = 0$ として決定することができる。

$$U_{cr}^* = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{C_B}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta$$

$$\int_{\alpha}^1 r^* \left\{ \int_{r^*}^1 \left(\frac{C_B}{\zeta} \right)^{\frac{1}{n}} d\zeta \right\} dr^* = \frac{1 - \alpha^2}{2}$$

これらの式より C_B を消去すると U_{cr}^* が次式のように定まる。

$$n = 1 : U_{cr}^* = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^2 - 1}{\ln \alpha} \right]}$$

$$n \neq 1 : U_{cr}^* = \frac{1 - \alpha^{(1 - \frac{1}{n})}}{1 - \left[\frac{2}{1 - \alpha^2} \right] \cdot \left[\frac{n}{3n - 1} \right] \left[1 - \alpha^{(3 - \frac{1}{n})} \right]}$$