サンドイッチ板の曲げ・自由振動解析

崎山　毅*・松田　浩*・森田　千尋*
黄　美**・森本　浩司***・佐治　孝記****

Bending and Free Vibration Analysis of Rectangular Sandwich Plates

by

Takeshi SAKIYAMA*, Hiroshi MATSUDA*
Chihiro MORITA*, Huang MEI**
Kouji MORIMOTO*** and Takanori SAJI****

In this paper, a discrete method for analyzing the problems of bending and free vibration of sandwich plates is proposed. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained.

The characteristic equation of the free vibration is derived by applying the Green function which is obtained as a discrete solution of differential equations governing the flexural behavior of the sandwich plates under the action of a concentrated load. By applying the characteristic equation, the behavior of the free vibration of the sandwich plates can be analyzed efficiently without a calculation by trial and error method.

1. 緒　論

近年，高性能の高張力鋼材や，軽量，高強度の *FRP* (*Fiber Reinforced Plastics*) の開発によって，構造物の薄肉軽量化が一層進むにつれ，多分野においてサンドイッチ板などの複合板の需要が増えている。サンドイッチ板とは，軽量性などに優れたハニカムなどの材料を心材 (*Core*) として用い，その上下を耐荷能力のある表面材 (*Face Plate*) で挟んだ形状の板のことで，軽量性や経済性などに優れている。

しかしプラスチック材などを *Face Plate* に持つサンドイッチ板は，その強さの割に弾性率が小さいため (*FRP* の場合，約1000 [kg/mm^2]) 曲げ剛性の低さが問題とされる場合が多い。また，サンドイッチ板は建築物の構造要素としても使用されており，その材料の固有振動数を明らかにすることは，防振などの観点より必要となってくる。

そこで本研究においては，サンドイッチ板の曲げおよび振動解析法として，基礎微分方程式に基づいて直接的に解析を行う離散化手法を提示するとともに，その曲げ挙動，自由振動性状を解析し，これらに関する数値的データをとりまとめたものである。

2. サンドイッチ板の曲げ解析

2.1 基礎微分方程式

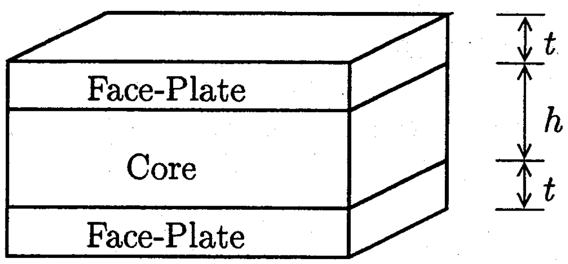


Fig. 1　サンドイッチ板

平成９年４月25日受理
*構造工学科 (Department of Structural Engineering)
**大学院海洋生産科学研究科 (Graduate School of Marine Science and Engineering)
***清水建設 (株) (Simizu Corporation)
****大学院修士課程構造工学専攻 (Graduate Student, Department of Structural Engineering)

Fig. 1に示すサンドイッチ板のせん断力を Q_y, Q_x, ねじりモーメントを M_{xy}, 曲げモーメントを M_y, M_x, たわみ角を θ_y, θ_x, たわみを w, 面内の変位を v, u, 面内力を N_{xy}, N_y, N_x とすれば基礎微分方程式は式 (2-a)～式 (2-m)のようになる。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-q \qquad (2-a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial M_x}{\partial x}=Q_x-m_y \qquad (2-b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y-m_x \qquad (2-c)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial \theta_x}{\partial x}=\frac{M_y}{D} \qquad (2-d)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial \theta_y}{\partial y}=\frac{M_x}{D} \qquad (2-e)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial \theta_y}{\partial x}=\frac{2}{D(1-\nu)}M_{xy} \qquad (2-f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\theta_y=\frac{Q_y}{Gt_s} \qquad (2-g)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\theta_x=\frac{Q_x}{Gt_s} \qquad (2-h)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=-p_y \qquad (2-i)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=-p_x \qquad (2-j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{N_x}{F} \qquad (2-k)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{N_y}{F} \qquad (2-l)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2}{F(1-\nu)}N_{xy} \qquad (2-m)$$

ここに,

E：弾性係数

G：せん断弾性係数

$t_s=t/1.2$：1.2はせん断弾性係数に関する等価係数

ν：ポアソン比

$D=Et^3/[12(1-\nu^2)]$：板の曲げ剛性

$F=Et/(1-\nu^2)$

2.2　離散的近似解

サンドイッチ板の基礎微分方程式における断面力および変形量 $Q_y, Q_x, M_{xy}, M_y, M_x, \theta_y, \theta_x, w, v, u, N_{xy}, N_y, N_x$ に次の無次元量

$$X_1=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}Q_y \ ,\quad X_2=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}Q_x$$

$$X_3=\frac{a}{D_0(1-\nu^2)}M_{xy} \ ,\quad X_4=\frac{a}{D_0(1-\nu^2)}M_y$$

$$X_5=\frac{a}{D_0(1-\nu^2)}M_x \ ,\quad X_6=\theta_y$$

$$X_7=\theta_x \ ,\quad X_8=\frac{w}{a}$$

$$X_9=\frac{v}{a} \ ,\quad X_{10}=\frac{u}{a}$$

$$X_{11}=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}N_{xy} \ ,\quad X_{12}=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}N_y$$

$$X_{13}=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}N_x$$

を導入して無次元化を行った後，基礎微分方程式の積分方程式への変換と近似解法との応用により任意の離散点 (i,j) における離散解 X_{pij}($p=1$～13) は次のように整理される。

$$\begin{aligned}X_{pij}=\sum_{t=1}^{13}\Big\{&\sum_{k=0}^{i}\beta_{ik}\ A_{pt}[X_{tk0}-X_{tkj}(1-\delta_{ik})]\\&+\sum_{l=0}^{j}\beta_{jl}\ B_{pt}[X_{t0l}-X_{til}(1-\delta_{jl})]\\&+\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\beta_{ik}\ \beta_{jl}\ C_{ptkl}\ X_{tkl}(1-\delta_{ik}\delta_{jl})\Big\}\\&-\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\beta_{ik}\ \beta_{jl}\ A_{p\bar{l}}\bar{q}_{kl}\end{aligned} \qquad (2-n)$$

ここに,

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

$\beta_{ik}=\alpha_{ik}/m,\qquad \beta_{jl}=\alpha_{jl}/n$

$$\alpha_{ik}=\begin{cases}0.5\ (k=0,\ i)\\1.0\ (k\neq 0,\ i)\end{cases},\qquad \alpha_{jl}=\begin{cases}0.5\ (l=0,\ j)\\1.0\ (l\neq 0,\ j)\end{cases}$$

ところで，領域 [i,j] を最小領域 [1, 1] から始めて，順次領域を拡大しつつ，各領域の主要点の諸量 X_{pij} を式 (2-n) より求め，これを次の領域の内部従属点の諸量 X_{pkl} として式(2-n)の右辺に逐次代入していけば，各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され，結局任意の領域 [i,j] の主要点 (i,j) における諸量 X_{pij} はこの領域の境界従属点 (k, 0)，(0, l) における諸量 X_{rk0} (r=1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), X_{s0l}(s=2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13) のみによってあらわされることになり，次式のように整理される。

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{10}\ \Big(\sum_{k=0}^{i}a_{1\,pijkd}X_{rk0}+\sum_{l=0}^{i}a_{2\,pijld}X_{s0l}\Big)+q_{pij} \qquad (2-o)$$

この式中に含まれる境界従属点の10個ずつの諸量 X_{rk0}, X_{s0l} はいわゆる積分定数であり，境界条件によって決定されるべきものである。また，任意の領域 [i,j] の主要点における諸量 X_{pij} を，この領域の境界従属点における諸量 X_{rk0}, X_{s0l} に関係づける係数 $a_{1_{pijkd}}, a_{2_{pijld}}$ は，伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。

3．サンドイッチ板の自由振動解析

3.1　運動方程式と境界積分方程式

非減衰自由振動をするサンドイッチ板の運動方程式は，式 (2-a) の横荷重強度として単位面積辺りの慣性力をとればよく，次式のようになる。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=\rho t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

ここに，ρ は材料の密度であり，ρt は単位面積の質量，$\partial^2 w/\partial t^2$ は加速度を意味する。この非減衰自由振動の場合，時間と断面力，変形の関係は調和振動を行うという前提の下に，次式を得る。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-\rho t\omega^2 w \qquad (3-a)$$

式（3-a）と式（2-b）～式（2-m）がサンドイッチ板の振動に関する運動方程式となる。式（3-a）の両辺に $\bar{w}$（基本解のたわみ）を乗じ，これをサンドイッチ板の全領域にわたって積分した次式をもとに定式化する。

$$\int_0^b\int_0^a(\rho t\omega^2 w)\bar{w}dxdy=\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}\right)\bar{w}dxdy$$

上式を 2 重積分して，順次展開してまとめると式（3-b）のような境界積分方程式を得る。

$$\bar{w}(\eta_0,\ \zeta_0)=\int_0^1\int_0^1\mu\lambda^4\bar{w}(\eta,\zeta)G(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)d\eta d\zeta \qquad (3-b)$$

ここに

$G(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)$　:たわみのグリーン関数

(η_0,ζ_0)　:単位集中荷重の載荷点

(η,ζ)　:積分点

式（3-b）に等間隔の数値積分を適用して，整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} B_{00}W_{0000}-K & B_{01}W_{0001} & \cdots & B_{mn}W_{00mn} \\ B_{01}W_{0100} & B_{01}W_{0101}-K & \cdots & B_{mn}W_{01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00}W_{mn00} & B_{01}W_{mn01} & \cdots & B_{mn}W_{mnmn}-K \end{bmatrix}=0 \qquad (3-c)$$

ここで，

$K=1/\lambda^4$

$\lambda^2=\omega a^2\sqrt{\rho t/D_0}$：固有値

$B_{ij}=\beta_{mi}\beta_{nj}$

$W_{mnkl}=G(m,n,k,l)$

上式を満足する λ^2 が求めるべき固有値である。

3.2　グリーン関数の導出

基本解は，サンドイッチ板に単位集中荷重が作用した場合のサンドイッチ板全体のたわみのことであり，式（2-a）～式（2-m）の板の曲げに関する基礎式のうち，式（2-a）を式（3-d）とすればよい。

$$\frac{\partial\bar{Q}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{Q}_y}{\partial y}=-p\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \qquad (3-d)$$

なお，振動の運動方程式と区別するために，基本解の諸量を $\bar{Q}_y,\bar{Q}_x,\bar{M}_{xy},\bar{M}_y,\bar{M}_x,\bar{\theta}_y\bar{\theta}_x,\bar{w},\bar{v},\bar{u},\bar{N}_{xy},\bar{N}_y,\bar{N}_x$ とする。曲げ解析の場合と同様に，無次元化した後，整理すると次式となる。

$$\begin{aligned}X_{pij}=\sum_{t=1}^{13}&\left\{\sum_{k=0}^{i}\beta_{ik}\ A_{pt}[X_{tko}-X_{tkj}(1-\delta_{ik})]\right.\\&+\sum_{l=0}^{j}\beta_{jl}\ B_{pt}[X_{tol}-X_{til}(1-\delta_{jl})]\\&\left.+\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\beta_{ik}\ \beta_{jl}\ C_{ptkl}\ X_{tkl}(1-\delta_{ik}\delta_{jl})\right\}\\&-\frac{aP}{D_o(1-\nu^2)}u(i-i_o)u(j-j_o)\end{aligned} \qquad (3-e)$$

ここで u は単位階段荷重である。

4．積分定数と境界条件

基礎微分方程式（2-a）～（2-m）に含まれる積分定数 X_{rk0},X_{s0l} は，具体的には，それぞれサンドイッチ板の $y=0,x=0$ なる辺上における断面力および変形を表す。各等分割点において合計10個づつの積分定数が存在するが，サンドイッチ板の境界辺の支持条件に応じて，これらの中のいずれか 5 個の積分定数は，既知である。残りの 5 個の未知なる積分定数は，$x=a,$

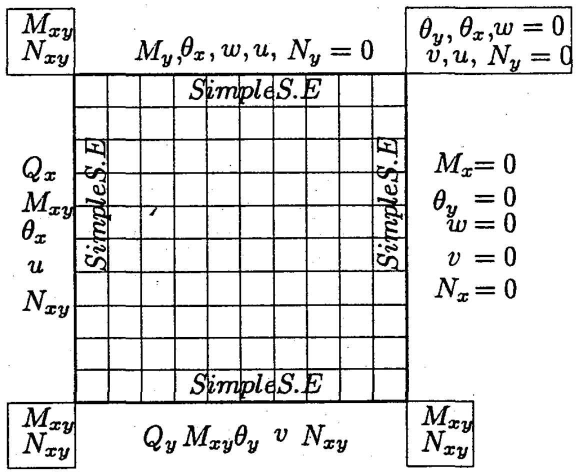


Fig. 2　4 辺単純支持サンドイッチ板

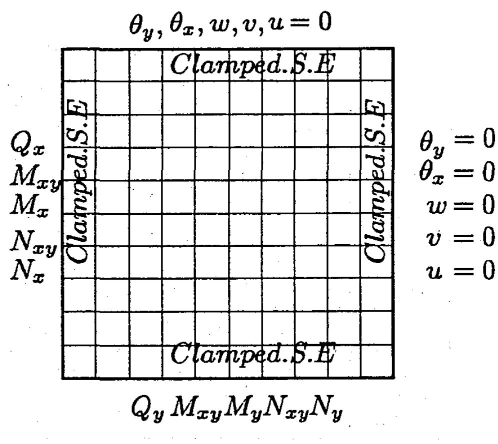


Fig. 3　4 辺固定支持サンドイッチ板

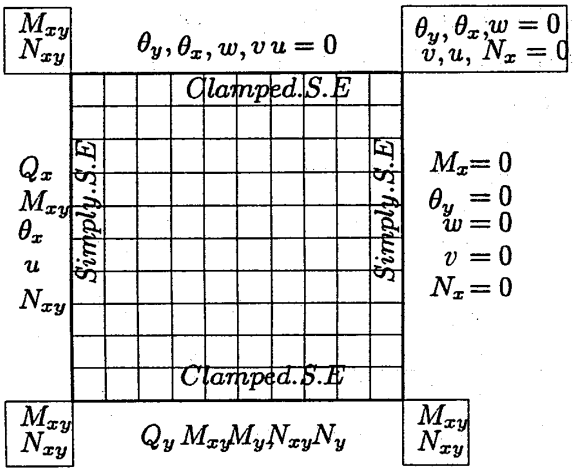


Fig. 4　対辺単純支持他固定支持サンドイッチ板

$y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。Figs. 2～4に，各々，四辺単純支持，四辺固定支持，対辺単純支持他対辺固定支持の全体を対象とした積分定数と境界条件を示している。各図において，隅角点における積分定数及び境界条件は，□で囲まれている。なお，隅角点における積分定数および境界条件は，その隅角点において2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。

5．解析結果

曲げ解析では，種々の境界条件を有する正方形サンドイッチ板に等分布荷重が満載された場合の断面力および変形に関する解析結果を，また自由振動解析においては，固有値および固有モードを示す。

5.1　曲げ解析

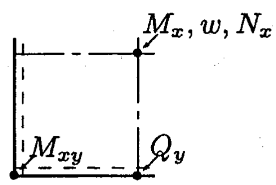
解析は分割数 $m=n=12$，*Face−Plate* の板厚 t と弾性係数 E を一定として行った。

Tables 1～3は，G_c/E を 10^{-2}～0と変化させたときの，同表に示す図の位置での各諸量の本解析解をまとめたものである。本解析法の数値解の精度を検証するために，*Core* のせん断弾性係数 G_c をパラメータとしたときの $G_c/E=0$ として *Core* の影響を無視し，サンドイッチ板を矩形板と見なして，既往の近似解[1]と比較した結果，いずれの境界条件においてもほぼ一致していることがわかる。

Figs. 5～7は $y=a/2$ の位置での x 軸上のたわみを示したものである。縦軸にたわみの無次元量 Dw/qa^4 を，横軸に x 軸での位置を示している。*Core* のせん断弾性係数が大きくなるに従い剛性も大きくなり，G_c/E が 10^{-6}～10^{-5} 程度から *Core* の影響が顕著に現れはじめ，変形が小さくなることが確認できる。

Table 1　4辺単純支持サンドイッチ板の数値解析解

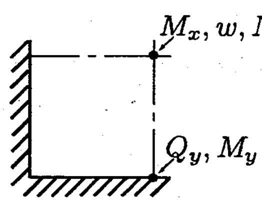
G_c/E	Q_y/qa	M_{xy}/qa^2	M_x/qa^2	$w/qa^4/D$	N_x/qa
10^{-2}	0.336	-0.0156	0.000025	0.000005	-0.1936
10^{-3}	0.337	0.00078	0.00025	0.000029	-0.1927
10^{-4}	0.337	0.00251	0.00231	0.000253	-0.1845
10^{-5}	0.337	-0.01374	0.01805	0.001649	-0.1215
10^{-6}	0.337	-0.08216	0.04187	0.003555	-0.0263
0	0.337	-0.03469	0.04843	0.004071	0.0
N.A.S	0.338	-0.0325	0.0479	0.00406	



N. A. S : Navier's Analytical Solution[1]

Table 2　4辺固定支持サンドイッチ板の数値解析解

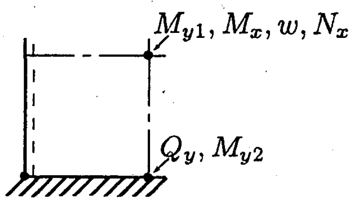
G_c/E	Q_y/qa	M_y/qa^2	M_x/qa^2	$w/qa^4/D$	N_x/qa
10^{-2}	0.348	-0.00215	-0.00095	0.000005	-0.1125
10^{-3}	0.356	-0.00611	0.00018	0.000027	-0.1066
10^{-4}	0.363	-0.01773	0.00229	0.000201	-0.0946
10^{-5}	0.404	-0.03931	0.01391	0.000827	-0.0426
10^{-6}	0.432	-0.05011	0.02234	0.001206	-0.0063
0	0.437	-0.05188	0.02382	0.001207	0.0
T.A.S		-0.0513	0.0231	0.00126	



T. A. S : Timoshenko's Analytical Solution[1]

Table 3　対辺単純支持他対辺固定支持サンドイッチ板の数値解析解

G_c/E	Q_y/qa	M_{y1}/qa^2	M_{y2}/qa^2	M_x/qa^2	$w/qa^4/D$	N_x/qa
10^{-2}	0.366	-0.00077	-0.00231	-0.000214	0.000006	-0.1971
10^{-3}	0.355	0.00022	-0.00639	0.000230	0.000028	-0.2065
10^{-4}	0.382	0.00251	-0.01919	0.002112	0.000224	-0.1792
10^{-5}	0.455	0.01760	-0.04790	0.012930	0.001092	-0.0856
10^{-6}	0.507	0.03156	-0.06684	0.022760	0.001780	-0.0138
0	0.516	0.03433	-0.07040	0.024711	0.001913	0.0
T.A.S		0.0332	-0.0697	0.0244	0.00192	



T. A. S : Timoshenko's Analytical Solution[1]

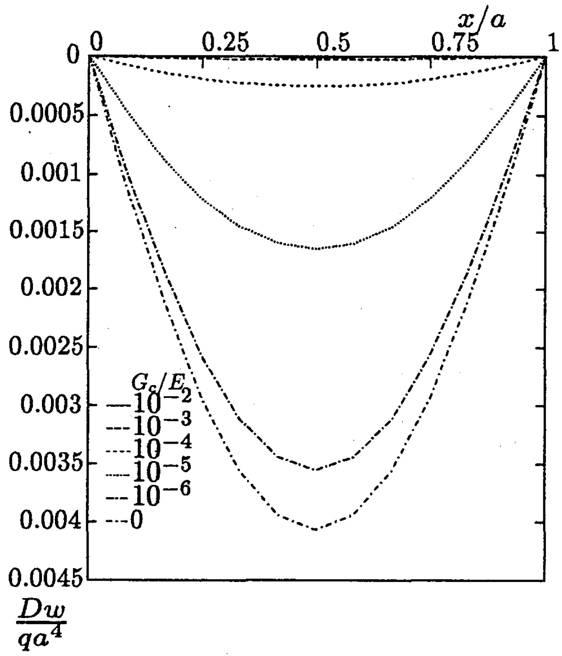


Fig. 5　4 辺単純支持サンドイッチ板のたわみ

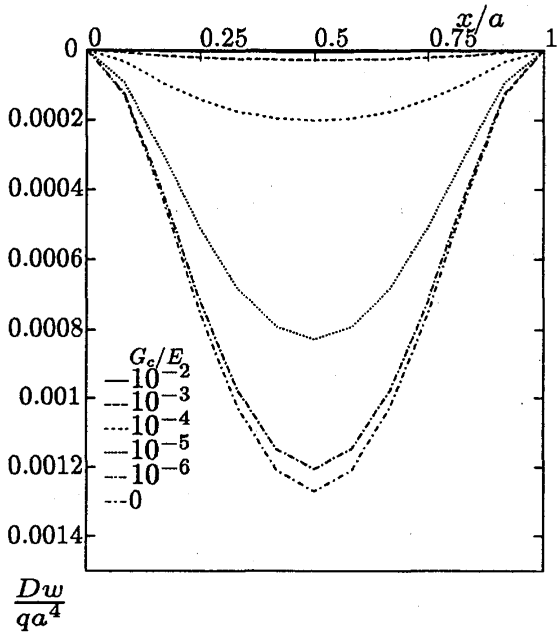


Fig. 6　4 辺固定支持サンドイッチ板のたわみ

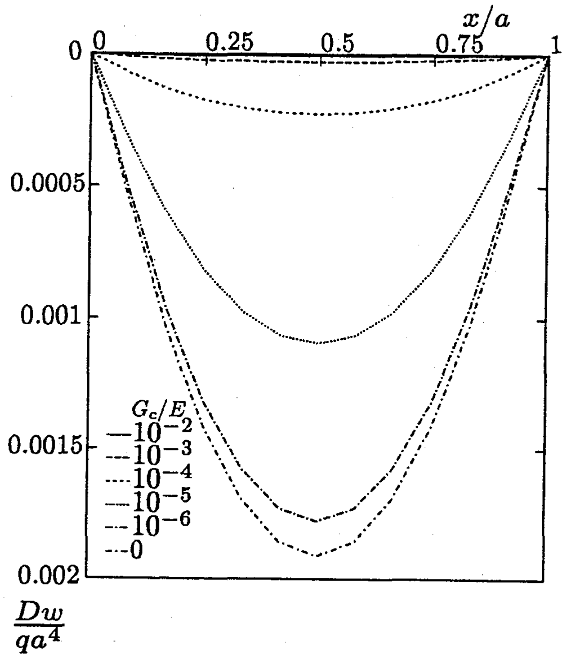


Fig. 7　対辺単純支持他対辺固定支持サンドイッチ板のたわみ

5.2　自由振動解析

曲げ解析と同様に分割数 $m=n=12$，*Face−Plate* の板厚 t と弾性係数 E を一定として解析を行った。

Tables 4〜6 は G_c/E を変化させたときのサンドイッチ板（$\nu=0.3, h/t=5$）の 1 次〜 6 次までの振動モードの固有値を示したものである。同表には，本解析法の精度確認のため，$G_c/E=0$ としたときの固有値を既往の近似解[2),3),4)]と比較している。

Fig. 8 は4辺単純支持サンドイッチ板の固有値曲線を示したもので縦軸に固有値を，横軸に G_c/E をとったものである。Fig.9 は $G_c/E=10^{-5}$ の時の 4 辺単純支持サンドイッチ板の 1 次〜 6 次の振動モードである。同様に Figs.10, 11は 4 辺固定支持サンドイッチ板の固有値曲線および振動モード，Figs.12, 13は対辺単純支持他対辺固定支持サンドイッチ板の固有値曲線および振動モードである。これから 3 種類の境界条件

Table 4　4 辺単純支持サンドイッチ板の固有値

G_c/E	1st mode	2nd mode	3rd mode	4th mode	5th mode	6th mode
10^{-2}	510.59	864.43	864.43	1113.0	1284.0	1284.0
10^{-3}	225.98	367.86	367.88	470.48	542.31	542.39
10^{-4}	77.429	130.49	130.49	173.17	205.52	205.52
10^{-5}	31.049	63.904	63.409	95.708	121.94	121.94
10^{-6}	21.332	52.698	52.698	84.015	110.04	110.04
0	19.961	51.301	51.301	82.612	108.64	108.64
Exact[2)]	19.74	49.35	49.35	78.96	98.70	98.70

Table 5　4 辺固定支持サンドイッチ板の固有値

G_c/E	1st mode	2nd mode	3rd mode	4th mode	5th mode	6th mode
10^{-2}	546.47	878.22	878.36	1126.5	1297.2	1299.0
10^{-3}	236.85	382.50	382.50	489.04	565.32	565.46
10^{-4}	87.988	148.85	148.85	197.15	236.48	236.64
10^{-5}	45.013	87.862	87.863	126.03	160.85	161.41
10^{-6}	37.644	78.860	78.861	116.25	150.97	151.67
0	36.723	77.790	77.790	115.11	149.83	150.55
Y.A.S	35.99	73.41	73.41	108.27	131.64	132.25

Y. A. S : Young's Analytical Solution[3)]

Table 6　対辺単純支持他対辺固定支持サンドイッチ板の固有値

G_c/E	1st mode	2nd mode	3rd mode	4th mode	5th mode	6th mode
10^{-2}	524.38	867.53	874.17	1119.3	1285.3	1296.4
10^{-3}	231.04	370.70	379.79	479.58	544.10	563.36
10^{-4}	82.863	134.00	145.67	185.52	208.00	234.35
10^{-5}	38.626	68.683	84.083	111.79	125.12	158.60
10^{-6}	30.532	58.056	74.880	101.29	113.42	148.73
0	29.488	46.750	73.782	100.05	112.05	147.59
L.A.S	28.946	54.743	69.320	94.584	102.21	129.09

L. A. S : Leissa's Analytical Solution[4)]

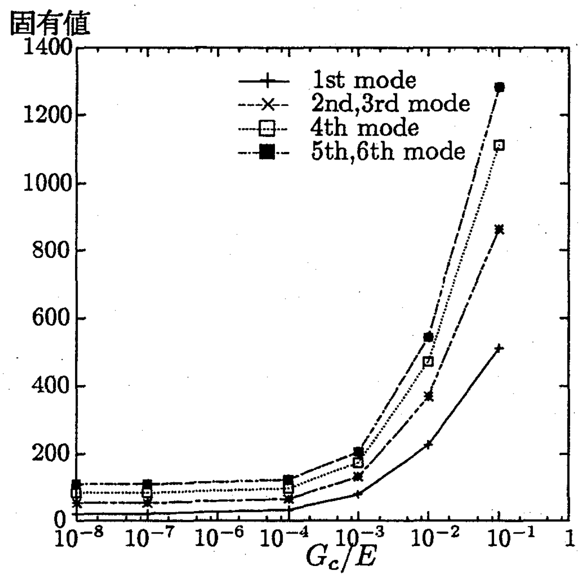


Fig. 8　G_c/E の変化による固有地（4辺単純支持）

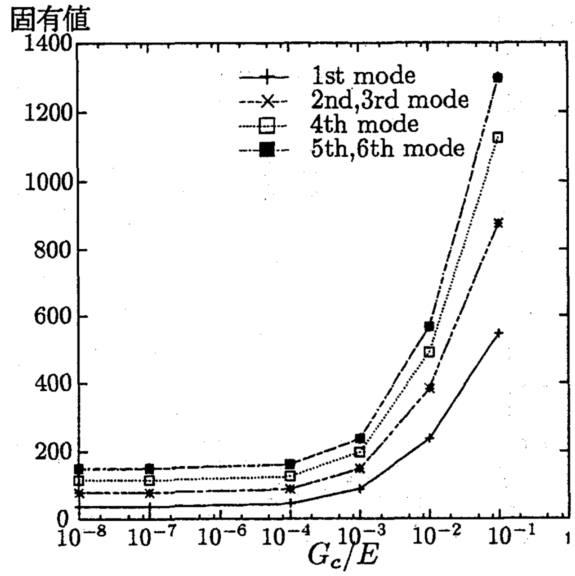


Fig.10　G_c/E の変化による固有地（4辺固定支持）

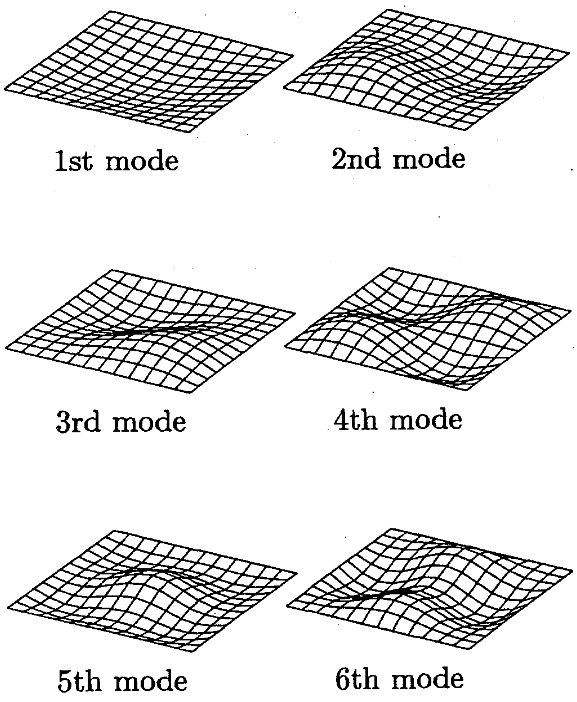


Fig. 9　4辺単純支持の振動モード

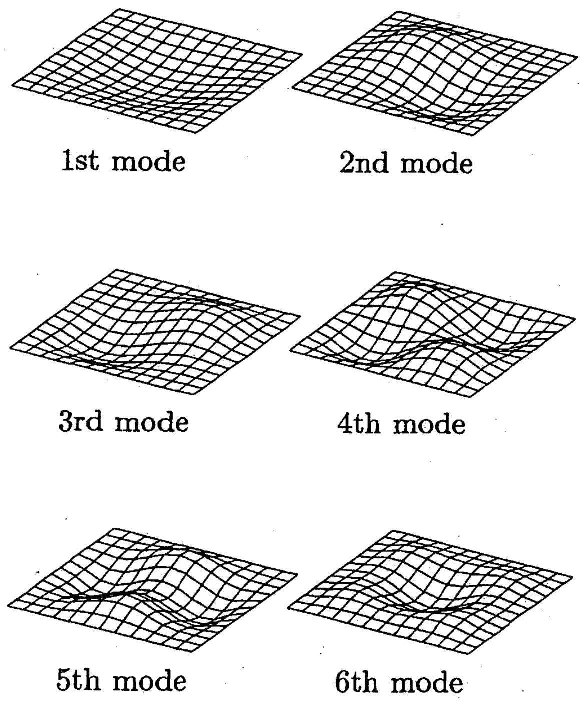


Fig.11　4辺固定支持の振動モード

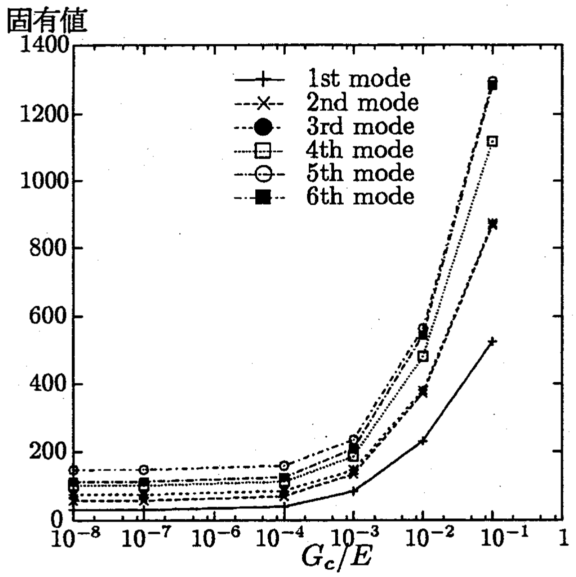


Fig.12　G_c/E の変化による固有値
（対辺単純支持他対辺固定支持）

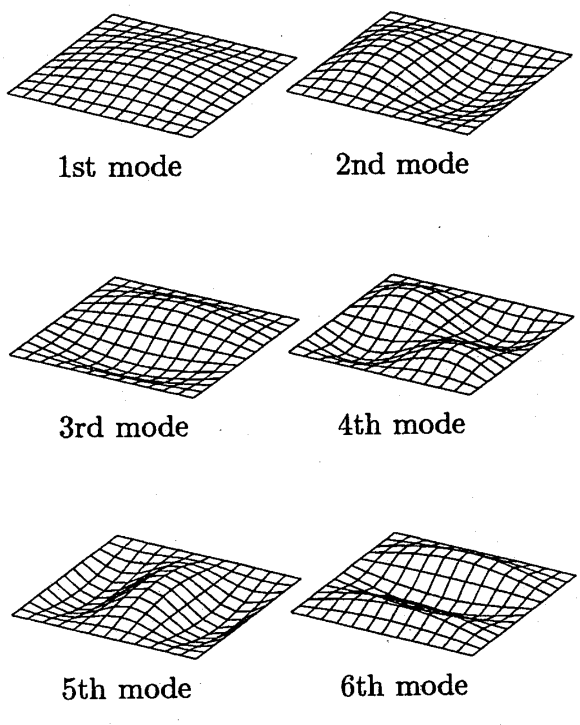


Fig.13　対辺単純支持他対辺固定支持の振動モード

では，いずれの場合においても一様に *Core* のせん断弾性係数が大きいほど固有値も大きくなることがわかる。特に，G_c/E の値が10^{-3}～10^{-4} のときに固有値の値が大きく変化している。

6．まとめ

基礎微分方程式の離散解に基づく解析法により，サンドイッチ板の曲げおよび自由振動性状を直接的に解析できる手法を提示した。

曲げ解析においては，G_c/E の値が大きくなると曲げ剛性が大きくなりたわみが減少することがわかった。

自由振動解析においては，単板構造と比較すると固有値の値が大きくなり，$G_{c/E}$ が10^{-3}～10^{-4} の間において固有値の値が大きく変化することを確認した。

参　考　文　献

1）Timoshenko, S. P. and S. W. Krieger : Theory of Plates and Shells, Second Edition, McGraw–Hill
2）関谷　壮，浜田　実，角誠之助：平板構造強度設計便覧，朝倉書店
3）D. Young : Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, J. Applied Mechanics, 17–4, pp.448–pp.4532, 1950
4）A. W. Leissa : Vibration of Plates, NASA SP–160